Diferenciação de Posets

Gustavo Peres Filbrich
filbrich@ime.usp.br

Instituto de Matemática e Estatística - USP

Abril de 2021

1 Considerações Iniciais

2 Representações Matriciais

3 Representações por Subespaços

4 Funtor Redução

5 Diferenciação: Elemento Maximal

6 Bibliografia

1 Considerações Iniciais

2 Representações Matriciais

3 Representações por Subespaços

4 Funtor Redução

5 Diferenciação: Elemento Maximal

6 Bibliografia

$S \equiv (S, \preceq)$ um **conjunto parcialmente ordenado – poset**: um conjunto S e uma ordem parcial $\preceq$, i.e. uma relação binária satisfazendo:

- **reflexividade:** $a \preceq a$
- **antissimetria:** $a \preceq b$ e $b \preceq a \implies a = b$
- **transitividade:** $a \preceq b$ e $b \preceq c \implies a \preceq c$

Observação

Nem todos os elementos de S precisam ser comparáveis.

Diagrama de Hasse: os pontos são os elementos de S e $i \bullet \longrightarrow \bullet\, j$ se $i \prec j$ e não existe $t \in S$ tal que $i \prec t \prec j$.

Considerações Iniciais

Exemplo

$S = \{1, 2, 3 \text{ incomparáveis}\}$.

$$\text{S:} \quad 1 \bullet \qquad 2 \bullet \qquad 3 \bullet$$

Exemplo

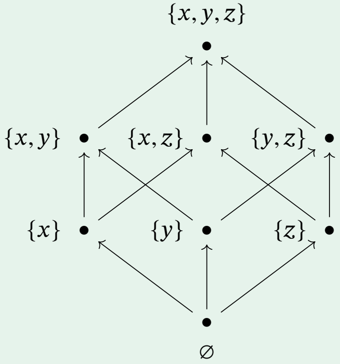
$S = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\} = (2, 2, 2)$.

$$\text{S:} \quad \begin{tikzcd} 2 \bullet & 4 \bullet & 6 \bullet \\ 1 \bullet \arrow[u] & 3 \bullet \arrow[u] & 5 \bullet \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Exemplo

$S = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$ com ordem parcial $\preceq$ dada pela inclusão $\subseteq$ (i.e. $A \prec B \iff A \subset B$).

S :



1 Considerações Iniciais

2 Representações Matriciais

3 Representações por Subespaços

4 Funtor Redução

5 Diferenciação: Elemento Maximal

6 Bibliografia

De agora em diante:

- Fixados k um corpo e $S \equiv (S, \preceq)$ um poset finito.
- Elementos de S denotados por $\{1, \ldots, n\}$.

Definição

*Uma $k-$**representação matricial** de S é uma matriz em blocos*

$$A = [\underbrace{\ A_1\ }_{s_1} | \ldots | \underbrace{\ A_n\ }_{s_n}]\}_{s_{n+1}}$$

para $A_1, \ldots, A_n$ matrizes com coeficientes em k e $0 \leq s_1, \ldots, s_{n+1}$ números inteiros.

O conjunto Mat_S de todas as representações matriciais de S é fechado com relação à **soma direta** dada por

$$A \oplus A' = \left[\begin{array}{cc|c|cc} A_1 & 0 & \dots & A_n & 0 \\ 0 & A_1' & \dots & 0 & A_n' \end{array}\right].$$

Chamamos de $\mathcal{G}_S$ o conjunto das composições de **transformações elementares** dos seguintes tipos:

- simultâneas entre linhas;
- entre colunas de cada bloco;
- para todo $i \preceq j$, as que adicionam uma coluna do i-ésimo bloco a uma coluna do j-ésimo bloco.

A é $\mathcal{G}_S$-**equivalente** a B (denotado $A \sim_{\mathcal{G}_S} B$) quando B pode ser obtida a partir de A por meio de uma sequência de transformações em $\mathcal{G}_S \cup \mathcal{G}_S^{-1}$.

Problema matricial: denotado $(\mathrm{Mat}_S, \mathcal{G}_S)$, classificar indecomponíveis em $\mathrm{Mat}_S/\sim_{\mathcal{G}_S}$.

$(\mathrm{Mat}_S, \mathcal{G}_S)$ pode ser visto como uma **categoria**:

- **objetos** são matrizes em Mat_S
- **morfismos** são pares de matrizes (C, D) onde $C \in \mathrm{Gl}(s_{n+1}, k)$ e $D \in \mathrm{Gl}(s_1 + \ldots + s_n, k)$ é composição de matrizes elementares correspondendo às transformações elementares de tipo **2** e **3** na definição de $\mathcal{G}_S$.

Aditivisação de Mat_S é a categoria Mat_S^{ad} em que:

- **objetos** são sistemas $V = (V_i\,; t_j) = (V_1, \ldots, V_{n+1}\,; t_1, \ldots t_n\}$

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[drr, "t_1"] & & \\
\vdots & & \\
V_i \arrow[rr, "t_i"] & & V_{n+1} \\
\vdots & & \\
V_n \arrow[urr, "t_n"] & &
\end{tikzcd}
$$

- um **morfismo** entre V e V' é um par de mapas k-lineares (g, g_{n+1}) tal que o diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \arrow[r, "(t_j)"] & V_{n+1} \\
V'_1 \oplus \ldots \oplus V'_n \arrow[r, "(t'_j)"] \arrow[u, "g"] & V'_{n+1} \arrow[u, "g_{n+1}"']
\end{tikzcd}
$$

Imersão de categorias: $q : \mathrm{Mat}_S \longrightarrow \mathrm{Mat}_S^{ad}$.

$$q(A): \begin{tikzcd}[row sep=small] k^{s_1} \arrow[dr, "A_1"] & \\ \vdots & \\ k^{s_j} \arrow[r, "A_j"] & k^{s_{n+1}} \\ \vdots & \\ k^{s_n} \arrow[ur, "A_n"] & \end{tikzcd} \qquad A = [\underbrace{\;A_1\;}_{s_1} \mid \ldots \mid \underbrace{\;A_n\;}_{s_n}]\}_{s_{n+1}} \in \mathrm{Mat}_S$$

Lema

- *$A \sim_{\mathcal{G}_S} B$ em $\mathrm{Mat}_S \iff q(A) \cong q(B)$*
- *A indecomponível em $(\mathrm{Mat}_S, \mathcal{G}_S) \iff q(A)$ indecomponível em Mat_S^{ad}*

1 Considerações Iniciais

2 Representações Matriciais

3 Representações por Subespaços

4 Funtor Redução

5 Diferenciação: Elemento Maximal

6 Bibliografia

Definição

Uma ***representação de*** S ***por subespaços*** *é um sistema* $V = (V_0\,; V_i)_{i \in S}$ *em que:*

- V_0 *é um k-espaço vetorial de dimensão finita*
- V_i *é subespaço vetorial de* V_0 *para todo* $i \in S$
- $i \leq j \implies V_i \subseteq V_j$

V_0 é chamado de **espaço ambiente**.

Um **morfismo** entre representações V e V' é um mapa k-linear $g : V_0 \longrightarrow V_0'$ tal que $g(V_i) \subseteq V_i'$ para todo $i \in S$.

Exemplo

$$
S: \quad
\begin{tikzcd}
2 \bullet & 4 \bullet & 6 \bullet \\
1 \bullet \arrow[u] & 3 \bullet \arrow[u] & 5 \bullet \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\langle e_1, e_2, e_3 \rangle
$$

$$
V: \quad
\begin{tikzcd}
\langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle & \langle e_2 \rangle \\
\langle e_1 + e_2 \rangle \arrow[u] & \langle e_3 \rangle \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Denotada por $\mathfrak{sp}_S$ a **categoria** cujos

- **objetos** são todas as representações de S por subespaços
- **morfismos** são todos os morfismos entre representações.

Soma direta entre $V, V' \in \mathfrak{sp}_S$:

$$V \oplus V' := (V_0 \oplus V_0'; V_i \oplus V_i')_{i \in S}$$

$V \in \mathfrak{sp}_S$ é chamada **indecomponível** se 0 e V são seus únicos somandos diretos.

$\operatorname{Ind}(\mathfrak{sp}_S)$ denota um conjunto de representantes das classes de isomorfismo dos objetos indecomponíveis de $\mathfrak{sp}_S$.

Dizemos que S é

- de **tipo finito de representação** se $\operatorname{Ind}(\mathfrak{sp}_S)$ é finito;
- de **tipo infinito de representação** se $\operatorname{Ind}(\mathfrak{sp}_S)$ é infinito.

1 Considerações Iniciais

2 Representações Matriciais

3 Representações por Subespaços

4 Funtor Redução

5 Diferenciação: Elemento Maximal

6 Bibliografia

FUNTOR REDUÇÃO

Conexão entre representações matriciais de S e representações de S por subespaços: **funtor redução** $H : \mathrm{Mat}_S^{ad} \longrightarrow \mathfrak{sp}_S$

- definido nos **objetos**:

$$U = (U_1, \dots, U_{n+1}\,; t_1, \dots, t_n) \longmapsto H(U) = V = (V_0\,; V_j)_{j \in S}$$

$$V_0 := U_{n+1}$$

$$V_j := \mathrm{Im}\left(\bigoplus_{i \preceq j} U_i \xrightarrow{t_i} U_{n+1} = V_0 \right) \text{ para } j = 1, \dots, n$$

- e nos **morfismos**:

$$(g, g_{n+1}) : V' \longrightarrow V \text{ mapa em } \mathrm{Mat}_S^{ad} \implies g_{n+1}(V_j') \subseteq V_j$$

$$\text{definimos } H(g, g_{n+1}) := g_{n+1}$$

Denotamos por $k(\varnothing)$, $k(j \nearrow 0)$ e $k(i)$ os seguintes objetos indecomponíveis em Mat_S^{ad}:

$$k(\varnothing):\quad \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \longrightarrow \\ \nearrow \end{array} k \qquad k(j \nearrow 0):\quad \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \longrightarrow \\ \nearrow \end{array} 0 \qquad k(i):\quad \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \xrightarrow{id} \\ \nearrow \end{array} k$$

$\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $\mathcal{I}$ um conjunto de objetos de $\mathcal{A}$, $[\mathcal{I}]$ é o ideal bilateral na categoria A que consiste em todos os morfismos que se fatoram através de uma soma direta de objetos de $\mathcal{I}$.

Teorema

Para $(Mat_S^{ad})_0$ *a subcategoria plena de* Mat_S^{ad} *consistindo em objetos que não possuem somandos da forma* $K(1 \nearrow 0), \ldots, K(n \nearrow 0)$*, então* H *induz uma equivalência de representações*

$$H_0 : (Mat_S^{ad})_0 \longrightarrow \mathfrak{sp}_S$$

e uma equivalência de categorias

$$Mat_S^{ad}/[K(1 \nearrow 0), \ldots, K(n \nearrow 0)] \cong \mathfrak{sp}_S$$

1 Considerações Iniciais

2 Representações Matriciais

3 Representações por Subespaços

4 Funtor Redução

5 Diferenciação: Elemento Maximal

6 Bibliografia

Largura do poset: $\omega(S)$ é o maior número de elementos incomparáveis 2 a 2.

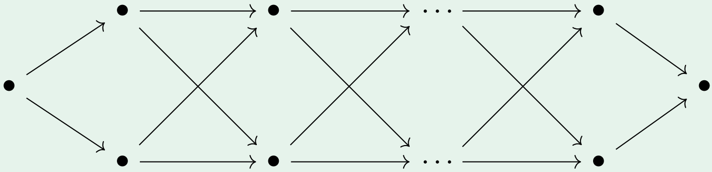
Exemplo

$$S: \quad \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \implies \omega(S) = 1$$

Outra caracterização: tamanho da maior **anticadeia** em S.

Exemplo

$S:$



$$\implies \omega(S) = 2$$

$i^{\triangledown} := \{j \in S \mid j \leq i\}$ para $i \in S$.

Definição

Dado $c \in S$ elemento maximal tal que $\omega(S \setminus c^{\triangledown}) \leq 2$, definimos um novo poset:

$$\partial_c S := \big(S \setminus \{c\}\big) \cup \{r \vee s \mid r, s, c \textit{ incomparáveis em } S\}$$

com relação $\leq$ em $\partial_c S$ dada da seguinte maneira:

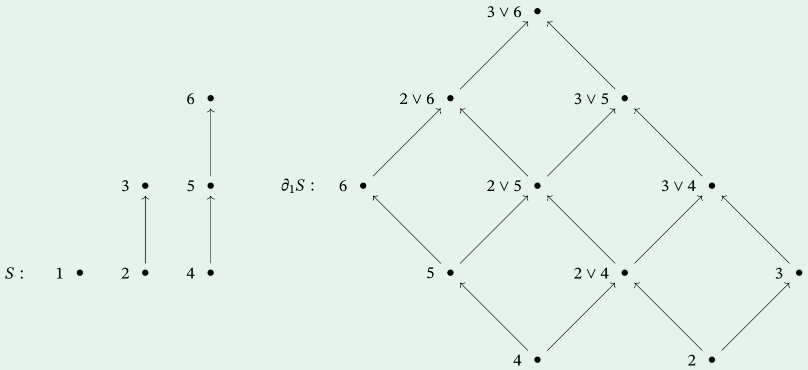
- *mantendo-se as relações entre elementos que já estavam em S*
- $t \leq s \vee r \iff t \leq s$ *ou* $t \leq r$
- $r \vee s \leq t \iff r \leq t$ *e* $s \leq t$
- $r \vee s \leq r' \vee s' \iff \big(r \leq r'$ *ou* $r \leq s'\big)$ *e* $\big(s \leq r'$ *ou* $s \leq s'\big)$.

Exemplo

$$S: \qquad 1\ \bullet \qquad 2\ \bullet \qquad 3\ \bullet$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \vee 2\ \bullet & \\
\partial_3 S: \quad 1\ \bullet \arrow[ur] & & 2\ \bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Exemplo


S :
1
2
3
4
5
6
$\partial_1 S$:
6
5
4
$2 \vee 6$
$2 \vee 5$
$2 \vee 4$
$3 \vee 6$
$3 \vee 5$
$3 \vee 4$
3
2

Teorema (Nazarova & Roiter)

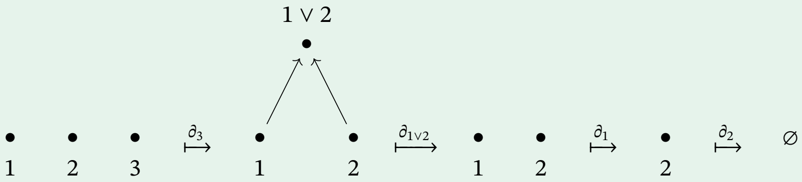
Se $\omega(S) \leq 3$ *e* $c \in S$ *é um elemento maximal, então:*

- S *e* $\partial_c S$ *são de mesmo tipo de representação;*
- $\#Ind(Mat_{\partial_c S}) < \#Ind(Mat_S)$ *no caso em que ambos são finitos.*

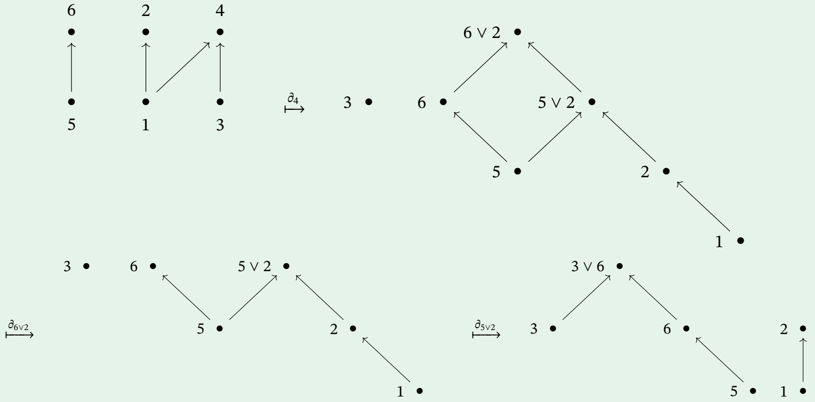
Corolário

S *é de tipo finito de representação* $\iff$ $\omega(S) \leq 3$ *e o processo de diferenciação com relação a um elemento maximal reduz* S *ao poset vazio em um número finito de passos.*

Exemplo



Exemplo



Exemplo (Continuação)

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & & 3\vee 6 \\
 & & 6 & 2 & & & & 3\vee 5 \arrow[u] \\
{} \arrow[r, mapsto, "\partial_{3\vee 6}"] & 3 & 5 \arrow[u] & 1 \arrow[u] & {} \arrow[r, mapsto, "\partial_2"] & {} & 1 & 3 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & 3\vee 5 & & & & & & & & \\
{} \arrow[r, mapsto, "\partial_{3\vee 6}"] & 1 & 3 \arrow[u] & {} \arrow[r, mapsto, "\partial_{3\vee 5}"] & 1 & 3 & {} \arrow[r, mapsto, "\partial_1"] & 3 & {} \arrow[r, mapsto, "\partial_3"] & \varnothing
\end{tikzcd}
$$

Exemplo

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & 5 & & & & & 1 \vee 2 & & & \\
S: & 1 & 2 & 3 \arrow[ur] & & 4 \arrow[ul] & \longmapsto & \partial_5 S: & 1 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ul] & 3 & 4
\end{tikzcd}
$$

Interpretação categórica da diferenciação: **Funtor Diferenciação**

$$\partial_c : \mathfrak{sp}_S \longrightarrow \mathfrak{sp}_{\partial_c S}$$

- nos **objetos**: $\partial_c(V) := V' = (V_0' ; V_j')_{j \in \partial_c S}$

$$\begin{aligned} V_0' &= V_c && \\ V_j' &= V_c \cap V_j && \text{se } j \in S \\ V_{r \vee s}' &= V_c \cap (V_r + V_s) && \text{se } r, s \text{ incomparáveis em } \partial_c S \end{aligned}$$

- e nos **morfismos**: $f : V \longrightarrow W$ em $\mathfrak{sp}_S \implies f(V_j') \subseteq W_j'$

$\implies f$ define um mapa $\partial_c(f) : \partial_c(V) \longrightarrow \partial_c(W)$

Exemplo

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & \overset{1\vee 2}{\bullet} & \\
S: & \underset{1}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} & \underset{3}{\bullet} & \longmapsto & \partial_3 S: \; \underset{1}{\bullet} \arrow[ur] & & \underset{2}{\bullet} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & \langle e_1+e_2\rangle & \\
 & & \langle e_1, e_2\rangle & & & & & \\
 & & & & & & \langle e_1+e_2\rangle & \\
V: & \langle e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \langle e_1+e_2\rangle & \longmapsto & \partial_3(V): \; 0 \arrow[ur] & & \langle e_1+e_2\rangle \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

$(\mathfrak{sp}_S)_c$ denota subcategoria plena de $\mathfrak{sp}_S$ que consiste das representações que não têm somando $V = (V_0\,; V_i)_{i \in S}$ com $V_c = 0$.

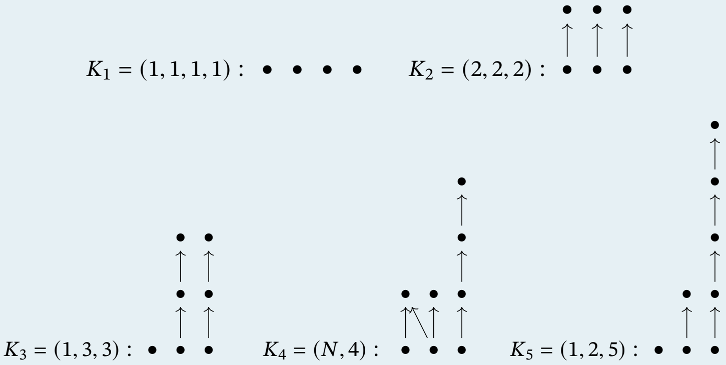
Teorema (Gabriel)

S finito, $c \in S$ maximal, $\omega(S \setminus c^{\triangledown}) \leq 2$ e $\partial_c(S)$ o diferencial de S com respeito a c.

- *$\partial_c : \mathfrak{sp}_S \longrightarrow \mathfrak{sp}_{\partial_c S}$ é aditivo, pleno e denso – i.e. para todo $W \in \mathfrak{sp}_{\partial_c S}$ existe algum $V \in \mathfrak{sp}_S$ tal que $W \cong \boldsymbol{\partial_c}(V)$.*
- *$f : V \longrightarrow W$ mapa em $(\mathfrak{sp}_S)_c$ é isomorfismo $\iff$ $\boldsymbol{\partial_c}(f)$ é isomorfismo.*
- *$\#Ind(\mathfrak{sp}_S) = \#Ind(\mathfrak{sp}_{\partial_c S}) + |\partial_c S \setminus c^{\triangledown}| + 1$*

Teorema (Kleiner)

Dado S um poset finito, $\mathfrak{sp}_S$ é de tipo finito de representação se e somente se S não contém os subposets críticos de Kleiner:



1 Considerações Iniciais

2 Representações Matriciais

3 Representações por Subespaços

4 Funtor Redução

5 Diferenciação: Elemento Maximal

6 Bibliografia

- Daniel Simson. *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*. Yverdon Gordon and Breach, 1992.

- David M. Arnold. *Abelian Groups and Representations of Finite Partially Ordered Sets*. Springer New York, 2000.

- V. M. Bondarenko, Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, M. Kleiner, S. A. Kruglyak, S. A. Ovsienko. *In Memory of Andrei Vladimirovich Roiter*. `https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/collect/roiter.pdf` (Acesso em 15/04/2021).

- Pièrre Gabriel. *Représentations Indécomposables des Ensembles Ordonnés*. Séminaire Dubreil. Algèbre, tome 26 (1972 - 1973), exp. n^{o}13, p. 1-4.