Uma abordagem funtorial da construção do k-quiver de Gabriel para coálgebras

Samuel Quirino

baseado num trabalho em conjunto com Kostiantyn Iusenko e John William MacQuarrie

IME-USP / UFMG

June 25, 2021

Motivação

- 2018 - Iusenko e MacQuarrie - The path algebra as a left adjoint functor - Algebras and Representation Theory;
- 2020 - Iusenko, MacQuarrie e Q - A functorial approach to Gabriel k-quiver constructions for coalgebras and pseudocompact algebras - Bulletin of the Brazilian Mathematical Society.

Um pouco de história

- 1941 - Hopf (Topologia algébrica);
- 1969 - Sweedler (Tratamento algébrico);
- 1980 - Abe (Grupos topológicos e grupos algébricos);
- 1993 - Montgomery (Ações de álgebras de Hopf);
- 2001 - Dăscălescu, Năstăsescu e Raianu;
- 2012 - Radford;
- 2020 - Ferreira e Murakami (Português).

Notação

- Fixamos um corpo k;
- Toda álgebra, coálgebra, espaço vetorial, transformação linear e produto tensorial será sobre k, salvo menção contrária;
- Por álgebra, entendemos como álgebra associativa com unidade (e homomorfismos de álgebras são unitais);
- Todo diagrama é comutativo;
- id sempre denotará o mapa identidade;
- $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ denota a função delta de Kronecker.

Definição de uma coálgebra

Uma álgebra é definida como uma categoria monoidal (tensor category) da seguinte maneira: $A = (A, \mathfrak{m}, \eta)$ é um espaço vetorial A juntamente com dois mapas lineares $\mathfrak{m} : A \otimes A \to A$, e $\eta : k \to A$, satisfazendo:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathfrak{m}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathfrak{m}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m}"'] & A
\end{tikzcd}$$

associatividade da multiplicação

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[d, "\mathfrak{m}"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\lambda\otimes a \mapsto \lambda a"'] & A & A \otimes k \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[l, "a\lambda \leftarrow\!\shortmid a\otimes\lambda"]
\end{tikzcd}$$

propriedade da unidade

Definição de uma coálgebra

Uma álgebra é definida como uma categoria monoidal (tensor category) da seguinte maneira: $A = (A, \mathfrak{m}, \eta)$ é um espaço vetorial A juntamente com dois mapas lineares $\mathfrak{m} : A \otimes A \to A$, e $\eta : k \to A$, satisfazendo:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l] \\
A \otimes A \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
k \otimes A & A \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & A \otimes k
\end{tikzcd}$$

Definição de uma coálgebra

Uma *coálgebra* $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ é um espaço vetorial C juntamente com dois mapas lineares $\Delta : C \to C \otimes C$, e $\varepsilon : C \to k$, satisfazendo:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

coassociatividade da comultiplicação

$$\begin{tikzcd}
k \otimes C & C \arrow[l, "1 \otimes c \mapsfrom c"'] \arrow[r, "c \mapsto c \otimes 1"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes k \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon_C \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon_C"'] &
\end{tikzcd}$$

propriedade da counidade

Exemplo 1: coálgebra group-like

Seja C um espaço vetorial de dimensão 1 e $\{c\}$ uma base de C. Definimos

$$\Delta(c) = c \otimes c, \quad \varepsilon(c) = 1. \tag{1}$$

Desse modo C é uma coálgebra.

Exemplo 1: coálgebra group-like

Seja C um espaço vetorial de dimensão 1 e $\{c\}$ uma base de C. Definimos

$$\Delta(c) = c \otimes c, \quad \varepsilon(c) = 1. \tag{1}$$

Desse modo C é uma coálgebra.
De fato, toda coálgebra de dimensão 1 é dada dessa forma, pois

$$\Delta(c) = \lambda_1 c \otimes \lambda_2 c = \lambda c \otimes c \Rightarrow \lambda c \otimes \varepsilon(c) \cong c \Rightarrow \varepsilon(c) = \lambda^{-1},$$

logo

$$\Delta(\lambda c) = \lambda \Delta(c) = \lambda c \otimes \lambda c, \quad \varepsilon(\lambda c) = \lambda \varepsilon(c) = \lambda \lambda^{-1} = 1.$$

Exemplo 1: coálgebra group-like

Seja C um espaço vetorial de dimensão 1 e $\{c\}$ uma base de C. Definimos

$$\Delta(c) = c \otimes c, \quad \varepsilon(c) = 1. \tag{1}$$

Desse modo C é uma coálgebra.
De fato, toda coálgebra de dimensão 1 é dada dessa forma, pois

$$\Delta(c) = \lambda_1 c \otimes \lambda_2 c = \lambda c \otimes c \Rightarrow \lambda c \otimes \varepsilon(c) \cong c \Rightarrow \varepsilon(c) = \lambda^{-1},$$

logo

$$\Delta(\lambda c) = \lambda \Delta(c) = \lambda c \otimes \lambda c, \quad \varepsilon(\lambda c) = \lambda \varepsilon(c) = \lambda \lambda^{-1} = 1.$$

De modo geral, se S é um conjunto, definimos a *coálgebra group-like* kS como o espaço vetorial com base S e comultiplicação e counidade dado por (1) para todo elemento da base, estendido por linearidade.

Subcoálgebras e coálgebras cocomutativas

Seja C uma coálgebra.

- Um subespaço vetorial $D \subseteq C$ é uma *subcoálgebra* se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$. Neste caso, $D = (D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ é uma coálgebra;
- C é *simples* se não possui subcoálgebra própria não nula;
- C é cossemissimples se é a soma (direta) de subcoálgebras simples;
- O mapa $T : C \otimes C \to C \otimes C$ dado por $T(a \otimes b) = b \otimes a$ é chamado *twist*;
- A coálgebra *cooposta* de C é $C^{cop} = (C, T\Delta, \varepsilon)$;
- C é *cocomutativa* se $C = C^{cop}$.

Exemplo 2: coálgebra trigonométrica

Seja C um espaço vetorial de dimensão 2 e $\{c, d\}$ uma base de C. Os mapas

$$\begin{aligned} \Delta(c) &= c \otimes c - d \otimes d, \quad \varepsilon(c) = 1; \\ \Delta(d) &= d \otimes c + c \otimes d, \quad \varepsilon(d) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

definem uma coálgebra, conhecida como *coálgebra trigonométrica*.

Exemplo 2: coálgebra trigonométrica

Seja C um espaço vetorial de dimensão 2 e $\{c, d\}$ uma base de C. Os mapas

$$\begin{aligned} \Delta(c) &= c \otimes c - d \otimes d, \quad \varepsilon(c) = 1; \\ \Delta(d) &= d \otimes c + c \otimes d, \quad \varepsilon(d) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

definem uma coálgebra, conhecida como *coálgebra trigonométrica.*

Se não existir a raiz de $\lambda^2 + 1$ em k, então C é uma coálgebra cocomutativa simples. Caso contrário, seja $i = \sqrt{-1}$, então $(c + id)$ e $(c - id)$ são elementos group-like de C.

Exemplo 3: coálgebra das potências divididas

Seja C um espaço vetorial e $\{c_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ uma base de C. Os mapas

$$\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{n-i}, \quad \varepsilon(c_n) = \delta_{0,n}, \tag{3}$$

definem uma coálgebra, conhecida como *coálgebra das potências divididas*.

Exemplo 4: coálgebra matricial

Considere um espaço vetorial de dimensão n^2 e $\{c_{i,j} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ uma base. Os mapas

$$\Delta(c_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} c_{i,l} \otimes c_{l,j}, \quad \varepsilon(c_{i,j}) = \delta_{i,j}, \tag{4}$$

definem uma coálgebra $M^C(n, k)$, conhecida como *coálgebra matricial.*

Exemplo 5: coálgebra matricial triangular superior

Considere o subespaço vetorial $U^C(n,k) \subseteq M^C(n,k)$ gerado por $\{c_{i,j} \mid i \leqslant j\}$. Os mapas

$$\varDelta(c_{i,j}) = \sum_{i \leqslant l \leqslant j} c_{i,l} \otimes c_{l,j}, \quad \varepsilon(c_{i,j}) = \delta_{i,j}, \tag{5}$$

definem uma coálgebra, conhecida como *coálgebra matricial triangular superior*.

Homomorfismos de coálgebras

Considere duas coálgebras C e D. Um mapa linear $\rho : C \to D$ é um *homomorfismo de coálgebras* se satisfaz:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Delta"'] & D \arrow[d, "\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes\rho"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Homomorfismos de coálgebras

Considere duas coálgebras C e D. Um mapa linear $\rho : C \to D$ é um *homomorfismo de coálgebras* se satisfaz:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Delta"'] & D \arrow[d, "\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes\rho"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

- O mapa $\mathrm{id} : C \to C$ é um homomorfismo de coálgebras;
- A imagem homomófica de uma coálgebra é uma subcoálgebra;
- A composição de homomorfismos de coálgebras é um homomorfismo de coálgebras.

Homomorfismos de coálgebras

Considere duas coálgebras C e D. Um mapa linear $\rho : C \to D$ é um *homomorfismo de coálgebras* se satisfaz:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Delta"'] & D \arrow[d, "\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes\rho"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

- O mapa $\mathrm{id} : C \to C$ é um homomorfismo de coálgebras;
- A imagem homomórfica de uma coálgebra é uma subcoálgebra;
- A composição de homomorfismos de coálgebras é um homomorfismo de coálgebras.

Um subespaço $I \subseteq C$ é um *coideal* de C se satisfaz:

$$\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C, \qquad \varepsilon(I) = 0 \tag{6}$$

Teorema dos isomorfismos para coálgebras

Teorema 7 (Sweedler,1969)

Sejam C e D coalgebras, $I \subseteq C$ um coideal, $q : C \to \frac{C}{I}$ a projeção linear canônica e $\rho : C \to D$ um homomorfismo de coálgebras. Então:

1. *o espaço quociente $\frac{C}{I}$ tem uma única estrutura de coálgebra tal que o mapa q é um homomorfismo de coálgebras;*
2. *o $\ker \rho$ é um coideal de C, e;*
3. *se $I \subseteq \ker \rho$, então existe um único homomorfismo de coálgebras $\overline{\rho} : \frac{C}{I} \to D$ tal que:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "q"'] & & D \\ & \frac{C}{I} \arrow[ur, dashed, "\overline{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 6: quocientes da coálgebra matricial

Considere a coálgebra matricial $M^C(2, k)$ e sua base canônica

$$e_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6: quocientes da coálgebra matricial

Considere a coálgebra matricial $M^C(2,k)$ e sua base canônica

$$e_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O mapa $\rho(e_{i,j}) = \begin{cases} e_{i,j}, & \text{se } i \leqslant j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases}$, é um homomorfismo de coálgebras sobrejetor $\rho : M^C(2,k) \to U^C(2,k)$ cujo núcleo $\ker \rho = \langle e_{2,1} \rangle_k$ é o coideal gerado (como espaço vetorial) por $e_{2,1}$.

Exemplo 6: quocientes da coálgebra matricial

Considere a coálgebra matricial $M^C(2,k)$ e sua base canônica

$$e_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O mapa $\rho(e_{i,j}) = \begin{cases} e_{i,j}, & \text{se } i \leqslant j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases}$, é um homomorfismo de coálgebras sobrejetor $\rho : M^C(2,k) \to U^C(2,k)$ cujo núcleo $\ker \rho = \langle e_{2,1} \rangle_k$ é o coideal gerado (como espaço vetorial) por $e_{2,1}$.

O espaço vetorial $I = \langle \{e_{1,1} - e_{2,2}, e_{1,2} + e_{2,1} \rangle_k$ é um coideal de $M^C(2,k)$ e a coálgebra quociente $\frac{M^C(2,k)}{I}$ é isomorfa à coálgebra trigonométrica, cujo isomorfismo é dado por

$$\frac{1}{2}(e_{1,1} + e_{2,2}) \mapsto c, \quad \frac{1}{2}(e_{2,1} - e_{1,2}) \mapsto d.$$

Comódulos: definição e exemplos

Seja C uma coálgebra. Um *C-comódulo à esquerda* $M = (M, \mu)$ é um espaço vetorial M e um mapa linear $\mu : M \to C \otimes M$ tal que:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\
C \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & C \otimes C \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dd, "\mu"] \\
k \otimes M & \\
& C \otimes M \arrow[ul, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}
$$

- $(M, T\mu)$ é um C^{cop}-comódulo à direita;
- (C, Δ) é um comódulo à esquerda (e à direita);
- Um subcomódulo à esquerda de C que também é um subcomódulo à direita é uma subcoálgebra;
- Se $\rho : C \to D$ é um homomorfismo de coálgebras, então $(M, (\rho\otimes\mathrm{id})\mu)$ é um D-comódulo à esquerda;

Teorema fundamental das coálgebras

Theorem 1 (Sweedler, 1969)

Seja C uma coálgebra e considere $X \subseteq C$ um subconjunto finito. Então existe uma subcoálgebra de dimensão finita $D \subseteq C$ que contém X.

Dualidade entre álgebras e coálgebras de dimensão finita

Seja V um espaço vetorial. Denotamos por $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ o espaço dual de V. Existe uma injeção linear

$$\iota : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^* \tag{8}$$

dada por $\iota(e \otimes f)(u \otimes v) = e(u)f(v)$, que é um isomorfismo quando V tem dimensão finita.

Dualidade entre álgebras e coálgebras de dimensão finita

Seja V um espaço vetorial. Denotamos por $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ o espaço dual de V. Existe uma injeção linear

$$\iota : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$$

dada por $\iota(e \otimes f)(u \otimes v) = e(u)f(v)$, que é um isomorfismo quando V tem dimensão finita.

Assim, se C é uma coálgebra, C^* é uma álgebra com multiplicação $\mathfrak{m} = \Delta^*\iota : C^* \otimes C^* \to C^*$ e unidade $\eta = \varepsilon^* : k \to C^*$ dados por:

$$\mathfrak{m}(e \otimes f)(c) = \iota(e \otimes f)(\Delta(c)), \quad \eta(\lambda)(c) = \lambda\varepsilon(c). \tag{8}$$

Dualidade entre álgebras e coálgebras de dimensão finita

Seja V um espaço vetorial. Denotamos por $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ o espaço dual de V. Existe uma injeção linear

$$\iota : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$$

dada por $\iota(e \otimes f)(u \otimes v) = e(u)f(v)$, que é um isomorfismo quando V tem dimensão finita. Assim, se C é uma coálgebra, C^* é uma álgebra com multiplicação $\mathfrak{m} = \Delta^* \iota : C^* \otimes C^* \to C^*$ e unidade $\eta = \varepsilon^* : k \to C^*$ dados por:

$$\mathfrak{m}(e \otimes f)(c) = \iota(e \otimes f)(\Delta(c)), \quad \eta(\lambda)(c) = \lambda\varepsilon(c).$$

Se A é uma álgebra de dimensão finita, então A^* é uma coálgebra de dimensão finita com comultiplicação $\Delta = \mathfrak{m}^* : A^* \to A^* \otimes A^*$ e counidade $\varepsilon = \eta^* : A^* \to k$ dados por

$$\Delta(f)(a \otimes b) = f(\mathfrak{m}(a \otimes b)), \quad \varepsilon(f) = f(\eta(1)). \tag{8}$$

Exemplo 1*: álgebra dual da coálgebra group-like

Considere a coálgebra group-like kS com base $\{s \mid s \in S\}$

$$\Delta(s) = s \otimes s, \quad \varepsilon(s) = 1.$$

Exemplo 1*: álgebra dual da coálgebra group-like

Considere a coálgebra group-like kS com base $\{s \mid s \in S\}$

$$\Delta(s) = s \otimes s, \quad \varepsilon(s) = 1.$$

Suponha S finito e considere a base dual de kS, isto é, $\{s^* \mid s \in S\}$ com $s^*(r) = \delta_{s,r}$ para todo $r \in S$ é uma base de kS^*. A unidade da álgebra dual kS^* é dada por $\eta(1) = \sum_{s \in S} s^*$ e sua multiplicação é dada por

$$\mathfrak{m}(r^* \otimes s^*) = \begin{cases} s^* & \text{se } r = s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Exemplo 2*: álgebra dual da coálgebra trigonométrica

Seja C a coálgebra trigonométrica e $k = \mathbb{R}$.

$$\Delta(c) = c \otimes c - d \otimes d, \quad \varepsilon(c) = 1;$$
$$\Delta(d) = d \otimes c + c \otimes d, \quad \varepsilon(d) = 0,$$

Exemplo 2*: álgebra dual da coálgebra trigonométrica

Seja C a coálgebra trigonométrica e $k = \mathbb{R}$.

$$\Delta(c) = c \otimes c - d \otimes d, \quad \varepsilon(c) = 1;$$
$$\Delta(d) = d \otimes c + c \otimes d, \quad \varepsilon(d) = 0,$$

A álgebra dual C^* tem unidade $\eta(1) = c^*$ e

$$\mathfrak{m}(d^* \otimes d^*) = -c^*.$$

Logo, C^* é a álgebra dos complexos sobre os reais.

Exemplo 3*: álgebra dual da coálgebra de potências

Considere X uma subcoálgebra da coálgebra das potências divididas com base $\{x^n \,|\, 0 \leqslant n \leqslant N\}$, para algum $N \in \mathbb{N}$.

$$\Delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes x^{n-i}, \quad \varepsilon(x^n) = \delta_{0,n},$$

Exemplo 3*: álgebra dual da coálgebra de potências

Considere X uma subcoálgebra da coálgebra das potências divididas com base $\{x^n \,|\, 0 \leqslant n \leqslant N\}$, para algum $N \in \mathbb{N}$.

$$\Delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes x^{n-i}, \quad \varepsilon(x^n) = \delta_{0,n},$$

A unidade da álgebra dual X^* é dada por $\eta(1) = x^{0^*}$ e sua multiplicação é dada por

$$\mathfrak{m}(x^{m*} \otimes x^{n*}) = x^{m+n^*}$$

Logo X^* é a álgebra quociente $\frac{k[x]}{\langle x^{N+1} \rangle}$ da álgebra dos polinômios sobre o ideal gerado por x^{N+1}.

Exemplo 4*: álgebra dual da coálgebra matricial

Considere a coálgebra matricial $M^C(n,k)$ com base $\{e_{i,j} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta(e_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} e_{i,l} \otimes e_{l,j}, \quad \varepsilon(e_{i,j}) = \delta_{i,j},$$

Exemplo 4*: álgebra dual da coálgebra matricial

Considere a coálgebra matricial $M^C(n,k)$ com base $\{e_{i,j} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta(e_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} e_{i,l} \otimes e_{l,j}, \quad \varepsilon(e_{i,j}) = \delta_{i,j},$$

A unidade da álgebra dual $M^C(n,k)^*$ é dada por $\eta(1) = \sum_{i=1}^{n} e_{i,i}^*$ e sua multiplicação é dada por

$$\mathfrak{m}(e_{i,j}^* \otimes e_{r,s}^*) = \begin{cases} e_{i,s}^*, & \text{se } j = r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, $M^C(n,k)^* = M(n,k)$ é a álgebra das matrizes $n \times n$.

Dualidade entre subobjetos e objetos quocientes

Se $\rho : C \to D$ é um homomorfismo de coálgebras, então $\rho^* : D^* \to C^*$ dado por $\rho^*(f)(c) = f(\rho(c))$ é um homomorfismo de álgebras.

Proposição 9 (Dăscălescu, Năstăsescu, Raianu, 2001)

O funtor contravariante $(-)^* : \mathbf{cog} \to \mathbf{alg}$ *é uma dualidade de categorias.*

Em particular existe uma relação entre coideais e subálgebras, subcoálgebras e ideais. Se $V \subseteq C$, então

- V é uma subcoálgebra de $C \iff V^\perp$ é um ideal de C^*;
- V é um coideal de $C \iff V^\perp$ é uma subálgebra de C^*;

onde

$$V^\perp = \{f \in C^* \mid f(x) = 0, \forall x \in V\}$$

Coálgebras como limites direto

Seja C uma coálgebra e considere a família de suas subcoálgebras de dimensão finita $\{C_{(i)}\}_{i\in P}$, indexadas pelo poset dirigido P com ordem parcial dada por $i \leqslant j$ sempre que $C_{(i)} \subseteq C_{(j)}$. Então, C é o limite direto:

$$
\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & \varinjlim C_{(i)} \arrow[u, dashed, "\rho"'] & \\
C_{(j)} \arrow[ur, "\iota_j"] \arrow[uur, bend left, "\rho_j"] \arrow[rr, "\iota_{j,l}"'] & & C_{(l)} \arrow[ul, "\iota_l"'] \arrow[uul, bend right, "\rho_l"']
\end{tikzcd}
\tag{10}
$$

A álgebra dual

Aplicando $(-)^*$ no diagrama (10), obtemos o limite inverso:

$$\begin{tikzcd}
 & D^* \arrow[d, dashed, "\rho^*"] \arrow[ddl, bend right, "\rho_j^*"'] \arrow[ddr, bend left, "\rho_l^*"] & \\
 & \varprojlim C^*_{(i)} \arrow[dl, "\iota_j^*"'] \arrow[dr, "\iota_l^*"] & \\
C^*_{(j)} & & C^*_{(l)} \arrow[ll, "\iota_{j,l}^*"]
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Dualidade entre coálgebras e álgebras pseudocompactas

Uma álgebra pseudocompacta é uma álgebra topológica Hausdorff completa possuindo uma base de vizinhanças (abertas) do 0 que consiste de ideais (bilaterais) cofinitos.

Teorema 12 (Simson, 2007)

O funtor contravariante $(-)^* : \mathbf{Cog} \to \mathbf{Alg}$ *é uma dualidade de categorias.*

O funtor que faz a dualidade no sentido oposto é $(-)^* : \mathbf{Alg} \to \mathbf{Cog}$, tomando o cuidado que $A^* = \mathrm{Hom}(A, k)$ são todas os mapas lineares contínuos, tratando k como um anel topológico com topologia discreta.

A filtração por corradical

O *corradical* C_0 de C é a soma de todas as suas subcoálgebras simples. Defina indutivamente

$$C_n = C_{n-1} \wedge C_0 := \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

A família $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a *filtração pelo corradical* de C e satisfaz:

$$C_n \leqslant C, \quad C_{n-1} \leqslant C_n, \quad C = \bigcup C_n, \quad \Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_{n-i} \otimes C_i.$$

$$C_n = J^{n+1}(C^*)^{\perp}, \qquad C_n^{\perp} = J^{n+1}(C^*).$$

Teorema dual de Wedderburn-Malcev

Seja $\rho : C \to D$ um homomorfismo de coálgebras.
Dizemos que ρ é *filtrado* se $\rho(C_0) \subseteq D_0$. Em particular,

$$\rho \text{ filtrado } \Rightarrow \rho(C_n) \subseteq D_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

C é *cosseparável* se a álgebra dual de cada subcoálgebra simples é separável.

Theorem 2 (Abe, 1980)

Seja C uma coálgebra cosseparável. Então, existe um coideal I tal que $C = C_0 \oplus I$.

Equivalência de Morita-Takeuchi

Teorema 13 (Takeuchi, 1977)

Sejam B e C coálgebras e $E \in {}^{B}\mathcal{M}^{C}$. São equivalentes:

1. *O funtor $-\square_{B} E : \mathcal{M}^{B} \to \mathcal{M}^{C}$ é uma equivalência;*
2. *E é um cogerador injetivo quasi-finito e $B \cong \varinjlim_{i} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^{C}}(E_i, E)\right)^{*}$, onde $\{E_i\}$ é o sistema direto dos subcomódulos de dimensão finita de E.*

Teorema 14 (Chin-Montgomery, 1997)

Existe uma coálgebra básica B tal que B é Morita-Takeuchi equivalente a C.

Uma coálgebra B é básica se a álgebra dual de qualquer subcoálgebra simples é uma álgebra de divisão.

A estrutura das coálgebras potuadas

C é *pontuada* se $S \leqslant C$ simples $\Rightarrow \dim(S) = 1$.

- $\mathrm{G}(C) \coloneqq \{g \in C \mid \Delta(g) = g \otimes g,\ \varepsilon(g) = 1\}$ o conjunto de todos os elementos group-like de C;
- $k\mathrm{G}(C)$ is the *subcoálgebra group-like* de C;
- $\mathrm{P}_{g,h}(C) \coloneqq \{p \in C \mid \Delta(p) = p \otimes g + h \otimes p\}$ o conjunto de todos os *elementos g, h-primitivos*, para $g, h \in \mathrm{G}(C)$;
- $\mathrm{P}_{g,h}(C) = \langle h - g\rangle_k \oplus \mathrm{P}'_{g,h}(C)$; $\overline{\mathrm{P}}_{g,h}(C) = \frac{\mathrm{P}_{g,h}(C)}{\langle h-g\rangle_k}$.

Teorema 15 (Taft-Wilson, 1974)

Seja C uma coálgebra pontuada. Então

$$C_0 = k\mathrm{G}(C); \quad C_1 = k\mathrm{G}(C) \oplus \Big(\bigoplus_{g,h \in \mathrm{G}(C)} \mathrm{P}'_{g,h}(C) \Big).$$

Coálgebras de caminhos

Seja Q um quiver (aljava). A coálgebra de caminhos kQ é o espaço vetorial gerado pelos caminhos de Q com estrutura:

$$\Delta(\alpha) = \sum_{\gamma\beta=\alpha} \gamma \otimes \beta, \qquad \varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\alpha| = 0 \\ 0 & \text{se } |\alpha| > 0 \end{cases}.$$

Exemplos:

$$Q: \; 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3, \qquad Q': \; 4 \circlearrowleft \gamma$$

$$kQ \cong U^C(3,k), \qquad kQ' \cong X$$

Quiver de Gabriel para coálgebras

Seja C pontuada. O *quiver de Gabriel* Q_C de C é dado por:

- $Q_0 = \mathrm{G}(C)$;
- Número de flechas partindo de g e chegando em h é a dimensão de $P'_{g,h}$.

Teorema 16 (Radford, 1982)

Seja C uma coálgebra pontuada. Então existe um mergulho $C \hookrightarrow kQ_C$ tal que $(kQ_C)_1 \subseteq C$.

Coálgebra cotensorial

Sejam $M \in \mathcal{M}^C$ e $N \in {}^C\mathcal{M}$. O produto cotensorial de M e N sobre C é dado por:

$$M \square_C N = \ker(\mathrm{id} \otimes \mu - \nu \otimes \mathrm{id} : M \otimes N \to M \otimes C \otimes N).$$

Seja M um C-bicomódulo. A *coálgebra cotensorial* de C e M é a coálgebra graduada

$$\mathrm{Cot}_C(M) = \bigoplus_{i \geqslant 0} M^{\square_i},$$

onde $M^{\square_0} = C$ e $M^{\square_n} = (M^{\square_{n-1}}) \square_C M$;

Estrutura da coálgebra cotensorial

Sejam $c \in C$ e $m_n \otimes \cdots \otimes m_1 \in M^{\square_n}$, para $n \geqslant 1$. Então

$$\Delta(c) = \Delta_C(c), \qquad \varepsilon(c) = \varepsilon_C(c),$$

$$\begin{aligned}\Delta(m_n \otimes \cdots \otimes m_1) =& \mu(m_n) \otimes (m_{n-1} \otimes \cdots \otimes m_1) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (m_n \otimes \cdots \otimes m_{i+1}) \otimes (m_i \otimes \cdots \otimes m_1) \\ & + (m_n \otimes \cdots \otimes m_2) \otimes \nu(m_1)\end{aligned}$$

e $\varepsilon(m_n \otimes \cdots \otimes m_1) = 0$.

Exemplos de coálgebras cotensoriais

$kQ \cong \mathrm{Cot}_{kQ_0}(VQ_1)$

- kQ_0 é a coálgebra group-like de Q_0;
- VQ_1 é o kQ_0-bicomódulo com estruturas:

$$\mu(a) = t(a) \otimes a, \quad \nu(a) = a \otimes s(a).$$

Lema 17 (Woodcock, 1997)

Se C é cossemisimples, então $\mathrm{Cot}_C(M)$ é graduado pelo corradical, isto é

$$\mathrm{Cot}_C(M)_n = \bigoplus_{i \leqslant n} M^{\square i}.$$

Propriedade universal da coálgebra cotensorial

Proposição 18 (Nichols, 1978)

Seja $\rho_0 : D \to C$ *um homomorfismo de coálgebras e* $\rho_1 : D \to M$ *um homomorfismo de* C*-bicomódulos tal que* $\rho_1(D_0) = 0$. *Existe um único homomorfismo de coálgebras* $\rho : D \to \mathrm{Cot}_C(M)$ *satisfazendo:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Cot}_C(M) \arrow[d, "\pi_0"] \\
D \arrow[ur, dashed, "\rho"] \arrow[r, "\rho_0"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Cot}_C(M) \arrow[d, "\pi_1"] \\
D \arrow[ur, dashed, "\rho"] \arrow[r, "\rho_1"'] & M
\end{tikzcd}
$$

Categorias

Denote por k-**Quiv** a categoria de k-quivers:

- $VQ \in k\text{-}\mathbf{Quiv}$, $VQ = (VQ_0, VQ_{e,f})$;
- $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Quiv}}(VQ, VR)$, $\varphi = (\varphi_0, \varphi_{e,f})$:
  - $\varphi_0 : VQ_0 \to VR_0$;
  - $\varphi_{e,f} : VQ_{e,f} \to VR_{\varphi_0(e),\varphi_0(f)}$

Denote por **PCog** a categoria de coálgebras pontuadas.

- $C \in \mathbf{PCog}$:
- $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PCog}}(C, D)$
  - $\rho(C_n) \subset D_n$
  - $\rho(\mathrm{G}(C)) \subset \mathrm{G}(D)$
  - $\rho(\mathrm{P}_{g,h}(C)) \subset \mathrm{P}_{\rho(g),\rho(h)}(D)$

Funtor coálgebras de caminhos

Para cada $VQ \in k$-**Quiv**, defina:

- $\Sigma_Q := kVQ_0$,
- $V_Q := \bigoplus_{e,f \in VQ_0} VQ_{e,f}$,

- $m \in VQ_{e,f}$,
- $\mu(m) = f \otimes m$,
- $\nu(m) = m \otimes e$,

e, dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Quiv}}(VQ, VR)$, considere os homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cot}_{\Sigma_Q}(V_Q) \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, "\pi_0"'] & \mathrm{Cot}_{\Sigma_R}(V_R) \arrow[d, "\pi_0'"] \\ \Sigma_Q \arrow[r, "\varphi_0"'] & \Sigma_R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Cot}_{\Sigma_Q}(V_Q) \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathrm{Cot}_{\Sigma_R}(V_R) \arrow[d, "\pi_1'"] \\ V_Q \arrow[r, "\varphi_1"'] & V_R \end{tikzcd}$$

Funtor quiver de Gabriel

Para cada $C \in \mathbf{PCog}$, defina:

- $VQ_0 := \mathrm{G}(C)$,
- $VQ_{g,h} := \overline{\mathrm{P}}_{g,h}(C)$,

e, dado $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PCog}}(C, D)$, considere as restrições:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \mathrm{G}(C) &\to \mathrm{G}(D), \\ g &\mapsto \rho(g) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_{g,h} : \overline{\mathrm{P}}_{g,h}(C) &\to \overline{\mathrm{P}}_{\varphi_0(g),\varphi_0(h)}(D), \\ \overline{p} &\mapsto \overline{\rho(p)} \end{aligned}$$

Funtores

Proposição 19 (Iusenko, MacQuarrie, Q., 2020)

Os mapas

$$k[(VQ_0, VQ_{e,f})] = \mathrm{Cot}_{\Sigma_Q}(V_Q), \qquad \mathrm{GQ}(C) = (\mathrm{G}(C), \bar{\mathrm{P}}_{g,h}(C))$$

definem funtores (covariantes)

$$k[-] : k\text{-}\mathbf{Quiv} \to \mathbf{PCog}, \qquad \mathrm{GQ}(-) : \mathbf{PCog} \to k\text{-}\mathbf{Quiv}$$

Observação sobre morfismos

Considere a coálgebra de caminhos do quiver

$$Q: \begin{tikzcd} 3 & & 1, \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ & 2 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd}$$

com base $\{e_1, e_2, e_3, a, b, c, cb\}$, e os automorfismos de kQ:

$$\rho(\omega) = \begin{cases} a + (e_3 - e_1) & \text{se } \omega = a \\ \omega & \text{se } \omega \neq a \end{cases}, \quad \gamma(\omega) = \begin{cases} cb + a & \text{se } \omega = cb \\ \omega & \text{se } \omega \neq cb \end{cases}.$$

Assim, $\mathrm{GQ}(\rho) = \mathrm{GQ}(\mathrm{id}) = \mathrm{GQ}(\gamma)$.

Categoria quociente

Dados $\rho, \gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PCog}}(C, D)$, escreva $\rho \sim \gamma$ se

$$(\rho - \gamma)(C_0) = 0, \qquad (\rho - \gamma)(C_1) \subset D_0.$$

Proposição 20 (Iusenko, MacQuarrie, Q., 2020)

- $\sim$ *define uma relação de equivalência;*
- $\rho \sim \gamma \Rightarrow (\rho - \gamma)(C_n) \subseteq D_{n-1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
- *o funtor projeção* $\Pi : \mathbf{PCog} \to {}^{\mathbf{PCog}}\!/\!_{\sim} =: \mathbf{PCog}_{\sim}$ *reflete isomorfismos e preserva monomorfismos.*

A relação $\sim$ induz funtores $\widetilde{k}[-] : k\text{-}\mathbf{Quiv} \to \mathbf{PCog}_{\sim}$ e $\widetilde{\mathrm{GQ}}(-) : \mathbf{PCog}_{\sim} \to k\text{-}\mathbf{Quiv}$.

Teorema principal

Teorema 21 (Iusenko, MacQuarrie, Q., 2020)

O funtor $\widetilde{k}[-] : k\text{-}\mathbf{Quiv} \to \mathbf{PCog}_{\sim}$ *é adjunto à direita do funtor* $\widetilde{\mathrm{GQ}}(-) : \mathbf{PCog}_{\sim} \to k\text{-}\mathbf{Quiv}$.

Ideia da prova

Apresentamos a unidade da adjunção $\mathcal{H}_C^{s,t} : C \to \widetilde{k}[\widetilde{\mathrm{GQ}}(C)]$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Cot}_{C_0}\left(\frac{C_1}{C_0}\right) \arrow[d, "\pi_0"] \\ C \arrow[ur, dashed, "\mathcal{H}_C^{s,t}"] \arrow[r, "s"'] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{Cot}_{C_0}\left(\frac{C_1}{C_0}\right) \arrow[d, "\pi_1"] \\ C \arrow[ur, dashed, "\mathcal{H}_C^{s,t}"] \arrow[r, "qt"'] & \frac{C_1}{C_0} \end{tikzcd}$$

e a counidade da adjunção $\mathcal{E}_{VQ} : \widetilde{\mathrm{GQ}}(\widetilde{k}[VQ]) \to VQ$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cot}_\Sigma(V)_1 \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \frac{\mathrm{Cot}_\Sigma(V)_1}{\Sigma} \arrow[r, dashed, "\mathcal{E}_{(\Sigma,V)_1}"'] & V \end{tikzcd}$$

Adjunção contravariante para álgebras pseudocompactas

Teorema 22 (Iusenko, MacQuarrie, Q., 2020)

A composição dos funtores

$$k\text{-}\mathbf{Quiv} \underset{\widetilde{\mathrm{GQ}}(-)}{\overset{\widetilde{k}[-]}{\rightleftarrows}} \mathbf{PCog}_{\sim} \underset{(-)^*}{\overset{(-)^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{PAlg}_{\sim}$$

é uma adjunção à esquerda.

Adjunção covariante para álgebras pseudocompactas

Teorema 23 (Iusenko, MacQuarrie, Q., 2020)

O diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ParCog} \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, leftrightarrow, "(-)^*"'] & k\text{-}\mathbf{Quiv} \arrow[r, shift left, "\widetilde{k}[-]"] & \mathbf{PCog}_{\sim} \arrow[l, shift left, "\widetilde{\mathrm{GQ}}(-)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(-)^*"] \\
\mathbf{ParAlg} \arrow[rr, shift left, "T[\![-]\!]"] & & \mathbf{PAlg}_{\sim} \arrow[ll, shift left, "G[\![-]\!]"]
\end{tikzcd}$$

mostra que o funtor $T[\![-]\!]$ *é adjunto à esquerda do funtor* $G[\![-]\!]$.

Agradecimentos

Agradeço pela atenção!

quirino@ime.usp.br