Uma Generalização da Aljava de Gabriel

Roger R Primolan

Study seminar RTAG - IMEUSP

03 de setembro de 2021

Tópicos

1. História, Motivação e Revisão
   - Linha do Tempo
   - Álgebra de Caminhos
   - Construções de Gabriel
   - Generalização: uma Abordagem Categorial
2. Construindo a Aljava de Gabriel
   - Análise: Como obter os Vértices?
   - Síntese: Vértices como órbitas de uma ação.
   - Tudo Sobre as Arestas
3. Resultados Principais
   - Adjunção

Table of Contents

Linha do Tempo

1921 — E. Noether define abstratamente o conceito de módulos.

1972 — P. Gabriel introduz representações de aljavas como uma ferramenta para estudar módulos sobre certas álgebras e classifica uma classe de álgebras de dimensão finita

2020 — K. Iusenko e J. MacQuarrie generalizam a aljava de Gabriel e conseguem generalizar o **teorema de classificação** [IM20]

2021 — K. Iusenko, J. MacQuarrie e S. Quirino generalizam o resultado anterior para um ambiente mais natural: as coálgebras.

Álgebra de Caminhos

Uma *aljava* é um grafo orientado $Q \doteq (Q_0, Q_1)$.

Álgebra de Caminhos

Uma *aljava* é um grafo orientado $Q \doteq (Q_0, Q_1)$.
Dada uma aljava podemos construir o seguinte espaço vetorial

$$kQ = \Big(\bigoplus_{i \in Q_0} k\epsilon_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in Q_1} k\alpha\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{|\rho|=2} k\rho\Big) \oplus \cdots$$

e induzir um produto nele usando a concatenação de caminhos da própria aljava. Lembre que os caminhos ϵ's tem comprimento zero e a multiplicação é

$$\epsilon_j \alpha \epsilon_i = \delta_{[j,t(\alpha)]}\delta_{[s(\alpha),i]}\alpha.$$

Exemplo

Ideal de destaque

Para toda álgebra de caminhos podemos considerar o ideal gerado pelas flechas, que é dado por

$$R_Q = \Big(\bigoplus_{\alpha \in Q_1} k\alpha \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{|\rho|=2} k\rho \Big) \oplus \cdots$$

Ideal de destaque

Para toda álgebra de caminhos podemos considerar o ideal gerado pelas flechas, que é dado por

$$R_Q = \Big(\bigoplus_{\alpha \in Q_1} k\alpha\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{|\rho|=2} k\rho\Big) \oplus \cdots$$

Um ideal $I \lhd kQ$ é dito *admissível* quando $R^n \subseteq I \subseteq R^2$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Aljava de Gabriel e Teorema de Classificação

A aljava de Gabriel de uma álgebra pontuada é definida como

$$Q_A = \Big(\{e_1, \cdots, e_n\}, \bigcup_{i,j=1}^{n} F_{i \to j}\Big),$$

onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um *sciop* para A e $F_{i \to j}$ é uma base para o espaço vetorial $\frac{e_j \operatorname{rad}(A) e_i}{\operatorname{rad}^2(A)}$.

Theorem

Dada uma k-álgebra A pontuada (sobre um corpo algebricamente fechado) existe um ideal admissível $I \lhd kQ_A$ tal que

$$A \cong \frac{kQ_A}{I}.$$

Case Study

Álgebras Pseudocompactas

São *limites inversos* de k-álgebras de dimensão finita munidas com a topologia discreta.

Álgebras Pseudocompactas

São *limites inversos* de k-álgebras de dimensão finita munidas com a topologia discreta.
Uma k-álgebra topológica, Hausdorff, associativa e unital B é dita uma *álgebra pseudocompacta* quando possui uma família de ideais bilaterais $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de codimensão finita que formam uma base topológica para 0

Álgebras Pseudocompactas

São *limites inversos* de k-álgebras de dimensão finita munidas com a topologia discreta.

Uma k-álgebra topológica, Hausdorff, associativa e unital B é dita uma *álgebra pseudocompacta* quando possui uma família de ideais bilaterais $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de codimensão finita que formam uma base topológica para 0 e tal que

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda = 0.$$

Álgebras Pseudocompactas

São *limites inversos* de k-álgebras de dimensão finita munidas com a topologia discreta.
Uma k-álgebra topológica, Hausdorff, associativa e unital B é dita uma *álgebra pseudocompacta* quando possui uma família de ideais bilaterais $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de codimensão finita que formam uma base topológica para 0 e tal que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda = 0.$$

Moralmente: é a melhor k-álgebra B que podemos colocar no seguinte diagrama

$$B \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1.$$

Álgebras Pseudocompactas

São *limites inversos* de k-álgebras de dimensão finita munidas com a topologia discreta.
Uma k-álgebra topológica, Hausdorff, associativa e unital B é dita uma *álgebra pseudocompacta* quando possui uma família de ideais bilaterais $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de codimensão finita que formam uma base topológica para 0 e tal que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda = 0.$$

Moralmente: é a melhor k-álgebra B que podemos colocar no seguinte diagrama

$$B \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1.$$

Exemplos:

Objeto de interesse:

"Our main interest is in the study of finite dimensional associative algebras. However, finite dimensional algebras and finite quivers do not quite match up, since the path algebra of a quiver with loops or cycles is not finite dimensional. For this reason, it is convinient to work with a larger class of algebras, namely the class of those pseudocompact algebras A such that $A/J^2(A)$ is finite dimensional." (retirado de [IM20])

Objeto de interesse:

"Our main interest is in the study of finite dimensional associative algebras. However, finite dimensional algebras and finite quivers do not quite match up, since the path algebra of a quiver with loops or cycles is not finite dimensional. For this reason, it is convinient to work with a larger class of algebras, namely the class of those pseudocompact algebras A such that $A/J^2(A)$ is finite dimensional." (retirado de [IM20])

Lemma

Se A é uma álgebra pseudocompacta com $A/J^2(A)$ de dimensão finita, então

$$A \cong \operatorname{inj\,lim} A/J^n$$

Objeto de interesse:

"Our main interest is in the study of finite dimensional associative algebras. However, finite dimensional algebras and finite quivers do not quite match up, since the path algebra of a quiver with loops or cycles is not finite dimensional. For this reason, it is convinient to work with a larger class of algebras, namely the class of those pseudocompact algebras A such that $A/J^2(A)$ is finite dimensional." (retirado de [IM20])

Lemma

Se A é uma álgebra pseudocompacta com $A/J^2(A)$ de dimensão finita, então

$$A \cong \operatorname{inj\,lim} A/J^n$$

Essa hipótese sobre a dimensão $A/J^2(A)$ ser finita é razoável, pois queremos que esse espaço modele os vértices e as arestas da "aljava".

Objeto de interesse:

"Our main interest is in the study of finite dimensional associative algebras. However, finite dimensional algebras and finite quivers do not quite match up, since the path algebra of a quiver with loops or cycles is not finite dimensional. For this reason, it is convinient to work with a larger class of algebras, namely the class of those pseudocompact algebras A such that $A/J^2(A)$ is finite dimensional." (retirado de [IM20])

Lemma

Se A é uma álgebra pseudocompacta com $A/J^2(A)$ de dimensão finita, então

$$A \cong \operatorname{inj\,lim} A/J^n$$

Essa hipótese sobre a dimensão $A/J^2(A)$ ser finita é razoável, pois queremos que esse espaço modele os vértices e as arestas da "aljava". Denotaremos por **PAlg** como a categoria cujos objetos são álgebras pseudocompactas pontuadas com $A/J^2(A)$ de dimensão finita e os morfismos são homomorfismos de álgebras contínuos que preservam idempotentes primitivos.

Table of Contents

Generalizando os Vértices

Queremos associar os vértices à um *sciop* da álgebra A. Porém temos um problema técnico: argumentos de escolha/tomar um conjunto não funcionam muito bem no contexto categórico. Assim precisamos de um ferramental técnico: as cisões da seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow J(A) \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{J(A)} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} k \longrightarrow 0.$$

Generalizando os Vértices

Queremos associar os vértices à um *sciop* da álgebra A. Porém temos um problema técnico: argumentos de escolha/tomar um conjunto não funcionam muito bem no contexto categórico. Assim precisamos de um ferramental técnico: as cisões da seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow J(A) \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{J(A)} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} k \longrightarrow 0.$$

Um resultado (tipo Wedderburn-Malcev para o nosso contexto) diz que duas cisões se relacionam como abaixo:

$$s(x) = (1+w)t(x)(1+w)^{-1}, \ \forall x \in \frac{A}{J(A)}.$$

onde $w \in J(A)$.

Construção dos Vértices

Considere o seguinte subgrupo de automorfismos internos de A:

$$\mathcal{G} \doteq \{(1+w)(-)(1+w)^{-1} \in \mathrm{Aut}(A) \mid w \in J(A)\}$$

Construção dos Vértices

Considere o seguinte subgrupo de automorfismos internos de A:

$$\mathcal{G} \doteq \{(1+w)(-)(1+w)^{-1} \in \mathrm{Aut}(A) \mid w \in J(A)\}$$

Dado um *sciop* $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq A$ considere cada vértice como sendo a órbita dos idempotentes, isto é, os vértices são os seguintes conjuntos

$$GQ(i) = \mathcal{G}e_i = \{(1+w)e_i(1+w)^{-1} \in A \mid w \in J(A)\}.$$

Por motivos técnicos precisamos adicionar mais um vértice $*$.
Teste de Sanidade: o que acontece quando estamos no caso clássico, quando A tem dimensão finita? Neste caso é possível mostrar que todas as órbitas tem um único elemento, exatamente o idempotente tomado. Então essa maneira de "driblar" a escolha dos elementos generaliza o caso que conhecemos.

Como lidar com as arestas?

Novamente precisamos tomar cuidado com escolha de elementos (uma base) de $J(A)/J^2(A)$.

Como lidar com as arestas?

Novamente precisamos tomar cuidado com escolha de elementos (uma base) de $J(A)/J^2(A)$.
Mas as vezes o simples funciona: sabemos que na categoria dos espaços vetoriais a dimensão codifica, a menos de isomorfismo, toda a informação de um espaço vetorial.

Como lidar com as arestas?

Novamente precisamos tomar cuidado com escolha de elementos (uma base) de $J(A)/J^2(A)$.
Mas as vezes o simples funciona: sabemos que na categoria dos espaços vetoriais a dimensão codifica, a menos de isomorfismo, toda a informação de um espaço vetorial.
Então no lugar de flechas de $\mathcal{G}e_i$ para $\mathcal{G}e_j$ associamos o seguinte espaço vetorial:

$$GQ(A)_{i\to j} \doteq \frac{e_j J(A) e_i}{J^2(A)}.$$

Por motivos técnicos tome

$$GQ(A)_{i\to *} = GQ(A)_{*\to i} \doteq 0.$$

Table of Contents

VQuivers

O objeto que definimos anteriormente se chama *VQuiver*, abstratamente consiste em:

1. Um conjunto de vértices $VQ_0^* \doteq VQ_0 \cup \{*\}$
2. Uma coleção de espaços vetoriais $VQ_{f,e}$ que são sempre o espaço nulo quando $e = *$ ou $f = *$.

Um morfismo de VQuivers $\rho : VQ \longrightarrow VR$ é um par

1. $\rho_0 : VQ_0^* \longrightarrow VR_0^*$ uma função que se restringe à uma bijeção $VQ_0^* - \rho^{-1}(*) \longrightarrow VR_0$.
2. para cada par e e f em VQ_0^* uma transformação linear $VQ_{f,e} \longrightarrow VR_{\rho_0(f),\rho_0(e)}$.

Isso determina uma categoria denotada **VQuiv**.

Funtor Aljava de Gabriel

Dado um morfismo em **PAlg** $\alpha : A \longrightarrow B$ definimos o seguinte morfismo de VQuivers $GQ(\alpha) : GQ(A) \longrightarrow GQ(B)$ dado por

- $GQ(\alpha)(\mathcal{G}e) = *$, quando $\alpha(e) = 0$, e $GQ(\alpha)(\mathcal{G}e) = \mathcal{G}\alpha(e)$, caso contrário.
- $GQ(\alpha)_{e,f} : \frac{fJ(A)e}{J^2(A)} \longrightarrow \frac{\alpha(f)J(B)\alpha(e)}{J^2(B)}$ é dada por $GQ(\alpha)_{e,f}(f(j + J^2(A))e) = (\alpha(f)(\alpha(j) + J^2(A))\alpha(e))$

Funtor Aljava de Gabriel

Dado um morfismo em **PAlg** $\alpha : A \longrightarrow B$ definimos o seguinte morfismo de VQuivers $GQ(\alpha) : GQ(A) \longrightarrow GQ(B)$ dado por

- $GQ(\alpha)(\mathcal{G}e) = *$, quando $\alpha(e) = 0$, e $GQ(\alpha)(\mathcal{G}e) = \mathcal{G}\alpha(e)$, caso contrário.
- $GQ(\alpha)_{e,f} : \frac{fJ(A)e}{J^2(A)} \longrightarrow \frac{\alpha(f)J(B)\alpha(e)}{J^2(B)}$ é dada por $GQ(\alpha)_{e,f}(f(j + J^2(A))e) = (\alpha(f)(\alpha(j) + J^2(A))\alpha(e))$

Resultado técnico: Se $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ são dois morfismos em **PAlg** tais que

- $(\alpha - \beta)(A) \subseteq J(B)$
- $(\alpha - \beta)(J(A)) \subseteq J^2(B)$,

então $GQ(\alpha) = GQ(\beta)$.
Nesse caso dizemos que $\alpha \sim_1 \beta$ e podemos considerar o quociente de **PAlg** por essa relação. Denotaremos ele por $\mathbf{PAlg}_1$.

Funtor Aljava de Gabriel

Dado um morfismo em **PAlg** $\alpha : A \longrightarrow B$ definimos o seguinte morfismo de VQuivers $GQ(\alpha) : GQ(A) \longrightarrow GQ(B)$ dado por

- $GQ(\alpha)(\mathcal{G}e) = *$, quando $\alpha(e) = 0$, e $GQ(\alpha)(\mathcal{G}e) = \mathcal{G}\alpha(e)$, caso contrário.
- $GQ(\alpha)_{e,f} : \frac{fJ(A)e}{J^2(A)} \longrightarrow \frac{\alpha(f)J(B)\alpha(e)}{J^2(B)}$ é dada por $GQ(\alpha)_{e,f}(f(j + J^2(A))e) = (\alpha(f)(\alpha(j) + J^2(A))\alpha(e))$

Resultado técnico: Se $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ são dois morfismos em **PAlg** tais que

- $(\alpha - \beta)(A) \subseteq J(B)$
- $(\alpha - \beta)(J(A)) \subseteq J^2(B)$,

então $GQ(\alpha) = GQ(\beta)$.
Nesse caso dizemos que $\alpha \sim_1 \beta$ e podemos considerar o quociente de **PAlg** por essa relação. Denotaremos ele por $\mathbf{PAlg}_1$.
Temos definido um funtor Aljava de Gabriel $GQ(-) : \mathbf{PAlg}_1 \longrightarrow \mathbf{VQuiv}$.

Álgebra de Caminhos Completa

Dado um VQuiver VQ denotamos $\Sigma_{VQ} = \bigoplus_{i \in VQ_0} k$ e
$VQ_1 = \bigoplus_{e,f \in VQ_0} VQ_{f,e}$

$$k[[VQ]] = \left(\bigoplus_{e \in VQ_0} ke \right) \times VQ_1 \times (VQ_1 \otimes_{\Sigma_{VQ}} VQ_1) \times \cdots$$

Álgebra de Caminhos Completa

Dado um VQuiver VQ denotamos $\Sigma_{VQ} = \bigoplus_{i \in VQ_0} k$ e $VQ_1 = \bigoplus_{e,f \in VQ_0} VQ_{f,e}$

$$k[[VQ]] = \left(\bigoplus_{e \in VQ_0} ke \right) \times VQ_1 \times (VQ_1 \otimes_{\Sigma_{VQ}} VQ_1) \times \cdots$$

Dado um morfismo de vquivers $\rho : VQ \longrightarrow VR$ definimos

$$k[[\rho]] = (\phi_0, \phi_1, \phi_1 \otimes \phi_1, \cdots)$$

em que $\phi_0 : \Sigma_{VQ_0} \longrightarrow \Sigma_{VR_0}$ é tal que $\phi_0(e) = \rho_0(e)$ quando $\rho(e) \neq *$ [0 caso contrário] e ϕ_1 é a soma direta dos mapas $\rho_{e,f}$.

Álgebra de Caminhos Completa

Dado um VQuiver VQ denotamos $\Sigma_{VQ} = \bigoplus_{i \in VQ_0} k$ e
$VQ_1 = \bigoplus_{e,f \in VQ_0} VQ_{f,e}$

$$k[[VQ]] = \left(\bigoplus_{e \in VQ_0} ke \right) \times VQ_1 \times (VQ_1 \otimes_{\Sigma_{VQ}} VQ_1) \times \cdots$$

Dado um morfismo de vquivers $\rho : VQ \longrightarrow VR$ definimos

$$k[[\rho]] = (\phi_0, \phi_1, \phi_1 \otimes \phi_1, \cdots)$$

em que $\phi_0 : \Sigma_{VQ_0} \longrightarrow \Sigma_{VR_0}$ é tal que $\phi_0(e) = \rho_0(e)$ quando $\rho(e) \neq *$ [0 caso contrário] e ϕ_1 é a soma direta dos mapas $\rho_{e,f}$.
Isso nos dá um funtor $k[[-]] : \mathbf{VQuiv} \longrightarrow \mathbf{PAlg} \longrightarrow \mathbf{PAlg}_1$ que *generaliza a construção da álgebra de caminhos*.

$k[[-]]$ é Adjunto à esquerda de $GQ(-)$

Existe uma bijeção natural em ambas as entradas:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{VQuiv}}(VQ, GQ(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}_1}(k[[VQ]], A)$$

Bibliografia

Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowronski.
Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory.
Cambridge University Press, 2006.

Armand Brumer.
Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations.
J. Algebra, 4:442–470, 1966.

Kostiantyn Iusenko and John Macquerrie.
Semisimplicity and separability for pseudocompact algebras.
preprint (2021).

Kostiantyn Iusenko and John William MacQuarrie.
The path algebra as a left adjoint functor.
Algebr. Represent. Theory, 23(1):33–52, 2020.

Kostiantyn Iusenko.
Quivers, algebras and adjoint functors, 2017.