

Dimensões Homológicas I

Roger R Primolan

Study seminar RTAG, IME-USP

São Paulo, 08 de outubro de 2021.

Tópicos

1 História, Motivação e Revisão

- Classificações clássicas.
- Noções de Homologia

2 Resultados Técnicos

- Idempotentes
- Álgebra Envolvente
- Dimensões Homológicas para Álgebras de Dimensão Finita

3 Principal Resultado

- Aplicação

Burocracias

Aqui sempre pensarei que \mathbb{K} é um corpo algebricamente fechado e as álgebras que aparecem são \mathbb{K} -álgebras unitais, associativas, conexas, básicas e de dimensão finita. Todos os módulos sobre A são unitais. Os tensores \otimes são sempre $\otimes_{\mathbb{K}}$.

Table of Contents

1 História, Motivação e Revisão

- Classificações clássicas.
- Noções de Homologia

2 Resultados Técnicos

- Idempotentes
- Álgebra Envolvente
- Dimensões Homológicas para Álgebras de Dimensão Finita

3 Principal Resultado

- Aplicação

Caso I: Semissimples

Um dos primeiros resultados de classificação de álgebras é para as álgebras *semissimples*.

Caso I: Semissimples

Um dos primeiros resultados de classificação de álgebras é para as álgebras *semissimples*. Através dos trabalhos de *Emil Artin* (1898-1962) e *Joseph Wedderburn* (1882-1948), realizados em 1907 e 1927, sabemos que essas álgebras, no nosso contexto, são somas de matrizes com entradas em \mathbb{K} :

$$A \cong M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{K}).$$

Nota: aqui não é necessário supor que a álgebra é básica.



Figure: Emil Artin (1898-1962)



Figure: Joseph Wedderburn (1882-1948)

Caso II: Hereditário.

Outro teorema de
classificação de álgebras é o
para álgebras *hereditárias*
básicas.

Caso II: Hereditário.

Outro teorema de classificação de álgebras é o para álgebras *hereditárias* básicas. Estas são álgebras de caminhos:

$$A \cong \mathbb{K}Q_A,$$

onde Q_A é a *aljava de Gabriel* (*ordinária*) de A .

Caso II: Hereditário.

Outro teorema de classificação de álgebras é o para álgebras *hereditárias* básicas. Estas são álgebras de caminhos:

$$A \cong \mathbb{K}Q_A,$$

onde Q_A é a *aljava de Gabriel* (*ordinária*) de A . Em 1972, *Peter Gabriel* (1933-2015), classifica as álgebras hereditárias básicas de tipo de representação finito, elas correspondem aos *diagramas de Dynkin* de tipo A , D e E .



Figure: Peter Gabriel (1933-2015)

Relação com Homologia

- Uma álgebra A é *semisimples* quando todo A -módulo M é *projetivo*.

- Uma álgebra B é *hereditária* quando todo submódulo de um B -módulo projetivo é projetivo.

Relação com Homologia

- Uma álgebra A é *semisimples* quando todo A -módulo M é *projetivo*.

- Uma álgebra B é *hereditária* quando todo submódulo de um B -módulo projetivo é projetivo.

- $0 \rightarrow P_0 = M \rightarrow M \rightarrow 0.$

- $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$

Relação com Homologia

- Uma álgebra A é *semisimples* quando todo A -módulo M é *projetivo*.

- $0 \rightarrow P_0 = M \rightarrow M \rightarrow 0.$

- Uma álgebra B é *hereditária* quando todo submódulo de um B -módulo projetivo é projetivo.

- $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$

Isso nos dá a interpretação que uma categoria de módulos sobre um anel é tão *complicada* quanto as aproximações de seus módulos por módulos projetivos.

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A -módulo M definimos:

- 1 a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A -módulo e denotada $\text{pd}_A M$.

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A -módulo M definimos:

- 1 a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A -módulo e denotada $\text{pd}_A M$.
- 2 a *dimensão global* é o supremo das dimensões projetivas dos A -módulos e é denotada $\text{gldim}(A)$.

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A -módulo M definimos:

- 1 a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A -módulo e denotada $\text{pd}_A M$.
- 2 a *dimensão global* é o supremo das dimensões projetivas dos A -módulos e é denotada $\text{gldim}(A)$.

Moralmente: a dimensão projetiva de um módulo mede o quão longe de projetivo ele é, já a dimensão global de uma álgebra mede o quão complicada ela é.

Dimensões Homológicas

Dado uma álgebra A e um A -módulo M definimos:

- 1 a *dimensão projetiva* de M em relação a A é o mínimo dos tamanhos das resoluções projetivas de M como A -módulo e denotada $\text{pd}_A M$.
- 2 a *dimensão global* é o supremo das dimensões projetivas dos A -módulos e é denotada $\text{gldim}(A)$.

Moralmente: a dimensão projetiva de um módulo mede o quão longe de projetivo ele é, já a dimensão global de uma álgebra mede o quão complicada ela é.

Exemplos:

- Se P é um A -módulo projetivo, então $\text{pd}_A P = 0$. Em particular, se A é semissimples, então $\text{gldim}(A) = 0$.
- Se A é hereditária, então $\text{pd}_A M \leq 1$, para todo A -módulo M . Em particular, $\text{gldim}(A) \leq 1$.

Table of Contents

1 História, Motivação e Revisão

- Classificações clássicas.
- Noções de Homologia

2 Resultados Técnicos

- Idempotentes
- Álgebra Envolvente
- Dimensões Homológicas para Álgebras de Dimensão Finita

3 Principal Resultado

- Aplicação

Idempotentes

- 1 Dada uma álgebra A , um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos é um conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $1 = \sum e_i$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ e que é maximal para essas duas condições.

Idempotentes

- 1 Dada uma álgebra A , um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos é um conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $1 = \sum e_i$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ e que é maximal para essas duas condições.
- 2 Do ponto de vista algébrico usamos o *scioP* para encontrar, a menos de isomorfismo, os *projetivos irredutíveis* na categoria dos A -módulos. Eles são:

$$P[i] \doteq Ae_i, 1 \leq i \leq n.$$

Idempotentes

- 1 Dada uma álgebra A , um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos é um conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $1 = \sum e_i$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ e que é maximal para essas duas condições.
- 2 Do ponto de vista algébrico usamos o *sciop* para encontrar, a menos de isomorfismo, os *projetivos irredutíveis* na categoria dos A -módulos. Eles são:

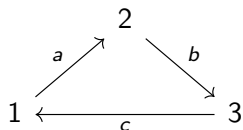
$$P[i] \doteq Ae_i, 1 \leq i \leq n.$$

- 3 Com esses podemos considerar os módulos simples na categoria dos A -módulos. Eles são:

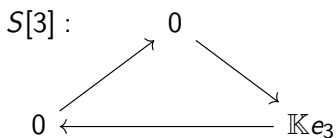
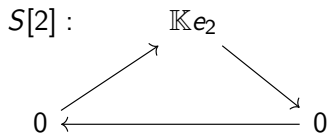
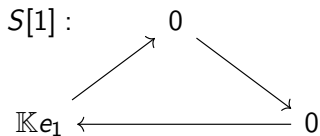
$$S[i] \doteq \text{top } P[i] = \frac{P[i]}{\text{rad } P[i]}, 1 \leq i \leq n.$$

Exemplo

Considere a aljava Q

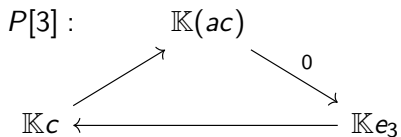
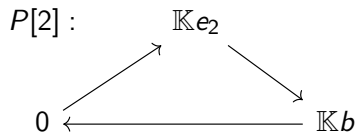
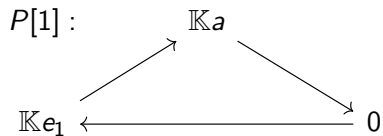


Para a álgebra A que é o quociente de $\mathbb{K}Q$ pelo ideal $I = \langle ba, cb \rangle$ os simples são:



Exemplo

E os projetivos irredutíveis são



Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

- 1 A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
- 2 A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.

Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

- 1 A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
- 2 A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.
- 3 Essas duas estruturas satisfazem a seguinte propriedade: dados $a, b, c \in A$

$$a \circ b^{op}(c) = a(cb) = acb = b^{op}(ac) = b^{op} \circ a(c).$$

Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

- 1 A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
- 2 A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.
- 3 Essas duas estruturas satisfazem a seguinte propriedade: dados $a, b, c \in A$

$$a \circ b^{op}(c) = a(cb) = acb = b^{op}(ac) = b^{op} \circ a(c).$$

Duas estruturas de A -módulo, uma de cada lado, em um espaço vetorial M que satisfazem (3) formam uma estrutura de A, A -bimódulo para M .

Álgebra Envolvente I

Dada uma álgebra A qualquer, podemos considerar a estrutura de multiplicação de A como duas estruturas de módulos da seguinte maneira:

- 1 A é um A módulo à esquerda com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à esquerda $a(b) = ab, \forall b \in A$.
- 2 A é um A módulo à direita com a ação de $a \in A$ sendo a multiplicação à direita $a^{op}(b) = ba, \forall b \in A$.
- 3 Essas duas estruturas satisfazem a seguinte propriedade: dados $a, b, c \in A$

$$a \circ b^{op}(c) = a(cb) = acb = b^{op}(ac) = b^{op} \circ a(c).$$

Duas estruturas de A -módulo, uma de cada lado, em um espaço vetorial M que satisfazem (3) formam uma estrutura de A, A -bimódulo para M . Como os A -módulos à direita são A^{op} -módulos à esquerda, podemos reinterpretar os A, A -bimódulos como $A^e = A \otimes A^{op}$ -módulos à esquerda.

Álgebra Envolvente II

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um *sciop* para A , então

$$\{e_i \otimes e_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

é um *sciop* para $A^e \doteq A \otimes A^{\text{op}}$. Denotamos

$$P[i, j] \doteq A^e(e_i \otimes e_j) \quad \text{e} \quad S[i, j] \doteq \text{top } P[i, j] \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j]).$$

Álgebra Envolvente II

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um *sciop* para A , então

$$\{e_i \otimes e_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

é um *sciop* para $A^e \doteq A \otimes A^{\text{op}}$. Denotamos

$$P[i, j] \doteq A^e(e_i \otimes e_j) \quad \text{e} \quad S[i, j] \doteq \text{top } P[i, j] \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j]).$$

Existe um resultado que permite encontrar qual é a álgebra envolvente para uma álgebra de caminhos. Na verdade esse resultado é mais geral e serve para alguns quocientes por ideais de duas álgebras de caminhos, esse resultado mais geral pode ser encontrado em [Ska11, Proposição 2.4], aqui apenas falarei do resultado que nos interessa.

Álgebra Envolvente III

Lemma

[Ska11, Proposição 2.2] Sejam Q e R duas aljavas finitas, então

$$\mathbb{K}Q \otimes \mathbb{K}R \cong \frac{\mathbb{K}(Q \times R)}{\kappa(Q, R)},$$

onde $\kappa(Q, R) \doteq \{\alpha\beta - \beta\alpha \mid \alpha \in Q, \beta \in R\}$ e $Q \times R$ é a aljava cujos vértices são $Q_0 \times Q_1$ e flechas $(Q_1 \times R_0) \cup (Q_0 \times R_1)$.

Álgebra Envolvente III

Lemma

[Ska11, Proposição 2.2] Sejam Q e R duas aljavas finitas, então

$$\mathbb{K}Q \otimes \mathbb{K}R \cong \frac{\mathbb{K}(Q \times R)}{\kappa(Q, R)},$$

onde $\kappa(Q, R) \doteq \{\alpha\beta - \beta\alpha \mid \alpha \in Q, \beta \in R\}$ e $Q \times R$ é a aljava cujos vértices são $Q_0 \times Q_1$ e flechas $(Q_1 \times R_0) \cup (Q_0 \times R_1)$.

A pergunta natural agora é: Que?!

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido.

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido. A resposta é positiva e esta resolução é chamada de *resolução projetiva minimal*.

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido. A resposta é positiva e esta resolução é chamada de *resolução projetiva minimal*.

- 1 Uma *cobertura projetiva* para um A -módulo M é um epimorfismo

$$h : P \longrightarrow M$$

tal que P é projetivo e o homomorfismo induzido

$$\bar{h} : \text{top } P \longrightarrow \text{top } M$$

é um isomorfismo.

A Melhor Resolução Projetiva

Uma pergunta natural de se fazer é se existe uma resolução projetiva que nos permite ler, sem grandes dificuldades, qual é a dimensão projetiva do módulo resolvido. A resposta é positiva e esta resolução é chamada de *resolução projetiva minimal*.

- 1 Uma *cobertura projetiva* para um A -módulo M é um epimorfismo

$$h : P \longrightarrow M$$

tal que P é projetivo e o homomorfismo induzido

$$\bar{h} : \text{top } P \longrightarrow \text{top } M$$

é um isomorfismo.

- 2 Uma *resolução projetiva minimal* é uma resolução projetiva tal que cada

$$d_n : P_n \longrightarrow \text{Im}(d_n)$$

é uma cobertura projetiva.

Equivalências Homológicas

O legal de estudar dimensões homológicas para álgebras de dimensão finita - esta última dimensão é a de espaço vetorial - é que podemos nos restringir aos módulos simples. Vejamos como isso acontece:

- 1 A dimensão global de uma álgebra de dimensão finita é o supremo da dimensão projetiva de seus módulos simples.

Equivalências Homológicas

O legal de estudar dimensões homológicas para álgebras de dimensão finita - esta última dimensão é a de espaço vetorial - é que podemos nos restringir aos módulos simples. Vejamos como isso acontece:

- 1 A dimensão global de uma álgebra de dimensão finita é o supremo da dimensão projetiva de seus módulos simples.
- 2 Para um A -módulo M são equivalentes:
 - 1 $\text{pd}_A M \leq n$.
 - 2 $\text{Ext}^{n+1}(M, S) = 0$, para todos os módulos simples.
 - 3 A resolução projetiva minimal para M tem comprimento no máximo n .

Equivalências Homológicas

O legal de estudar dimensões homológicas para álgebras de dimensão finita - esta última dimensão é a de espaço vetorial - é que podemos nos restringir aos módulos simples. Vejamos como isso acontece:

- 1 A dimensão global de uma álgebra de dimensão finita é o supremo da dimensão projetiva de seus módulos simples.
- 2 Para um A -módulo M são equivalentes:
 - 1 $\text{pd}_A M \leq n$.
 - 2 $\text{Ext}^{n+1}(M, S) = 0$, para todos os módulos simples.
 - 3 A resolução projetiva minimal para M tem comprimento no máximo n .

Juntando essas duas informações acima, vemos que podemos descobrir a dimensão global de uma álgebra olhando apenas para os grupos $\text{Ext}_A^n(S, S')$ com S e S' A -módulos simples.

Exemplo I

Para $A_1 = k[x]/\langle x^2 \rangle$ a seguinte sequência exata é uma resolução projetiva minimal para $S[1]$ (o único simples):

$$\cdots \rightarrow P[1] \rightarrow P[1] \rightarrow P[1] \rightarrow \mathbb{K} = S[1] \rightarrow 0.$$

Exemplo II

Considere a aljava $Q : 1 \xrightarrow{a} 2$. E considere $A_2 = \mathbb{K}Q$, então seus projetivos irredutíveis são: $P[1] : \mathbb{K}e_1 \longrightarrow \mathbb{K}a$ e

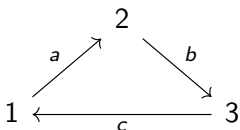
$P[1] : 0 \longrightarrow \mathbb{K}e_2$. Com esses dados conseguimos calcular:

$$0 \longleftarrow S[1] \longleftarrow$$

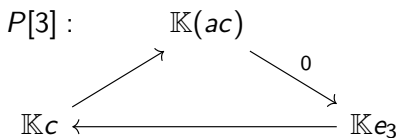
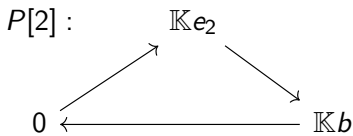
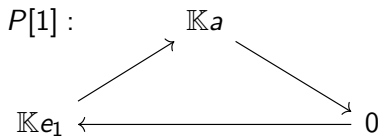
$$0 \longleftarrow S[2] \longleftarrow$$

Exemplo III

Considere a aljava Q



Para a álgebra A_3 que é o quociente de $\mathbb{K}Q$ pelo ideal $I = \langle ba, cb \rangle$ os projetivos irredutíveis são



Exemplo III

Conseguimos calcular as seguinte resoluções projetivas minimais:

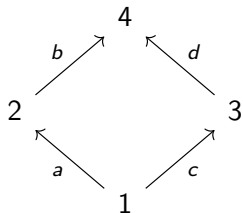
$$0 \longleftarrow S[1] \longleftarrow$$

$$0 \longleftarrow S[2] \longleftarrow$$

$$0 \longleftarrow S[3] \longleftarrow$$

Exemplo IV

Agora a aljava Q é



A álgebra é $A_4 = \mathbb{K}Q/I$, onde $I = \langle ba - dc \rangle$. Os projetivos irredutíveis são

Table of Contents

1 História, Motivação e Revisão

- Classificações clássicas.
- Noções de Homologia

2 Resultados Técnicos

- Idempotentes
- Álgebra Envolvente
- Dimensões Homológicas para Álgebras de Dimensão Finita

3 Principal Resultado

- Aplicação

Resolução Projetiva Minimal para A como A^e -módulo I

Lemma

[Hap89, Lema da seção 1.5] Seja

$$\cdots R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal para A como A^e -módulo. Então

$$R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{\dim \text{Ext}_A^n(S[i],S[j])}.$$

Ideia da demonstração:

- 1 Escreva $R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{r_{ij}}$, pois estes são os projetivos indecomponíveis de $A^e\text{-mod}$.
- 2 Aplique o funtor $\text{Hom}_{A^e}(-, S[i,j])$.
- 3 Note que os diferenciais do novo complexo são nulos - ocorre pois a resolução é minimal.

Resolução Projetiva Minimal para A como A^e -módulo II

4 Segue o cômputo

$$\begin{aligned}r_{ij} &= \dim \operatorname{Ext}_{A^e}^n(A, S[i, j]) = \dim \operatorname{Ext}_{A^e}^n(A, \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j])) \\ &= \dim H^n(A, \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(S[i], S[j])) = \dim \operatorname{Ext}_A^n(S[i], S[j]).\end{aligned}$$

Dimensão Global e Dimensão Projetiva

Corollary

Seja A uma \mathbb{K} -álgebra de dimensão finita, então

$$\text{pd}_{A^e} A = \text{gldim}(A).$$

Demonstração: Usando a resolução minimal que obtivemos, isto é, o n -ésimo termo dela é dado por

$$R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{\dim \text{Ext}_A^n(S[i], S[j])}$$

temos o seguinte cômputo

$$\begin{aligned} \text{pd}_{A^e} A &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid R_n \neq 0\} \\ &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_A^n(S[i], S[j]) \neq 0\} = \text{gldim}(A). \quad \square \end{aligned}$$

Dimensão Global e Dimensão Projetiva

Corollary

Seja A uma \mathbb{K} -álgebra de dimensão finita, então

$$\text{pd}_{A^e} A = \text{gldim}(A).$$

Demonstração: Usando a resolução minimal que obtivemos, isto é, o n -ésimo termo dela é dado por

$$R_n = \bigoplus_{i,j} P[i,j]^{\dim \text{Ext}_A^n(S[i],S[j])}$$

temos o seguinte cômputo

$$\begin{aligned} \text{pd}_{A^e} A &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid R_n \neq 0\} \\ &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_A^n(S[i], S[j]) \neq 0\} = \text{gldim}(A). \quad \square \end{aligned}$$

Isso nos diz, moralmente, que A é tão complicado como A^e -módulo quanto o é como álgebra.

Exemplo

- Se A é uma álgebra de caminhos conexa com $J(A) \neq 0$, então $\text{pd}_{A^e} A = 1$.
- Se $A = M_n(\mathbb{K})$, então $\text{pd}_{M_n(\mathbb{K})^e} M_n(\mathbb{K}) = 0$.

Exemplo

- Se A é uma álgebra de caminhos conexa com $J(A) \neq 0$, então $\text{pd}_{A^e} A = 1$.
- Se $A = M_n(\mathbb{K})$, então $\text{pd}_{M_n(\mathbb{K})^e} M_n(\mathbb{K}) = 0$.
- Lembrando que A_1 é a álgebra dual temos $\text{pd}_{A_1^e} A_1 = \infty$.
- $\text{pd}_{A_3^e} A_3 = 3$.

Exemplo

- Se A é uma álgebra de caminhos conexa com $J(A) \neq 0$, então $\text{pd}_{A^e} A = 1$.
- Se $A = M_n(\mathbb{K})$, então $\text{pd}_{M_n(\mathbb{K})^e} M_n(\mathbb{K}) = 0$.
- Lembrando que A_1 é a álgebra dual temos $\text{pd}_{A_1^e} A_1 = \infty$.
- $\text{pd}_{A_3^e} A_3 = 3$.
- Lembrando que $A_2^e = A_4$, vale que $\text{pq}_{A_4} A_2 = 1$, apesar de que $\text{gldim}(A_4) = 2$



Figure: Dieter Happel (1953-2012)

Obrigado pela atenção! Dúvidas?



William Crawley-Boevey.

Noncommutative algebra 2: Representations of finite-dimensional algebras.



Dieter Happel.

Hochschild cohomology of finite—dimensional algebras.

In *Séminaire d'Algebre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin*, pages 108–126.
Springer, 1989.



Øystein Ingmar Skartsæterhagen.

Quivers and admissible relations of tensor products and trivial extensions.

Master's thesis, Institutt for matematiske fag, 2011.