Dimensões Homológicas I

Roger R Primolan

Study seminar RTAG, IME-USP

São Paulo, 08 de outubro de 2021.

Tópicos

1. História, Motivação e Revisão
   - Classificações clássicas.
   - Noções de Homologia
2. Resultados Técnicos
   - Idempotentes
   - Álgebra Envolvente
   - Dimensões Homológicas para Álgebras de Dimensão Finita
3. Principal Resultado
   - Aplicação

Burocracias

Aqui sempre pensarei que $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado e as álgebras que aparecem são $\mathbb{K}$-álgebras unitais, associativas, conexas, básicas e de dimensão finita. Todos os módulos sobre A são unitais. Os tensores $\otimes$ são sempre $\otimes_{\mathbb{K}}$.

Table of Contents

Caso I: Semissimples

Um dos primeiros resultados de classificação de álgebras é para as álgebras *semissimples*.

Caso I: Semissimples

Um dos primeiros resultados de classificação de álgebras é para as álgebras *semissimples*. Através dos trabalhos de *Emil Artin* (1898-1962) e *Joseph Wedderburn* (1882-1948), realizados em 1907 e 1927, sabemos que essas álgebras, no nosso contexto, são somas de matrizes com entradas em $\mathbb{K}$:

$$A \cong M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{K}).$$

Nota: aqui não é necessário supor que a álgebra é básica.

Figure: Emil Artin (1898-1962)

Figure: Joseph Wedderburn (1882-1948)

Caso II: Hereditário.

Outro teorema de classificação de álgebras é o para álgebras *hereditárias* básicas.

Caso II: Hereditário.

Outro teorema de classificação de álgebras é o para álgebras *hereditárias* básicas. Estas são álgebras de caminhos:

$$A \cong \mathbb{K}Q_A,$$

onde Q_A é a *aljava de Gabriel (ordinária)* de A.

Caso II: Hereditário.

Outro teorema de classificação de álgebras é o para álgebras *hereditárias* básicas. Estas são álgebras de caminhos:

$$A \cong \mathbb{K}Q_A,$$

onde Q_A é a *aljava de Gabriel (ordinária)* de A. Em 1972, *Peter Gabriel* (1933-2015), classifica as álgebras hereditárias básicas de tipo de representação finito, elas correspondem aos *diagramas de Dynkin* de tipo A, D e E.

Figure: Peter Gabriel (1933-2015)

Relação com Homologia

- Uma álgebra A é *semissimples* quando todo A-módulo M é *projetivo*.

- Uma álgebra B é *hereditária* quando todo submódulo de um B-módulo projetivo é projetivo.

Relação com Homologia

- Uma álgebra A é *semissimples* quando todo A-módulo M é *projetivo*.

- $0 \to P_0 = M \to M \to 0.$

- Uma álgebra B é *hereditária* quando todo submódulo de um B-módulo projetivo é projetivo.

- $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$

Relação com Homologia

- Uma álgebra A é *semissimples* quando todo A-módulo M é *projetivo*.

- $0 \to P_0 = M \to M \to 0.$

- Uma álgebra B é *hereditária* quando todo submódulo de um B-módulo projetivo é projetivo.

- $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$

Isso nos dá a interpretação que uma categoria de módulos sobre um anel é tão *complicada* quanto as aproximações de seus módulos por módulos projetivos.

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A-módulo M definimos:

1. a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A-módulo e denotada $\operatorname{pd}_A M$.

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A-módulo M definimos:

1. a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A-módulo e denotada $\operatorname{pd}_A M$.
2. a *dimensão global* é o supremo das dimensões projetivas dos A-módulos e é denotada gldim(A).

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A-módulo M definimos:

1. a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A-módulo e denotada $\operatorname{pd}_A M$.
2. a *dimensão global* é o supremo das dimensões projetivas dos A-módulos e é denotada $\operatorname{gldim}(\mathrm{A})$.

Moralmente: a dimensão projetiva de um módulo mede o quão longe de projetivo ele é, já a dimensão global de uma álgebra mede o quão complicada ela é.

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A-módulo M definimos:

1. a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A-módulo e denotada $\operatorname{pd}_A M$.
2. a *dimensão global* é o supremo das dimensões projetivas dos A-módulos e é denotada gldim(A).

Moralmente: a dimensão projetiva de um módulo mede o quão longe de projetivo ele é, já a dimensão global de uma álgebra mede o quão complicada ela é.

Exemplos:

- Se P é um A-módulo projetivo, então $\operatorname{pd}_A P = 0$. Em particular, se A é semissimples, então $\operatorname{gldim}(A) = 0$.
- Se A é hereditária, então $\operatorname{pd}_A M \leqq 1$, para todo A-módulo M. Em particular, $\operatorname{gldim}(A) \leqq 1$.

Table of Contents

Idempotentes

1. Dada uma álgebra A, um **s**istema **c**ompleto de **i**dempotentes **o**rtogonais e **p**rimitivos é um conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $1 = \sum e_i$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ e que é maximal para essas duas condições.

Idempotentes

1. Dada uma álgebra A, um **s**istema **c**ompleto de **i**dempotentes **o**rtogonais e **p**rimitivos é um conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $1 = \sum e_i$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ e que é maximal para essas duas condições.
2. Do ponto de vista algébrico usamos o *sciop* para encontrar, a menos de isomorfismo, os *projetivos irredutíveis* na categoria dos A-módulos. Eles são:

$$P[i] \doteq Ae_i, 1 \leqq i \leqq n.$$

Idempotentes

1. Dada uma álgebra A, um **s**istema **c**ompleto de **i**dempotentes **o**rtogonais e **p**rimitivos é um conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $1 = \sum e_i$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ e que é maximal para essas duas condições.
2. Do ponto de vista algébrico usamos o *sciop* para encontrar, a menos de isomorfismo, os *projetivos irredutíveis* na categoria dos A-módulos. Eles são:
$$P[i] \doteq Ae_i, 1 \leqq i \leqq n.$$
3. Com esses podemos considerar os módulos simples na categoria dos A-módulos. Eles são:
$$S[i] \doteq \operatorname{top} P[i] = \frac{P[i]}{\operatorname{rad} P[i]},\ 1 \leqq i \leqq n.$$

Exemplo

Considere a aljava Q

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "b"] & \\
1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"]
\end{tikzcd}$$

Para a álgebra A que é o quociente de $\mathbb{K}Q$ pelo ideal $I = \langle ba, cb \rangle$ os simples são:

$S[1]:$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & \\
\mathbb{K}e_1 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

$S[2]:$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}e_2 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

$S[3]:$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & \mathbb{K}e_3 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Exemplo

E os projetivos irredutíveis são

$$P[1] : \begin{tikzcd} & \mathbb{K}a \arrow[dr] & \\ \mathbb{K}e_1 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll] \end{tikzcd} \qquad P[2] : \begin{tikzcd} & \mathbb{K}e_2 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & \mathbb{K}b \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

$$P[3] : \begin{tikzcd} & \mathbb{K}(ac) \arrow[dr, "0"] & \\ \mathbb{K}c \arrow[ur] & & \mathbb{K}e_3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

1. A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
2. A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.

Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

1. A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
2. A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.
3. Essas duas estruturas satisfazem a seguinte propriedade: dados $a, b, c \in A$

$$a \circ b^{op}(c) = a(cb) = acb = b^{op}(ac) = b^{op} \circ a(c).$$

Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

1. A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
2. A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.
3. Essas duas estruturas satisfazem a seguinte propriedade: dados $a, b, c \in A$

$$a \circ b^{op}(c) = a(cb) = acb = b^{op}(ac) = b^{op} \circ a(c).$$

Duas estruturas de A-módulo, uma de cada lado, em um espaço vetorial M que satisfazem (3) formam uma estrutura de A, A-*bimódulo* para M.

Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

1. A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
2. A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.
3. Essas duas estruturas satisfazem a seguinte propriedade: dados $a, b, c \in A$

$$a \circ b^{op}(c) = a(cb) = acb = b^{op}(ac) = b^{op} \circ a(c).$$

Duas estruturas de A-módulo, uma de cada lado, em um espaço vetorial M que satisfazem (3) formam uma estrutura de A, A-*bimódulo* para M. Como os A-módulos à direita são A^{op}-módulos à esquerda, podemos reinterpretar os A, A-bimódulos como $A^e = A \otimes A^{op}$-módulos à esquerda.

Álgebra Envolvente II

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um *sciop* para A, então

$$\{e_i \otimes e_j \mid 1 \leqq i, j \leqq n\}$$

é um *sciop* para $A^e \doteq A \otimes A^{\mathrm{op}}$. Denotamos

$$P[i,j] \doteq A^e(e_i \otimes e_j) \qquad \text{e} \qquad S[i,j] \doteq \operatorname{top} P[i,j] \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j]).$$

Álgebra Envolvente II

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um *sciop* para A, então

$$\{e_i \otimes e_j \mid 1 \leqq i, j \leqq n\}$$

é um *sciop* para $A^e \doteq A \otimes A^{\mathrm{op}}$. Denotamos

$$P[i,j] \doteq A^e(e_i \otimes e_j) \qquad \text{e} \qquad S[i,j] \doteq \operatorname{top} P[i,j] \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j]).$$

Existe um resultado que permite encontrar qual é a álgebra envolvente para uma álgebra de caminhos. Na verdade esse resultado é mais geral e serve para alguns quocientes por ideais de duas álgebras de caminhos, esse resultado mais geral pode ser encontrado em [Ska11, Proposição 2.4], aqui apenas falarei do resultado que nos interessa.

Álgebra Envolvente III

Lemma

[Ska11, Proposição 2.2] Sejam Q e R duas aljavas finitas, então

$$\mathbb{K}Q \otimes \mathbb{K}R \cong \frac{\mathbb{K}(Q \times R)}{\kappa(Q, R)},$$

onde $\kappa(Q, R) \doteq \{\alpha\beta - \beta\alpha \mid \alpha \in Q, \beta \in R\}$ e $Q \times R$ é a aljava cujos vértices são $Q_0 \times Q_1$ e flechas $(Q_1 \times R_0) \cup (Q_0 \times R_1)$.

Álgebra Envolvente III

Lemma

[Ska11, Proposição 2.2] Sejam Q e R duas aljavas finitas, então

$$\mathbb{K}Q \otimes \mathbb{K}R \cong \frac{\mathbb{K}(Q \times R)}{\kappa(Q, R)},$$

onde $\kappa(Q, R) \doteq \{\alpha\beta - \beta\alpha \mid \alpha \in Q, \beta \in R\}$ e $Q \times R$ é a aljava cujos vértices são $Q_0 \times Q_1$ e flechas $(Q_1 \times R_0) \cup (Q_0 \times R_1)$.

A pergunta natural agora é: Que?!

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido.

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido. A resposta é positiva e esta resolução é chamada de *resolução projetiva minimal.*

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido. A resposta é positiva e esta resolução é chamada de *resolução projetiva minimal.*

1. Uma *cobertura projetiva* para um A-módulo M é um epimorfismo

$$h : P \longrightarrow M$$

tal que P é projetivo e o homomorfismo induzido

$$\bar{h} : \operatorname{top} P \longrightarrow \operatorname{top} M$$

é um isomorfismo.

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido. A resposta é positiva e esta resolução é chamada de *resolução projetiva minimal.*

1. Uma *cobertura projetiva* para um A-módulo M é um epimorfismo

$$h : P \longrightarrow M$$

   tal que P é projetivo e o homomorfismo induzido

$$\bar{h} : \operatorname{top} P \longrightarrow \operatorname{top} M$$

   é um isomorfismo.

2. Uma *resolução projetiva minimal* é uma resolução projetiva tal que cada

$$d_n : P_n \longrightarrow \operatorname{Im}(d_n)$$

   é uma cobertura projetiva.

Equivalências Homológicas

O legal de estudar dimensões homológicas para álgebras de dimensão finita - esta última dimensão é a de espaço vetorial - é que podemos nos restringir aos módulos simples. Vejamos como isso acontece:

1. A dimensão global de uma álgebra de dimensão finita é o supremo da dimensão projetiva de seus módulos simples.

Equivalências Homológicas

O legal de estudar dimensões homológicas para álgebras de dimensão finita - esta última dimensão é a de espaço vetorial - é que podemos nos restringir aos módulos simples. Vejamos como isso acontece:

1. A dimensão global de uma álgebra de dimensão finita é o supremo da dimensão projetiva de seus módulos simples.
2. Para um A-módulo M são equivalentes:
   1. $\operatorname{pd}_A M \leq n$.
   2. $\operatorname{Ext}^{n+1}(M, S) = 0$, para todos os módulos simples.
   3. A resolução projetiva minimal para M tem comprimento no máximo n.

Equivalências Homológicas

O legal de estudar dimensões homológicas para álgebras de dimensão finita - esta última dimensão é a de espaço vetorial - é que podemos nos restringir aos módulos simples. Vejamos como isso acontece:

1. A dimensão global de uma álgebra de dimensão finita é o supremo da dimensão projetiva de seus módulos simples.
2. Para um A-módulo M são equivalentes:
    1. $\operatorname{pd}_A M \leqq n$.
    2. $\operatorname{Ext}^{n+1}(M, S) = 0$, para todos os módulos simples.
    3. A resolução projetiva minimal para M tem comprimento no máximo n.

Juntando essas duas informações acima, vemos que podemos descobrir a dimensão global de uma álgebra olhando apenas para os grupos $\operatorname{Ext}^n_A(S, S')$ com S e S' A-módulos simples.

Exemplo I

Para $A_1 = k[x]/\langle x^2 \rangle$ a seguinte sequência exata é uma resolução projetiva minimal para S[1] (o único simples):

$$\cdots \to P[1] \to P[1] \to P[1] \to \mathbb{K} = S[1] \to 0.$$

Exemplo II

Considere a aljava $Q: \ 1 \xrightarrow{a} 2$. E considere $A_2 = \mathbb{K}Q$, então seus projetivos irredutíveis são: $P[1]: \ \mathbb{K}e_1 \longrightarrow \mathbb{K}a$ e $P[1]: \ 0 \longrightarrow \mathbb{K}e_2$. Com esses dados conseguimos calcular:

$$0 \longleftarrow S[1] \longleftarrow$$

$$0 \longleftarrow S[2] \longleftarrow$$

Exemplo III

Considere a aljava Q

$$
\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "b"] & \\
1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"]
\end{tikzcd}
$$

Para a álgebra A_3 que é o quociente de $\mathbb{K}Q$ pelo ideal $I = \langle ba, cb \rangle$ os projetivos irredutíveis são

$$
P[1] : \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}a \arrow[dr] & \\
\mathbb{K}e_1 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}
\qquad
P[2] : \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}e_2 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & \mathbb{K}b \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

$$
P[3] : \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}(ac) \arrow[dr, "0"] & \\
\mathbb{K}c \arrow[ur] & & \mathbb{K}e_3 \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

Exemplo III

Conseguimos calcular as seguinte resoluções projetivas minimais:

$$0 \longleftarrow S[1] \longleftarrow$$

$$0 \longleftarrow S[2] \longleftarrow$$

$$0 \longleftarrow S[3] \longleftarrow$$

Exemplo IV

Agora a aljava Q é

$$\begin{tikzcd}
 & 4 & \\
2 \arrow[ur, "b"] & & 3 \arrow[ul, "d"'] \\
 & 1 \arrow[ul, "a"] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

A álgebra é $A_4 = \mathbb{K}Q/I$, onde $I = \langle ba - dc \rangle$. Os projetivos irredutíveis são

Table of Contents

Resolução Projetiva Minimal para A como A^e-módulo I

Lemma

[Hap89, Lema da seção 1.5] Seja

$$\cdots R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal para A como A^e-módulo. Então

$$R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{\dim \operatorname{Ext}^n_A(S[i],S[j])}.$$

Ideia da demonstração:

1. Escreva $R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{r_{ij}}$, pois estes são os projetivos indecomponíveis de A^e-**mod**.
2. Aplique o funtor $\operatorname{Hom}_{A^e}(-, S[i,j])$.
3. Note que os diferenciais do novo complexo são nulos - ocorre pois a resolução é minimal.

Resolução Projetiva Minimal para A como A^e-módulo II

4. Segue o cômputo

$$
\begin{aligned}
r_{ij} &= \dim \operatorname{Ext}^n_{A^e}(A, S[i,j]) = \dim \operatorname{Ext}^n_{A^e}(A, \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j])) \\
&= \dim H^n(A, \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j])) = \dim \operatorname{Ext}^n_A(S[i], S[j]).
\end{aligned}
$$

Dimensão Global e Dimensão Projetiva

Corollary

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de dimensão finita, então

$$\mathrm{pd}_{A^e} A = \mathrm{gldim}(A).$$

Demonstração: Usando a resolução minimal que obtivemos, isto é, o n-ésimo termo dela é dado por

$$R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{\dim \mathrm{Ext}_A^n(S[i],S[j])}$$

temos o seguinte cômputo

$$\begin{aligned} pd_{A^e} A &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid R_n \neq 0\} \\ &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_A^n(S[i],S[j]) \neq 0\} = \mathrm{gldim}(A). \quad \square \end{aligned}$$

Dimensão Global e Dimensão Projetiva

Corollary

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra de dimensão finita, então

$$\mathrm{pd}_{A^e} A = \mathrm{gldim}(A).$$

Demonstração: Usando a resolução minimal que obtivemos, isto é, o n-ésimo termo dela é dado por

$$R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{\dim \mathrm{Ext}_A^n(S[i],S[j])}$$

temos o seguinte cômputo

$$\begin{aligned} pd_{A^e} A &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid R_n \neq 0\} \\ &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_A^n(S[i],S[j]) \neq 0\} = \mathrm{gldim}(A). \quad \square \end{aligned}$$

Isso nos diz, moralmente, que A é tão complicado como A^e-módulo quanto o é como álgebra.

Exemplo

- Se A é uma álgebra de caminhos conexa com $J(A) \neq 0$, então $\operatorname{pd}_{A^e} A = 1$.
- Se $A = M_n(\mathbb{K})$, então $pd_{M_n(\mathbb{K})^e} M_n(\mathbb{K}) = 0$.

Exemplo

- Se A é uma álgebra de caminhos conexa com $J(A) \neq 0$, então $\operatorname{pd}_{A^e} A = 1$.
- Se $A = M_n(\mathbb{K})$, então $pd_{M_n(\mathbb{K})^e} M_n(\mathbb{K}) = 0$.
- Lembrando que A_1 é a álgebra dual temos $\operatorname{pd}_{A_1^e} A_1 = \infty$.
- $\operatorname{pd}_{A_3^e} A_3 = 3$.

Exemplo

- Se A é uma álgebra de caminhos conexa com $J(A) \neq 0$, então $\operatorname{pd}_{A^e} A = 1$.
- Se $A = M_n(\mathbb{K})$, então $pd_{M_n(\mathbb{K})^e} M_n(\mathbb{K}) = 0$.
- Lembrando que A_1 é a álgebra dual temos $\operatorname{pd}_{A_1^e} A_1 = \infty$.
- $\operatorname{pd}_{A_3^e} A_3 = 3$.
- Lembrando que $A_2^e = A_4$, vale que $\operatorname{pq}_{A_4} A_2 = 1$, apesar de que $\operatorname{gldim}(A_4) = 2$

Figure: Dieter Happel (1953-2012)

Obrigado pela atenção! Dúvidas?

William Crawley-Boevey.
Noncommutative algebra 2: Representations of finite-dimensional algebras.

Dieter Happel.
Hochschild cohomology of finite—dimensional algebras.
In *Séminaire d'Algebre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin*, pages 108–126. Springer, 1989.

Øystein Ingmar Skartsæterhagen.
Quivers and admissible relations of tensor products and trivial extensions.
Master's thesis, Institutt for matematiske fag, 2011.