# Dimensões Homológicas II

Guilherme da Costa Cruz

Instituto de Matemática e Estatística - USP

5 de Novembro de 2021

# O que faremos?

1. Dimensão global de Anéis Noetherianos
2. Anéis semi-primários
3. Produto tensorial

# O artigo

Auslander, Maurice, **On the dimension of Modules and Algebras (III)**, 1955.

# Notações

- $R$ é um anel associativo com unidade
- $l$.pd é a dimensão projetiva de um módulo à esquerda e $r$.pd a de um módulo à direita.
- $l$.gldim$(R)$ é a dimensão global à esquerda de $R$, isto é, o supremo das dimensões projetivas de seus módulos à esquerda
- $r$.gldim é a dimensão global à direita

# Simplificando a dim. global

## Teorema

*Vale que:*

$$l.gldim(R) = \sup_B l.pd_R(B) = \sup_I l.pd_R(R/I),$$

*onde os supremos são tomados para $B$ variando entre os $R$-módulos à esquerda gerados por um elemento e $I$ variando entre todos os ideais à esquerda de $R$.*

## Corolário

*Se $R$ não é semissimples, então $l.gldim(R) = 1 + \sup_I l.pd_R I$*

# A dimensão fraca

Um módulo à esquerda $M$ é dito **plano** se $- \otimes_R M$ é um funtor exato.

## Definição

A **dimensão fraca** de um $R$-módulo à esquerda $M$ é o menor número $n$ para o qual existe existe uma resolução de $M$ por módulos planos cujo comprimento é $n$:

$$0 \to F_n \to \ldots \to F_0 \to M \to 0$$

Denotamos por $l.\mathrm{wd}(M)$.

# A dimensão fraca

**Proposição (Rotman 8.17)**

*Sobre um R-módulo à esquerda M, é equivalente*

1. $l.wd(M) < n$
2. $Tor_n^R(N, M) = 0$ *para todo R-módulo à direita N.*

Tomando o supremo dentre todos os $M$, temos definida a **dimensão global fraca** $w.\text{gldim}(R)$.

# Não é tão fraca assim

**Teorema (Auslander)**

*Se $R$ é noetheriano à esquerda, então $l.gldim(R) = w.gldim(R)$.*

Como relacionar $\mathrm{Tor}$ com $\mathrm{Ext}$? Ou ser projetivo com ser plano?

**Proposição**

*Para todo $R$-módulo à esquerda $M$, vale que $l.wd(M) \leqslant l.pd(M)$.*

**Proof.**

Basta lembrar que todo módulo projetivo é plano. $\square$

# Não é tão fraca assim

## Definição

Um $R$-módulo $M$ é **finitamente apresentável** se existe uma sequência exata $R^m \to R^n \to M \to 0$. Ou, equivalentemente, se $M$ é da forma $R^n/Q$, onde $Q$ é um módulo finitamente gerado.

## Teorema

*Para módulos finitamente apresentáveis, é equivalente ser projetivo e ser plano.*

# Não é tão fraca assim

**Corolário (Rotman 3.57)**

*Se $R$ é noetheriano à esquerda e $M$ é $R$-módulo à esquerda plano e finitamente gerado, então $M$ é projetivo.*

**Proof.**

Basta ver que todo $R$-módulo à esquerda finitamente gerado é finitamente apresentável . □

**Teorema**

*Se $R$ é noetheriano à esquerda e $M$ é $R$-módulo à esquerda finitamente gerado, então $l.wd(M) = l.pd(M)$.*

# Não é tão fraca assim

**prova do teorema do Auslander:**

O primeiro teorema que vimos hoje nos diz que a dimensão global pode ser tomada pelo supremo de módulos $M$ f.g. Pode-se provar que o mesmo também vale para a dimensão fraca. Logo:

$$l.\text{gldim}(R) = \sup_{M \text{ f.g}} l.\text{pd}(M) = \sup_{M \text{ f.g}} l.\text{wd}(M) = w.\text{gldim}(R).$$

**Corolário**

*Se $R$ é bilateralmente noetheriano, então $l.gldim(R) = w.gldim(R) = r.gldim(R)$.*

# Anéis semi-primários

## Definição

Um anel $R$ é dito **semi-primário** se o seu radical de Jacobson $J(R)$ é nilpotente e se $\overline{R} = R/J(R)$ é um anel semssimples.

## Exemplo

- Todo anel artiniano é semi-primário.
- Se $J(R) = 0$ e $R$ não é semissimples, então $R$ não é semi-primário.
  - $\mathbb{Z}$ e $k[x]$ não são semi-primários.
- $k[[x]]$ não é semi-primário, pois $J(k[[x]]) = (x)$ não é nilpotente.

# Anéis semi-primários

**Teorema (Hopkins-Levitzki, 1939)**

*Se $R$ é semi-primário, então é equivalente para um $R$-módulo $M$:*

- *$M$ é artiniano*
- *$M$ é noetheriano*
- *$M$ admite uma série de composição*

**Corolário**

1. *$R$ é artiniano (à esquerda) se, e somente se, é noetheriano (à esquerda) e semi-primário*
2. *Se $R$ for artiniano à esquerda, então $R$-mod é uma categoria Krull-Schmidt.*

# Anéis semi-primários: módulos simples

## Lema

*Se $\overline{R} = R/J(R)$ é semissimples, então todo $R$-módulo simples é somando direto de $\overline{R}$.*

## Proof.

Sendo $S$ um $R$-módulo simples e $0 \neq s \in S$, temos que

$$S \cong R/\mathrm{ann}_R(s) \cong \overline{R}/\mathrm{ann}_{\overline{R}}(s).$$

Assim, $S$ é um $\overline{R}$-módulo simples e somando direto de $\overline{R}$ (podendo ser visto como módulo sobre $R$ ou sobre $\overline{R}$). □

# Dimensões de módulos

## Proposição

*Se $R$ é semi-primário e $\overline{R} = R/J(R)$, então é equivalente para um $R$-módulo $M$ à esquerda:*

a. $Tor_n^R(\overline{R}, M) = 0$.
b. $Tor_n^R(S, M) = 0$ *para todo módulo à direita simples* $S$.
c. $l.wd(M) < n$.
d. $Ext_R^n(M, \overline{R}) = 0$.
e. $Ext_R^n(M, S) = 0$ *para todo módulo à esquerda simples* $S$.
f. $l.pd(M) < n$.

# Dimensões de módulos

## Esboço da demonstração.

$a) \Rightarrow b)$ e $d) \Rightarrow e)$ seguem do lema anterior e do fato que $\mathrm{Ext}$ e $\mathrm{Tor}$ comutam com somas diretas.
$f) \Rightarrow a)$ segue do fato geral de que $l.\mathrm{pd}(M) \geqslant \mathrm{wd}(M)$.
Vejamos $c) \Rightarrow d)$: usando um resultado do livro do Cartan e do Eilenberg, temos que, se $I$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo, então, para todo $N$ módulo à direita,

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_n^R(N, M), I)$$

Assim, se vale $c)$, então $\mathrm{Ext}_R^n(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I)) = 0$. □

# Dimensões de módulos

## Esboço da demonstração.

Tome $I$ tal que $\overline{R}$ pode ser mergulhado em $I$ como grupo abeliano, então

$$\begin{aligned} \overline{R} &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overline{R}, I) \\ a &\mapsto (f_a \colon r \mapsto r \cdot a) \end{aligned}$$

é um $\overline{R}$-monomorfismo.

Dado que $\overline{R}$ é semissimples, temos que $\overline{R}$ é somando direto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overline{R}, I)$. Logo, usando $N = \overline{R}$ e que $\mathrm{Ext}(M, -)$ preserva somas diretas, podemos concluir que

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, \overline{R}) = 0$$

$\square$

# Dimensão global de anéis semi-primários

## Corolário

*Se $R$ é um anel semi-primário, então $l.gldim(R) = w.gldim(R) = r.gldim(R)$.*

## Teorema

*Se $R$ é semi-primário e $\overline{R} = R/J(R)$, então*

$$\begin{aligned} gldim(R) =& l.pd_R(\overline{R}) \\ =& 1 + l.pd_R(J(R)) \\ =& \sup_S l.pd_R(S), \end{aligned}$$

*onde o supremo é tomado sobre todos os $R$-módulos simples $S$.*

# Dimensão global de anéis semi-primários

## Corolário

*Se $R$ é um anel semi-primário e $\overline{R} = R/J(R)$, então é equivalente:*

a. $gldim(R) < n$
b. $Ext_R^n(\overline{R}, \overline{R}) = 0$
c. $Tor_n^R(\overline{R}, \overline{R}) = 0$

# Dimensão global do produto tensorial

**Teorema**

*Se $A$ e $B$ são k-álgebras, então*

$$w.gldim(A \otimes B) \geqslant w.gldim(A) + w.gldim(B).$$

*Se assumirmos que $A$ e $B$ são semi-primárias e $\overline{A} \otimes \overline{B}$ é semissimples, então $A \otimes B$ é semi-primária e*

$$gldim(A \otimes B) = gldim(A) + gldim(B).$$

# Dimensão global do produto tensorial

Um resultado do livro do Cartan e Eilenberg diz que

$$\sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}_p^A(M_1, N_1) \otimes \mathrm{Tor}_q^B(M_2, N_2) \cong \mathrm{Tor}_n^{A\otimes B}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$$

para todo $n \geqslant 0$. Assim, se $w.\mathrm{gldim}(A) + w.\mathrm{gldim}(B) \geqslant n$, então existem $M_1, N_1, M_2, N_2$ tais que

$$\mathrm{Tor}_p^A(M_1, N_1) \neq 0, \mathrm{Tor}_q^B(M_2, N_2) \neq 0$$

com $p + q = n$, então

$$\mathrm{Tor}_n^{A\otimes B}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2) \neq 0$$

e, portanto, $w.\mathrm{gldim}(A \otimes B) \geqslant n$.

# Dimensão global do produto tensorial

Para o caso semi-primário, temos o seguinte isomorfismo

$$\frac{A \otimes B}{J(A) \otimes B + A \otimes J(B)} \cong \frac{A}{J(A)} \otimes \frac{B}{J(B)} = \overline{A} \otimes \overline{B},$$

onde pode-se notar que $J(A) \otimes B + A \otimes J(B)$ é nilpotente. Usando que $\overline{A} \otimes \overline{B}$ é semissimples, chega-se que $A \otimes B$ é semi-primária. Agora, pelo último corolário e o fato que

$$\sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}_p^A(\overline{A}, \overline{A}) \otimes \mathrm{Tor}_q^B(\overline{B}, \overline{B}) \cong \mathrm{Tor}_n^{A \otimes B}(\overline{A \otimes B}, \overline{A \otimes B})$$

para todo $n \geqslant 0$, temos a conclusão.

# Referências

- Auslander, Maurice, **On the dimension of Modules and Algebras (III)**
- Brumer, **Pseudocompact Algebras, Profinite Groups and Class Formations**, 1966
- Lam, **A First Course In Noncommutative Rings**, 1991
- Rotman, **Introduction to Homological Algebra**