Homologia de Hochschild e sua Morita-invariância

Guilherme

17 de Setembro de 2021

O que faremos?

Histórico

1925: Homologia são grupos abelianos (E. Noether)
1945: G. Hochschild define cohomologia de álgebras associativas.
1956: H. Cartan & S. Eilenberg definem através dos funtores Ext e Tor.

Notações

- k é um corpo arbitrário
- A é uma k-álgebra
- M é um A-bimódulo
- $\otimes = \otimes_k$
- $A^{\otimes q} = A \otimes \ldots \otimes A$ (q vezes)
- $A^{\otimes 0} = k$

Homologia de Hochschild

Tome o complexo de cadeias (de k-espaços vetoriais)

$$0 \xleftarrow{\partial_0} M \ldots \xleftarrow{\partial_q} M \otimes A^{\otimes q} \xleftarrow{\partial_{q+1}} M \otimes A^{\otimes q+1} \leftarrow \ldots \quad ,$$

onde a operador de bordo ∂_q é dado por

$$\begin{aligned}\partial_q(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_q) =& ma_1 \otimes \ldots \otimes a_q + \\ &+ \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_q + \\ &+ (-1)^q a_q m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{q-1}\end{aligned}$$

Homologia de Hochschild

Definição

A homologia de Hochschild do par (A, M) é a homologia do complexo acima, isto é,

$$HH_q(A, M) = \frac{\ker(\partial_q)}{\mathrm{Im}(\partial_{q+1}))}.$$

Também usaremos a notação $HH_q(A) := HH_q(A, A)$.

Homologia de grau 0

Por exemplo, temos que $HH_0(A, M) = \ker(\partial_0)/\mathrm{Im}(\partial_1)$, onde $\partial_0 = 0$ e $\partial_1 \colon M \otimes A \to M$ é tal que

$$\partial_1(m \otimes a) = ma - am$$

Logo:

Proposição

$HH_0(A, M) \cong M/[A, M]$.

Exemplos da homologia

1. $HH_n(k) = \begin{cases} k, & n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$
2. $HH_n(k[x]) = \begin{cases} k[x], & n = 0, 1 \\ 0, n > 0 \end{cases}$
3. Se Q não tem ciclos orientados, então
$$HH_n(kQ) \cong \begin{cases} k^{Q_0}, & n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$$

Exemplos da homologia

1. Se $\mathrm{char}(k) \nmid m$, então

$$HH_n\Big(\frac{k[x]}{(x^m)}\Big) \cong \begin{cases} k[x]/(x^m), & n = 0 \\ k[x]/(x^{m-1}), & n > 0 \end{cases}.$$

2. Se $\mathrm{char}(k) \mid m$, então

$$HH_n(k[x]/(x^m)) \cong k[x]/(x^m) \ \ \forall n.$$

Através do Ext e Tor

Temos a álgebra envelopante $A \otimes A^{op}$.

Teorema

Enxergando M como um $(A \otimes A^{op})$-módulo à direita, a homologia de Hochschild satisfaz o seguinte isomorfismo:

$$HH_q(A, M) \cong \mathit{Tor}_q^{A \otimes A^{op}}(M, A).$$

Através do Ext e Tor

Definição

Enxergando M como um $(A \otimes A^{op})$-módulo à esquerda, a cohomologia dada por

$$HH^*(A, M) := \mathrm{Ext}^*_{A \otimes A^{op}}(A, M)$$

é chamada de *cohomologia de Hochschild*.

Proposição

$HH^0(A, M) \cong \{m \in M \colon am = ma\} =: M^A$

Notações

- *A-Mod* é a categoria dos A-módulos à esquerda.
- *Mod-A* é a categoria dos A-módulos à direita.
- *B-Bimod-A* é a categoria dos B-A-bimódulos, com B agindo à esquerda e A agindo à direita.

Equivalência de Morita

Definição

Dizemos que dois anéis A e B são Morita-equivalentes se suas categorias de módulos A-*Mod* e B-*Mod* são equivalentes.

Exemplo

Para todo $n \geqslant 1$, vale que A e $M_n(A)$ são Morita-equivalentes.

Definição

Um A-módulo P é dito um **gerador** se todo A-módulo é isomorfo a um quociente de uma soma direta de cópias de P.

Equivalência de Morita

Definição

Um A-módulo é dito um **progerador** se ele é um

- gerador
- projetivo
- finitamente gerado.

Exemplo

A é um progerador em A-Mod, pois todo A-módulo é quociente de um módulo livre:

$$M = \frac{\bigoplus_I A}{Q}$$

Equivalência de Morita

Teorema

Sendo A e B anéis, temos as equivalências:

1. *A e B são Morita-equivalentes.*
2. *Existe um progerador $P \in$ Mod-A tal que $B \cong End_A(P)$.*
3. *Existem bimódulos $P \in B$-Bimod-A e $Q \in A$-Bimod-B tais que $P \otimes_A Q \cong B$ e $Q \otimes_B P \cong A$.*

Equivalência de Morita

Esboço da demonstração.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Tome uma equivalência de categorias $F\colon \mathit{Mod}\text{-}B \to \mathit{Mod}\text{-}A$. Dado que B é um progerador, pode-se provar que $F(B)$ também é um progerador em A-Mod. E dado o isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_B(B) &\cong B \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

podemos chegar que

$$B \cong \mathrm{End}_B(B) \cong \mathrm{End}_A(F(B)).$$

□

Equivalência de Morita

Esboço da demonstração.

$(2) \Rightarrow (3)$: Tomando o progerador P (de *Mod*-A), podemos dar a ele uma estrutura de B-A-bimódulo usando o isomorfismo $B \cong \mathrm{End}_A(P)$ e que $\mathrm{End}_A(P)$ age em P à esquerda:

$$b \cdot p := b(p), \;\; b \in \mathrm{End}_A(P), \;\; p \in P$$

Agora, o bimódulo "inverso" de P é definido por $Q := \mathrm{Hom}_A(P, A)$, com a seguintes ações de A e de $\mathrm{End}_A(P) \cong B$:

$$(a \cdot q)(p) := aq(p)$$

Equivalência de Morita

Esboço da demonstração.

$(2) \Rightarrow (3)$: Tomando o progerador P (de *Mod*-A), podemos dar a ele uma estrutura de B-A-bimódulo usando o isomorfismo $B \cong \mathrm{End}_A(P)$ e que $\mathrm{End}_A(P)$ age em P à esquerda:

$$b \cdot p := b(p), \;\; b \in \mathrm{End}_A(P), \;\; p \in P$$

Agora, o bimódulo "inverso" de P é definido por $Q := \mathrm{Hom}_A(P, A)$, com a seguintes ações de A e de $\mathrm{End}_A(P) \cong B$:

$$(a \cdot q)(p) := aq(p)$$

$$(q \cdot b)(p) := (q \circ b)(p)$$

$\square$

Equivalência de Morita

Esboço da demonstração.

(3) $\Rightarrow$ (1) : O seguinte par de funtores formam uma equivalência de categorias:

$$P \otimes_A - : A\text{-}Mod \to B\text{-}Mod$$

$$Q \otimes_B - : B\text{-}Mod \to A\text{-}Mod,$$

Equivalência de Morita

Esboço da demonstração.

(3) $\Rightarrow$ (1) : O seguinte par de funtores formam uma equivalência de categorias:

$$P \otimes_A -\colon A\text{-}Mod \to B\text{-}Mod$$

$$Q \otimes_B -\colon B\text{-}Mod \to A\text{-}Mod,$$

pois

$$Q \otimes_B (P \otimes_A -) \cong (Q \otimes_B P) \otimes_A - \cong A \otimes_A - \cong id_{A\text{-}Mod}.$$

$\square$

Invariância

Teorema

A (co)homologia de Hochschild é Morita-invariante. Isto é: se A e B são k-álgebras Morita-equivalentes, então $HH_*(A) \cong HH_*(B)$ *e* $HH^*(A) = HH^*(B)$.

Invariância

Esboço da demonstração

Tome os funtores

$$P \otimes_A - \otimes_A Q \colon A\text{-}Bimod \to B\text{-}Bimod$$

$$Q \otimes_B - \otimes_B P \colon B\text{-}Bimod \to A\text{-}Bimod.$$

Esses funtores levam resolução projetiva em resolução projetiva, pois

- são funtores **exatos**, já que P e Q podem ser escolhidos como projetivos.

Invariância

Esboço da demonstração

Tome os funtores

$$P \otimes_A - \otimes_A Q \colon A\text{-}Bimod \to B\text{-}Bimod$$

$$Q \otimes_B - \otimes_B P \colon B\text{-}Bimod \to A\text{-}Bimod.$$

Esses funtores levam resolução projetiva em resolução projetiva, pois

- são funtores **exatos**, já que P e Q podem ser escolhidos como projetivos.
- levam módulo **projetivo em projetivo**.

Invariância

Esboço da demonstração

Com mais (muitos) detalhes, prova-se que os grupos de homologia:

- $\mathrm{Ext}_{A\otimes A^{op}}(A, A)$ e $\mathrm{Ext}_{B\otimes B^{op}}(B, B)$ são isomorfos.
- $\mathrm{Tor}_{*}^{A\otimes A^{op}}(A, A)$ e $\mathrm{Tor}_{*}^{B\otimes B^{op}}(B, B)$ são isomorfos.

Invariância

Corolário

Se A e B são k-álgebras Morita-equivalentes, então seus centros são isomorfos.

Demonstração

Basta lembrar que $HH^0(A)$ é o centro de A.

Corolário

Duas álgebras comutativas são Morita-equivalentes se, e somente se, elas são isomorfas.

Referências

- Kassel, Christian, **Homology and cohomology of associative algebras. A concise introduction to cyclic homology**, Advanced School on Non-commutative Geometry ICTP, Trieste, August 2004.
- Booth, Matt, **An Introduction to Morita Theory** , October 2015.
- Hochschild, G., **On the cohomology groups of an associative algebra**, Annals of Mathematics, 1945.