Recobrimentos, Superfícies de Riemann e Teoria de Galois

Gabriel Bassan dos Santos

Relembrando...

Teorema (Fundamental da teoria de Galois).

Dada L/K extensão galoisiana finita, temos

- $|Gal(L/K)| = [L:K]$

- $$\{ H \leq Gal(L/K) \} \underset{Gal(L/F) \leftarrow\!\shortmid F}{\overset{H \mapsto L^H}{\rightleftarrows}} \{ K \subseteq F \subseteq L \}$$

- F/K é Galois $\Leftrightarrow Gal(L/F) \triangleleft Gal(L/K)$ e nesse caso

$$Gal(F/K) \cong Gal(L/K) / Gal(L/F)$$

Uma pergunta natural é a seguinte:

Qualquer grupo finito G é $Gal(L/K)$ para algum L/K?

Resposta:

E se fixarmos K?

• Para $K = \mathbb{Q}$ não sabemos em geral. Mas sabemos para

1. G grupo abeliano finito.
2. G grupo solúvel (Shafarevich '54/89)

• Para $K = \mathbb{Q}_p$ sabemos que $\mathrm{Gal}(L/K)$ é sempre solúvel. Mas não sabemos se vale para todo grupo solúvel.

• Hoje veremos como usar métodos analíticos/topológicos para provar que a pergunta vale para $K = \mathbb{C}(t)$.

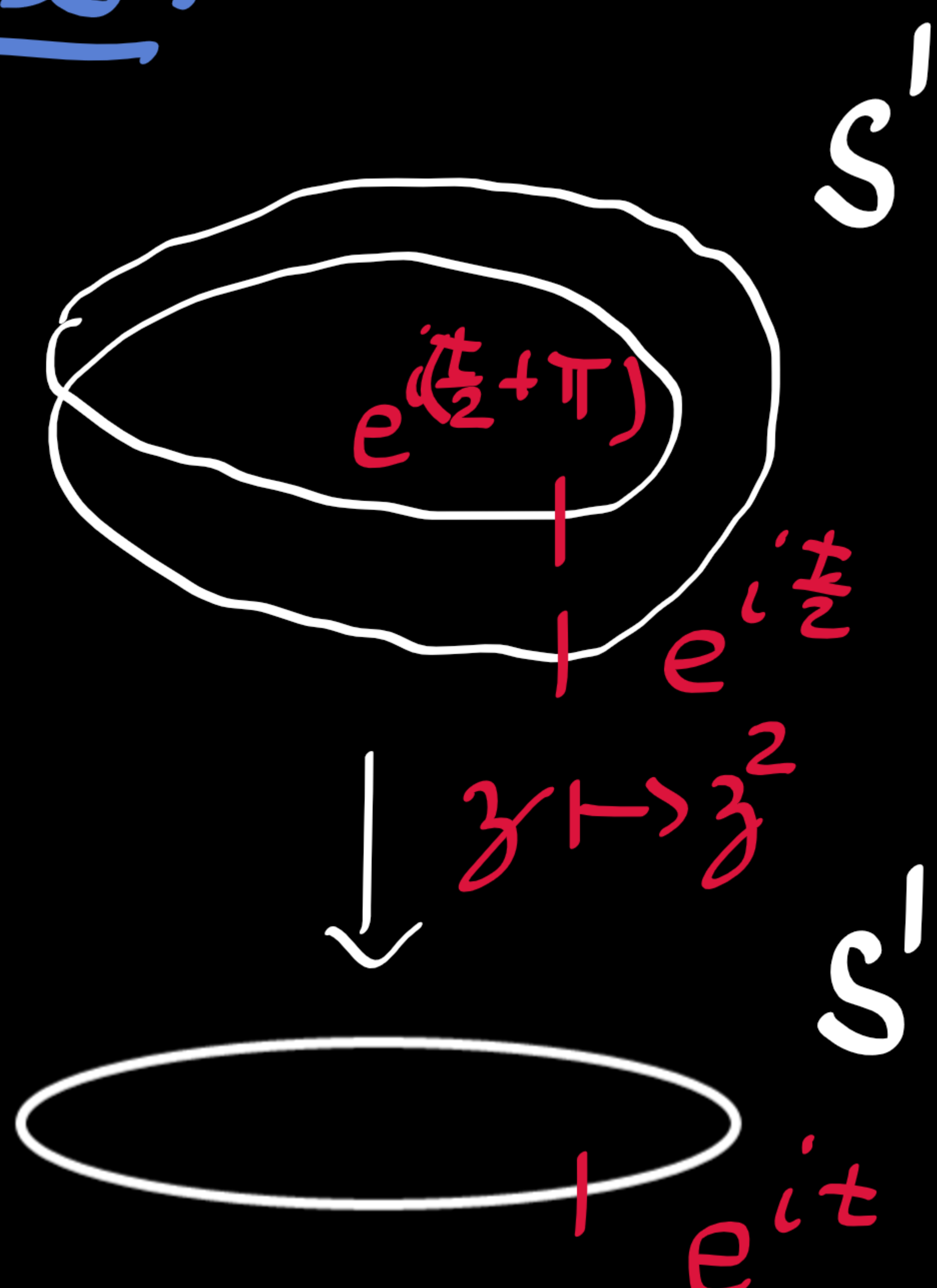
• Recobrimentos

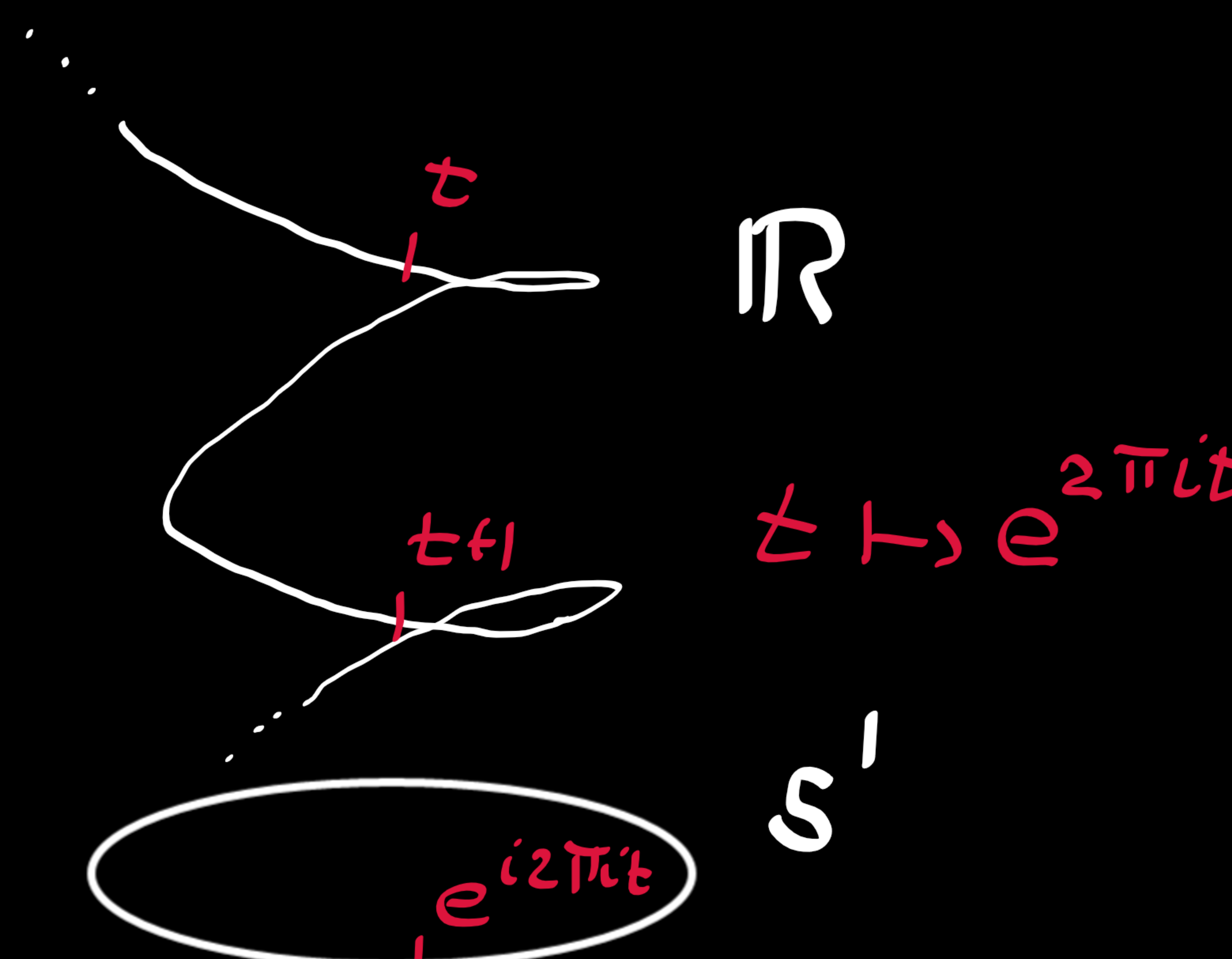
<u>Def</u>: Seja X esp. top. $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow p \\ X \end{array}$ é recobrimento se todo $x \in X$ possui vizinhança V t.q. $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ com cada $U_i \in Y$ aberto e $p|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\cong} V$.

(<u>obs</u>: $|p^{-1}(x)|$ é loc. const.)

Grau do rec.

<u>Ex</u>:





$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ \downarrow \exp \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{array}$$

Como criar recobrimentos?

Dado um grupo G agindo em Y ($G \circlearrowright Y$), i.e., $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(Y)$, t.q. $\forall y \in Y$ $\exists$ $y \in U \subseteq Y$ aberto t.q. $gU \cap U = \emptyset$, $g \neq e$ então $Y \longrightarrow Y/G$ é recobrimento. (ação propriamente descontínua)

Ex:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \circlearrowright S^n & \qquad & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \circlearrowright S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{RP}^n & & L_n \end{array}$$

Lens Space

Reciprocamente, se $Y \longrightarrow X$ é recobrimento, então $G = \mathrm{Cov}(Y/X) \circlearrowright Y$ é prop. descont.

$$\mathrm{Cov}(Y/X) = \left\{ \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \right\}$$

Mas em geral, o mapa induzido

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & X \\ Y/G \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

não é homeo.

Def: Um recobrimento $Y \longrightarrow X$ é **galoisiano** se o mapa induzido $Y/\mathrm{Cov}(Y/X) \longrightarrow X$ é homeo.

Teorema (Fundamental da teoria de Galois para recobrimentos). Dado $Y \xrightarrow{p} X$ recobrimento galoisiano, temos

$$\cdot \left\{ H \leq \mathrm{Cov}(Y/X) \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{recobrimentos } Z \xrightarrow{q} X \\ \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd} \end{array} \right\}$$

f sempre é rec. galoisiano. Além disso, $Z \longrightarrow X$ é galois se, e só se, $\mathrm{Cov}(Y/Z) \trianglelefteq \mathrm{Cov}(Y/X)$ e nesse caso,

$$\mathrm{Cov}(Z/X) \cong \mathrm{Cov}(Y/X)/\mathrm{Cov}(Y/Z)$$

Ex: Recobrimento universal

Ideia:

Relacionar a teoria de corpos com recobrimentos.

Como?

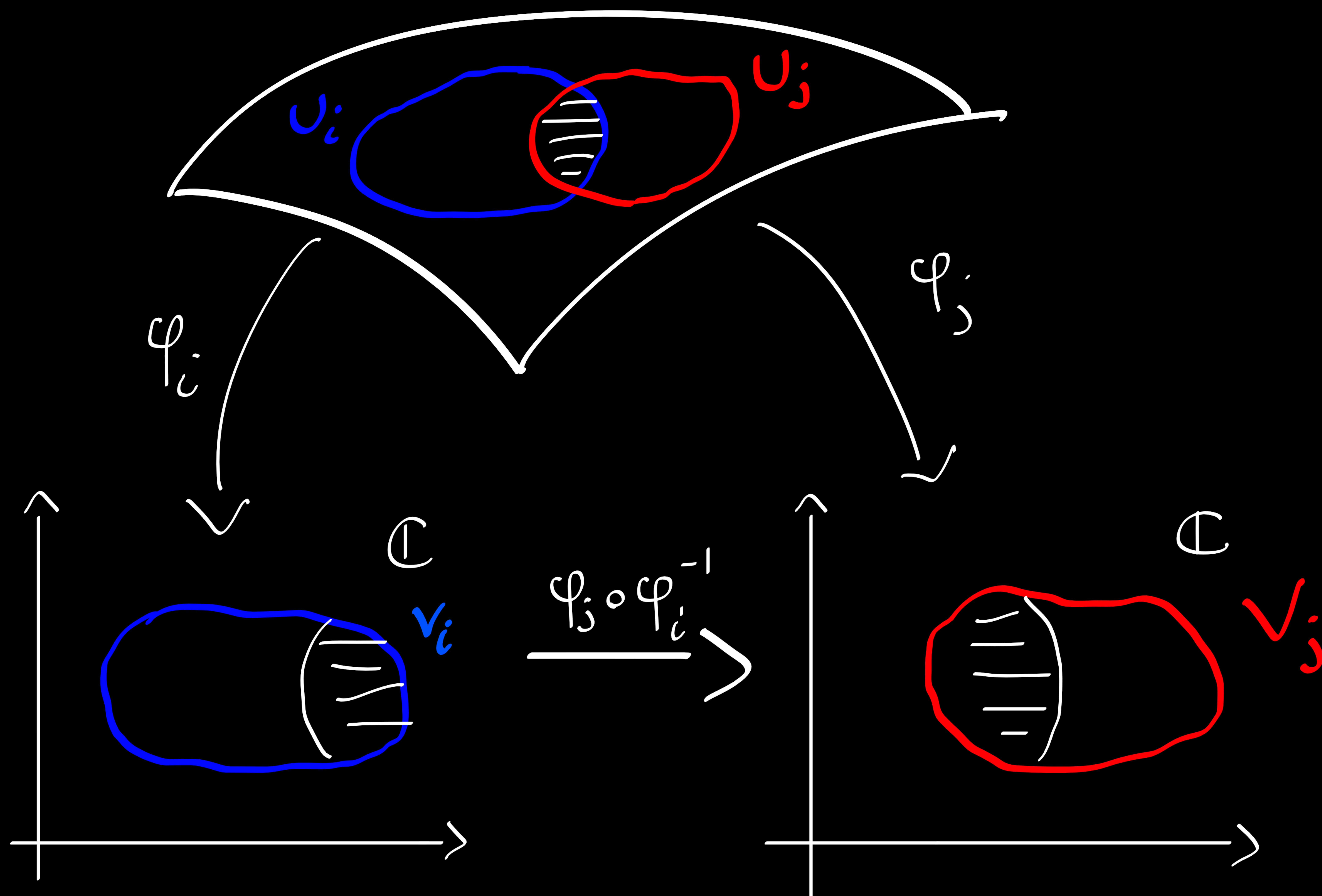
Superfícies de Riemann!

Obs: A partir de agora todo espaço topológico será Hausdorff, conexo, loc. compacto com base enumerável.

Def: X é dito uma **Superfície de Riemann** se existem homeomorfismos $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}\}_i$, onde $\{U_i\}_i$ é cobertura aberta de X, t.q.

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

é holomorfa $\forall\, i,j$

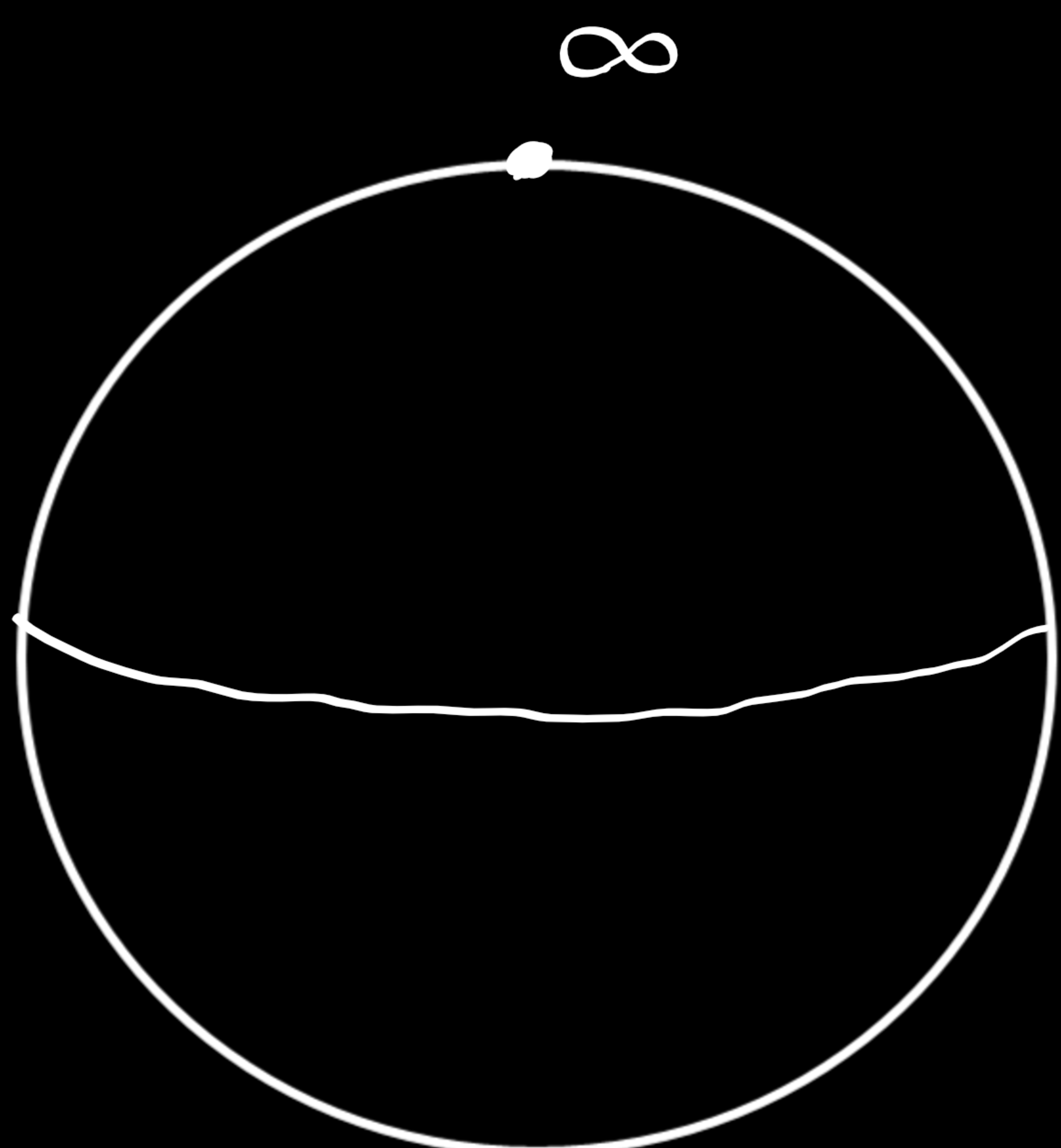


U_i
U_j
φ_i
φ_j
$\mathbb{C}$
V_i
$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$
$\mathbb{C}$
V_j

<u>Disclaimer</u> (Atlas Maximal)

Ex :

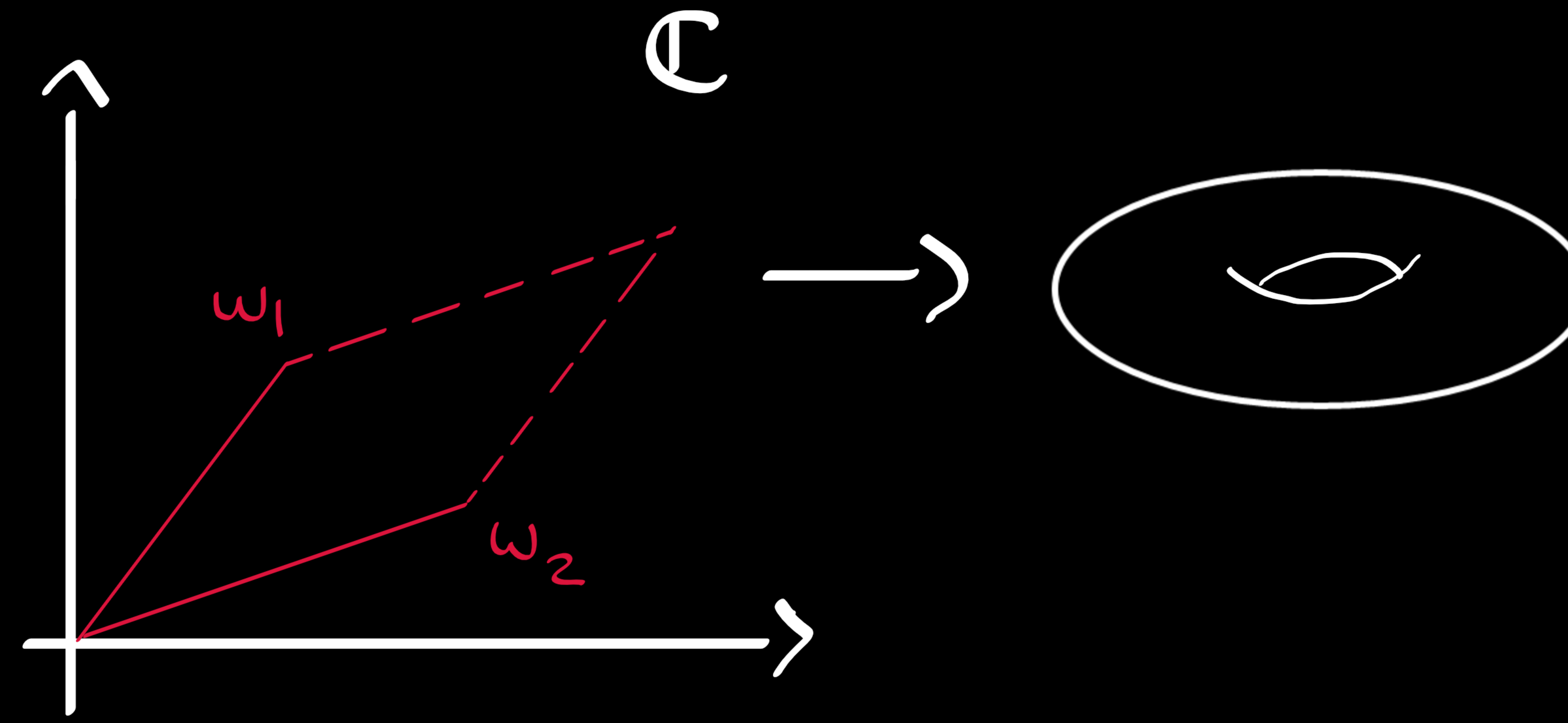
- $\mathbb{CP}^1$



- Toros $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ t.q. $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$

$$\Lambda = \{ n\,\omega_1 + m\,\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$$

$$T^2 = \mathbb{C}/\Lambda$$



Def: $f: X \to Y$ é **holomorfa** em $x \in X$ se $\forall$ carta (U, φ) em $f(x)$ e (V, ψ) carta em x t.q. $U_2 \subseteq f^{-1}(U_i)$, temos que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

é holomorfa.

Obs: Para checar em $x \in X$, basta verificar para um par de cartas.

Def:

- $\mathcal{O}(X) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa} \}$
- $\mathcal{M}(X) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \text{ holomorfa} \}$ (funções meromorfas)

Obs: $\mathcal{M}(X)$ é corpo e a associação $X \longmapsto \mathcal{M}(X)$ é funtorial!

$$\begin{array}{ccccc} Y & & \mathcal{M}(X) & & \varphi \\ \downarrow f & \longmapsto & \downarrow f^* & & \downarrow \\ X & & \mathcal{M}(Y) & & \varphi \circ f \end{array}$$

Teoremas de análise complexa

- (Teo. da Identidade) $f, g : X \longrightarrow Y$ hol. t.q. $f|_A = g|_A$, $A \subseteq X$ com algum ponto de acumulação em X. Então $f = g$.

- (Teo. da singularidade) $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \{ f \in \mathcal{O}(X \setminus \{x\}) \mid f \text{ é limitada em } x \}$ é sobrejetora.

- (Forma local) $f : X \longrightarrow Y$ não cte. $\forall x \in X$ existem cartas (U, φ) em x e (V, ψ) em $f(x)$ t.q. $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é dada por $F(z) = z^{e_x}$ para algum $e_x \in \mathbb{Z}_{>0}$ independente da escolha de cartas.

Índice de ramificação de f em x

Def: $f: X \to Y$ não constante. Definimos

$$X_f := \{ x \in X \mid e_x > 1 \}$$

Pontos de ramificação

Fatos sobre X_f

- f possui fibras discretas e X_f é discreto e fechado.
- $X_f = \emptyset \iff f$ é homeo. local.

Relacionando superfícies de Riemann e recobrimentos

Def: $f: X \longrightarrow Y$ função contínua entre espaços top.
é própria se $f^{-1}(K)$ é compacto $\forall K \subseteq Y$ compacto.

Fatos:

- f é fechada
- f leva fechados discretos em fechados discretos.
- Se f é homeo. local, então f é recobrimento.

Def: $f: X \to Y$ contínua, própria e sobre. é dita um recobrimento ramificado finito de grau n se $\exists\, S \subseteq Y$ fechado discreto t.q. $f: X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ é recobrimento de grau n.

Teo: $f: X \to Y$ holo. não cte. própria. Então f é recobrimento ramificado finito com $S = f(X_f)$.

Vale também a recíproca!

<u>Teo</u> (difícil!) Seja Y uma sup. de Riemann, $S \subseteq Y$ fechado discreto e $p: X' \longrightarrow Y \setminus S$ recobrimento finito. Então existe X sup. de Riemann, uma imersão aberta $X' \hookrightarrow X$ e uma função holo. não cte. própria $f: X \longrightarrow Y$ t.q. $f|_{X'} = p$ e $X' = X \setminus f^{-1}(S)$.

Resumo

$$\left\{\begin{array}{c}\text{funções holo.}\\ \text{próprias n. cte.}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{recobrimentos}\\ \text{ramificados finitos}\end{array}\right\}$$

Ainda mais, se $f: X \to Y$ é holo. própria não cte, então $\mathrm{Aut}(X/Y)$ (biholomorfismos) é isomorfo a $\mathrm{Cov}(X'/Y')$ onde $X' \to Y'$ é o recobrimento induzido por f.

Vamos finalmente em direção ao problema inverso de Galois! Precisaremos de dois lemas

- (Existência de Riemann) Sejam X sup. de Riemann, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. $\exists\, f \in \mathcal{M}(X)$ t.q. f é holo. em cada x_i e $f(x_i) = a_i$.

- Seja $p: X \longrightarrow Y$ recobrimento ramificado finito grau d entre sup. de Riemann (i.e. holo. não cte. própria), então todo $f \in \mathcal{M}(X)$ é raiz de um polinomio $q \in p^*\mathcal{M}(Y)[t]$ de grau d.

Corol: $\mathcal{M}(X)/f^*\mathcal{M}(Y)$ tem gran d.

<u>Teo</u>: $\mathrm{Aut}(X/Y) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{M}(X)/f^*\mathcal{M}(Y))$

Corol: Se $f: X \to Y$ induz um recobrimento galoisiano, de grau d, então $\mathcal{M}(X)/f^*\mathcal{M}(Y)$ é galois e $\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \mathrm{Gal}(\mathcal{M}(X)/f^*\mathcal{M}(Y))$.

Seja G grupo finito, $\exists\, L \supseteq \mathbb{C}(t)$ galois finita t.q.
$Gal(L/\mathbb{C}(t)) \cong G$.