# Teorema de Gabriel para representações de quivers I

Adriana Mayumi Shiguihara

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

30 de abril de 2021

# O que veremos

# Relembrando...

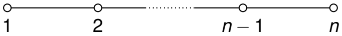
Um *quiver* é um grafo orientado.

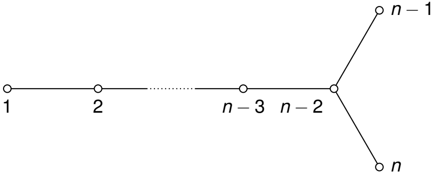
Notação: $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$

- $Q_0$ são os vértices;
- $Q_1$ são as arestas;
- Orientação dada por $s, t \colon Q_0 \to Q_1$:
  $\alpha \in Q_1$ sai de $s(\alpha)$ e chega em $t(\alpha)$.

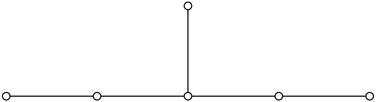
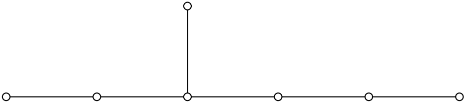
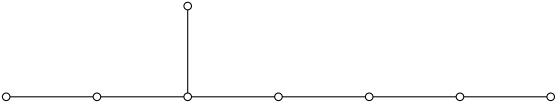
$Q$ sem a orientação é denotado por $\Gamma(Q)$.

# Convenções

- **k** é um corpo algebricamente fechado.
- Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita.
- Todos os quivers são finitos e conexos.
- Grafos de Dynkin são os grafos de tipo $A$, $D$ ou $E$:
  - ◇ $A_n$, $n \geqslant 0$: 

  - ◇ $D_n$, $n \geqslant 4$: 

# Convenções

- $E_6$: 
- $E_7$: 
- $E_8$: 

# Relembrando...

$V$ é uma *representação de $Q$* se associa

- **k**-espaço vetorial $V_i$ a cada vértice $i$;
- transformação linear $V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ a cada aresta $\alpha$.

Notação: $V = (V_i; V_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$.

## Exemplo

$$0 \xrightarrow{0} \mathbf{k} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbf{k}^2$$

é uma representação de

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[r, "\beta"] & \underset{3}{\bullet} \end{tikzcd}$$

*Soma direta* de $V$, $W$ de $Q$:

$$V \oplus W := (V_i \oplus W_i; V_\alpha \oplus W_\alpha),$$

em que

$$V_\alpha \oplus W_\alpha(v, w) = (V_\alpha(v), W_\alpha(w)).$$

Uma representação é *indecomponível* se não é soma direta de representações não nulas.

# Relembrando...

$V, W$ representações de $Q$.
$\rho = (\rho_i)_{i \in Q_0}$ é um *morfismo de representações* $V \to W$ se cada
$\rho_i \colon V_i \to W_i$ é **k**-linear e

$$\begin{tikzcd} V_{s(\alpha)} \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "\rho_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\rho_{t(\alpha)}"] \\ W_{s(\alpha)} \arrow[r, "W_\alpha"] & W_{t(\alpha)} \end{tikzcd}$$

comuta para toda aresta $\alpha$.

Temos assim a *categoria das representações* de $Q$, denotada por $\operatorname{rep} Q$.

# Teorema de Krull–Schmidt(–Remak–Azumaya?)

**Teorema**

$Q$ um quiver, $V \in \operatorname{rep} Q$ não nula.

Existem $V^1, V^2, \ldots, V^r \in \operatorname{rep} Q$ indecomponíveis tais que

$$V \cong V^1 \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^r.$$

Além disso, $V^1, V^2, \ldots, V^r$ são únicas.

# Curiosidade

**Teorema**

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva tal que

- todo objeto de $\mathcal{A}$ é soma direta finita de indecomponíveis;
- para todo $X \in \mathcal{A}$ indecomponível, o anel $\mathtt{End}_{\mathcal{A}}(X)$ é local.

Então vale a unicidade da decomposição em $\mathcal{A}$.

# Forma simétrica de Euler

## Definição

A *forma simétrica de Euler* de $Q$ (em $\mathbb{R}^{Q_0}$), denotada $(\cdot,\cdot)_Q$, é dada pela matriz

$$2\,\mathrm{Id}_n - A,$$

em que $A$ é a matriz de adjacência de $\Gamma(Q)$. Ou seja,

$$(x,y)_Q := 2\left(\sum_{i\in Q_0} x_i y_i\right) - \left(\sum_{\alpha\in Q_1} x_{s(\alpha)}y_{t(\alpha)} + x_{t(\alpha)}y_{s(\alpha)}\right).$$

## Definição

A *forma de Tits* de $Q$ é a forma quadrática $q_Q\colon \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$q_Q(x) := \frac{1}{2}(x, x)_Q,$$

ou seja,

$$q_Q(x) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}.$$

## Exemplo

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \end{tikzcd}$$

$$q_Q(x) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3$$

**Teorema (Gabriel, 1972)**

$Q$ um quiver conexo. São equivalentes:

1. $Q$ tem tipo finito.
2. $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin.
3. $q_Q$ é positiva definida.

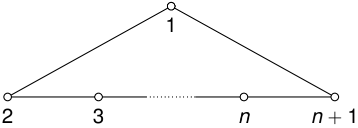
# Curiosidade

**Teorema (Nazarova, 1973)**

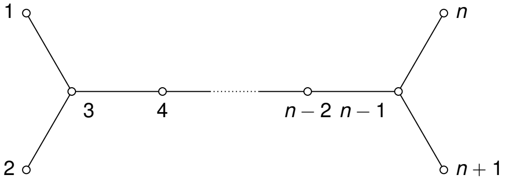
$Q$ um quiver conexo. São equivalentes:

1. $Q$ é de tipo manso.
2. $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin estendido.
3. $q_Q$ é não negativa.

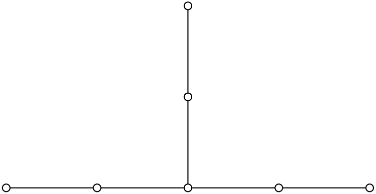
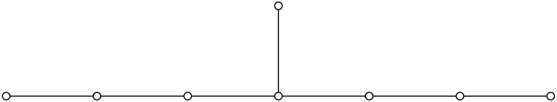
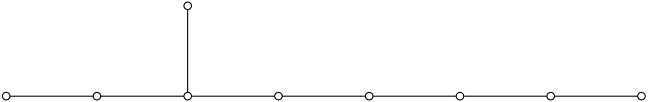
◇ $\widetilde{A}_n$, $n \geqslant 0$:




◇ $\widetilde{D}_n$, $n \geqslant 4$:



# Curiosidade

- $\widetilde{E}_6$: 
- $\widetilde{E}_7$: 
- $\widetilde{E}_8$: 

# Tipo finito $\Longrightarrow$ $q_Q$ positiva definida

## Ideia da prova

- Espaço de representações de $Q$
- Isomorfismos traduzidos em uma ação de grupos
- Interpretação geométrica da hipótese

**Definição***

Uma *variedade (afim)* é um conjunto de zeros comuns de polinômios.

Ou seja, as variedades são os fechados da top. de Zariski.

Um espaço topológico é *irredutível* se não pode ser escrito como união de dois fechados distintos não vazios.

$\mathbb{A}^n$ é irredutível na top. de Zariski.

**Definição**

$G$ é *grupo algébrico* se é grupo $+$ variedade e

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

são morfismos de variedades.

# Ações de grupos algébricos

## Definição

*Ação de grupos algébricos* de $G$ sobre uma variedade $X$:

ação de grupos de $G$ sobre $X$ + morfismo de variedades

Ou seja, morfismo

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tal que, $\forall g, h \in G$, $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} (gh) \cdot x &= g \cdot (h \cdot x), \\ e \cdot x &= x. \end{aligned}$$

$G$ age sobre $X$.

- *Estabilizador* de $x \in X$:

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

- *Órbita* de $x \in X$:

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

**Teorema**

$X$ variedade, $G$ age sobre $X$. $\forall x \in X$,

$$\dim G_x = \dim G - \dim \overline{G \cdot x}.$$

**Observação**

Basta provar que $q_Q(v) > 0$ para $v \in \mathbb{Z}_+^{Q_0}$ não nulo.

- Espaço de representações de dimensão $v$
- Isomorfismos dessas representações como grupo algébrico
- # de representações de dimensão $v$ será finito
- Resultado sobre dimensão

# Espaço de representações

Fixemos $v \in \mathbb{Z}_+^{Q_0}$.

Representação $x$ com $\mathrm{d}(x) = v$:

- Nos vértices - espaços vetoriais $x_i \cong \mathbf{k}^{v_i}$
- Nas arestas - matrizes $x_\alpha \in \mathrm{M}_{v_{t(\alpha)} \times v_{s(\alpha)}}(\mathbf{k})$

## Definição

Definimos o *espaço de representações* de dimensão $v$ como

$$\mathrm{R}(v) := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{M}_{v_{t(\alpha)} \times v_{s(\alpha)}}(\mathbf{k}).$$

## Exemplo

Se $Q$ for

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

então qualquer $V \in \operatorname{rep} Q$ de dimensão $v = (p, q, r)$ é da forma

$$\mathbf{k}^p \xrightarrow{V_\alpha} \mathbf{k}^q \xrightarrow{V_\beta} \mathbf{k}^r \quad ,$$

com

$$V_\alpha \in M_{q\times p}(\mathbf{k}), \qquad V_\beta \in M_{r\times q}(\mathbf{k}).$$

# Espaço de representações

Considerando

$$M_{m\times n}(\mathbf{k}) = \mathbb{A}^{m\cdot n},$$

temos

$$\mathrm{R}(v) = \prod_{\alpha\in Q_1} \mathbb{A}^{v_{t(\alpha)}\cdot v_{s(\alpha)}}$$

e

$$\dim \mathrm{R}(v) = \sum_{\alpha\in Q_1} v_{t(\alpha)} v_{s(\alpha)}.$$

# Espaço de representações: isomorfismo

$x, x' \in \mathrm{R}(v)$.

$x \cong x' \iff$ existe $g = (g_i)_{i \in Q_0}$ com $g_i$ iso. $\forall i$ tal que

$$\begin{tikzcd}
x_{s(\alpha)} \arrow[r, "x_\alpha"] \arrow[d, "g_{s(\alpha)}"'] & x_{t(\alpha)} \arrow[d, "g_{t(\alpha)}"] \\
x'_{s(\alpha)} \arrow[r, "x'_\alpha"] & x'_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

comuta $\forall \alpha$, ou seja,

$$x'_\alpha = g_{t(\alpha)} x_\alpha {g_{s(\alpha)}}^{-1} \quad \forall \alpha.$$

O conjunto dos isomorfismos de $\mathbf{k}^n$ é $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$.

### Observação

$x \cong x' \iff$ existe

$$g = (g_i)_{i \in Q_0} \in \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}_{v_i}(\mathbf{k})$$

tal que

$$x'_\alpha = g_{t(\alpha)} x_\alpha {g_{s(\alpha)}}^{-1} \quad \forall \alpha.$$

# Espaço de representações

Definamos

$$\mathrm{GL}(v) := \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}_{v_i}(\mathbf{k}).$$

- $\mathrm{GL}(v)$ é grupo algébrico*;
- $\mathrm{GL}(v)$ age sobre $\mathrm{R}(v)$ por

$$g \cdot x := \left( g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}{}^{-1} \right)_{\alpha \in Q_1},$$

  e isso é uma ação de grupos algébricos;
- $x, x' \in \mathrm{R}(v)$ são isomorfas $\iff$ estão na mesma $\mathrm{GL}(v)$-órbita.

# Tipo finito $\implies$ $q_Q$ positiva definida

Seja $Q$ de tipo finito.

- \# de indecomp. de $\operatorname{rep} Q$ é finito.
- Fixado $v \in \mathbb{Z}_+^{Q_0}$, só temos # finito de maneiras de compor uma rep. de dimensão $v$.
- \# de $\mathrm{GL}(v)$-órbitas é finito.

# Tipo finito $\implies$ $q_Q$ positiva definida

Podemos escrever

$$\mathrm{R}(v) = \bigcup_{x \in \mathrm{R}(v)} \mathrm{GL}(v) \cdot x = \bigcup_{x \in \mathrm{R}(v)} \overline{\mathrm{GL}(v) \cdot x}.$$

- $\mathrm{R}(v)$ é união finita de fechados.
- $\mathrm{R}(v)$ é espaço afim $\implies$ é irredutível $\implies$ só sobra um termo.

Portanto, o fecho de alguma das órbitas é o espaço todo.

Seja $x \in \mathrm{R}(v)$ com órbita densa.

$$\begin{aligned} q_Q(v) &= \sum_{i \in Q_0} v_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} v_{s(\alpha)} v_{t(\alpha)} \\ &= \dim \mathrm{GL}(v) - \dim \mathrm{R}(v) \\ &= \dim \mathrm{GL}(v) - \dim \overline{\mathrm{GL}(v) \cdot x} \\ &= \dim \mathrm{GL}(v)_x > 0? \end{aligned}$$

O conjunto

$$\{(\lambda \, \mathrm{Id}_{v_i})_i \mid \lambda \in \mathbf{k}^\times\} \subset \mathrm{GL}(v)_x$$

é variedade de dimensão 1.

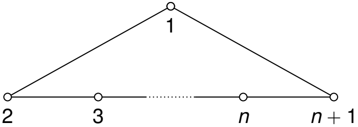
Seja $Q$ tal que $q_Q$ é positiva definida.

### Ideia da prova

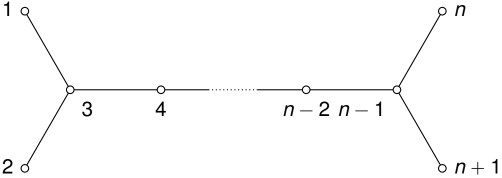
- Forma de Tits de grafo de Dynkin estendido não é positiva definida
- $\Gamma(Q)$ não pode conter Dynkin estendido
- $\Gamma(Q)$ é *árvore* (acíclico, conexo, finito)
- Indução no # de vértices

# Grafos de Dynkin estendidos

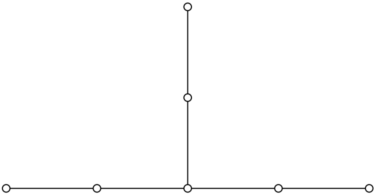
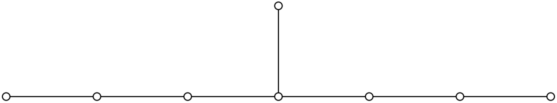
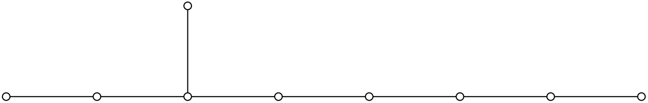
◇ $\widetilde{A}_n$, $n \geqslant 0$:



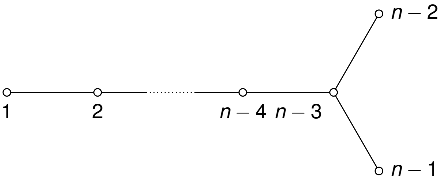

◇ $\widetilde{D}_n$, $n \geqslant 4$:



# Grafos de Dynkin estendidos

- $\widetilde{E}_6$: 
- $\widetilde{E}_7$: 
- $\widetilde{E}_8$: 

## Caso $\Gamma - i = D_{n-1}$ $(n \geqslant 5)$




Seja $j$ o vizinho do vértice $i$ em $\Gamma$.

- $j = 1 \Longrightarrow \Gamma = D_n$.
- $2 \leqslant j \leqslant n-3 \Longrightarrow \widetilde{D}_m \subset \Gamma$.
- $j = n-2$ ou $j = n-1$
  - $n = 5 \Longrightarrow \Gamma = D_5$.
  - $6 \leqslant n \leqslant 8 \Longrightarrow \Gamma = E_n$.
  - $n \geqslant 9 \Longrightarrow \widetilde{E}_8 \subset \Gamma$.

# Referências


James E. Humphreys.
*Linear algebraic groups*.
Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

Alexander Kirillov, Jr.
*Quiver representations and quiver varieties*, volume 174 of *Graduate Studies in Mathematics*.
American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

Dipendra Prasad.
Lectures on algebraic groups, 2002.