Classificação de Fibrados Vetoriais sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Mateus Schmidt

IME-USP

19/03/2021

Table of Contents

Introdução

Convenção

Convencionaremos que, ao falar de uma curva C estaremos falando um esquema integral de dimensão 1, projetivo sobre $\mathbb{C}$. Além disso, hoje estaremos supondo que a curva C é não-singular.

Em particular, nossas curvas possuem estruturas canônicas de superfícies de Riemann compactas.

Classificação de Fibrados Vetoriais sobre Curvas

Dividiremos o nosso problema de classificação de acordo com o *genus* da curva:

- O caso $g = 0$, isto é, o caso em que $C \cong \mathbb{P}^1$ foi resolvido por Alexander Grothendieck em 1956; este é o caso em que iremos nos concentrar hoje.
- O caso $g = 1$, isto é, o caso em que C é uma curva elíptica foi resolvido por Sir Michael Atiyah em 1957.
- O caso $g > 1$ é um problema *wild*, isto é, ele é *pelo menos tão complicado* quanto o problema de classificação de todas as álgebras finitamente geradas sobre $\mathbb{C}$.

Definição

Uma *fibração linear algébrica* sobre C é dado por uma variedade E e um morfismo sobrejetor $\pi : E \to C$ tal que para todo $x \in C$, a fibra de $E_x \doteq \pi^{-1}(x)$ de π sobre x tem uma estrutura de espaço vetorial complexo.

Fibração Trivial

Exemplo

A fibração trivial é dada por $E = C \times \mathbb{C}^r$ e pelo morfismo π de projeção na primeira coordenada.

Morfismos de Fibração

Definição

Um *morfismo de fibrações lineares algébricas* sobre C entre fibrações (E, π) e (E', π') é dado por um morfismo de variedades variedade $f\colon E \to E'$ que comuta com as projeções; além disso o mapa induzido nas fibras $f_x : E_x \to E'_x$ é linear.

Fibrados Vetoriais

Definição

Um *fibrado vetorial (algébrico) de rank r* sobre C é uma fibração linear algébrica $\pi : E \to C$ tal que existe uma cobertura por abertos U_i de C e isomorfismos de fibrações:

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}^r. \tag{1}$$

Os isomorfismos φ_i são chamados de *trivializações* de E. A condição acima é às vezes chamada de *trivialidade local*.

Mudanças de Coordenadas e Cociclos

Dadas duas trivializações de E, digamos $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}^r$ e $\varphi_j : \pi^{-1}(U_i) \cong U_j \times \mathbb{C}^r$ sobre U_i e U_j respectivamente, temos um *mapa de mudança de coordenadas* bem definido sobre $U_i \cap U_j$:

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^r \to U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^r \tag{2}$$

dado por $(x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v)$, onde $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Mudanças de Coordenadas e Cociclos

- Os mapas g_{ij} são chamados *funções de transição*. Eles satisfazem a *condição de cociclo*:

$$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik} \tag{3}$$

sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$;

- **IMPORTANTE:** Podemos recuperar o nosso fibrado E à partir da cobertura U_i de C e das funções de transição g_{ij}, usando-as para colar os fibrados $U_i \times \mathbb{C}^r$ ao longo das interseções $U_i \cap U_j$.

Operações com fibrados

Dados dois fibrados E, E' sobre C, podemos fazer a maioria das construções que fazemos com espaços vetoriais como por exemplo somas diretas, produtos tensoriais, produto exterior, dual etc. com fibrados, realizando a respectiva operação nas fibras.
Por exemplo, o fibrado $E \otimes E'$ é o fibrado cuja fibra sobre $x \in C$ é $(E \otimes E')_x \doteq E_x \otimes E'_x$.

Exemplo essencial: o fibrado tautológico sobre $\mathbb{P}^1$

Um fibrado vetorial de rank 1 é comumente chamado de *fibrado de linha*. Vamos agora construir o exemplo mais importante de fibrado de linha sobre a esfera de Riemann: o *fibrado tautológico* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

Exemplo essencial: o fibrado tautológico sobre $\mathbb{P}^1$

Considere o subconjunto de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ dado por pares (L, z) consistindo de uma reta $L \in \mathbb{P}^1$ e de todos os pontos $z \in \mathbb{C}^2$ que estão nesta reta. Este conjunto define de um fibrado de linha sobre $\mathbb{P}^1$ chamado o *fibrado tautológico* e denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Suas funções de transição com respeito à *cobertura standard* $\{U_0, U_1\}$ de $\mathbb{P}^1$ são dadas por multiplicação por $t = \frac{x_0}{x_1}$.

Exemplo essencial: o fibrado tautológico sobre $\mathbb{P}^1$

Seu fibrado dual $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \doteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^\vee$ é chamado de *fibrado hiperplano* sobre $\mathbb{P}^1$. Mais geralmente denotamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ o fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\otimes d}$.

Fibrados de linha: o grupo de Picard

Classes de isomorfismo de fibrados de linha sobre C formam um grupo chamado o *grupo de Picard* de C, denotado por $\mathrm{Pic}(C)$, com a operação dada pelo produto tensorial.

Fibrados de linha: o grupo de Picard

Classes de isomorfismo de fibrados de linha sobre $\mathbb{P}^1$ são os primeiros objetos que vamos classificar. Temos

Teorema

$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \rangle$.

E portanto qualquer fibrado de linha sobre $\mathbb{P}^1$ é da forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$, para algum $d \in \mathbb{Z}$.

Fibrados de linha: o grupo de Picard

Quando tratarmos da classificação de fibrados de linha de rank arbitrário sobre $\mathbb{P}^1$, os fibrados $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ vão cumprir o papel dos *objetos indecomponíveis* na classificação.

Classificação de fibrados vetoriais de rank arbitrário sobre $\mathbb{P}^1$

Teorema, Grothendieck 1956

Seja E um fibrado vetorial holomorfo de rank m sobre $\mathbb{P}^1$. Então E é isomorfo à uma soma direta de fibrados de linha

$$E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_m). \tag{4}$$

com $k_1 \geq ... \geq k_m$, e os inteiros k_i estão completamente determinados pela classe de isomorfismo de E.

A demonstração original de Grothendieck

- A demonstração original de Grothendieck começa com um argumento de geometria algébrica que lhe permite encontrar um sub-fibrado E_1 de E de rank 1;
- Grothendieck então repete o argumento para o fibrado E/E_1, e constrói recursivamente uma *sequência de decomposição*

$$\{0\} = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_m = E \tag{5}$$

  tal que cada E_i/E_{i-1} é um fibrado de linha;
- denotando por k_i o **grau** de E_i/E_{i-1}, o próximo passo é argumentar que podemos tomar a sequência de decomposição de forma que a sequência dos k_i é descrescente. Para fazer isso, Grothendieck demonstra que o grau dos sub-fibrados de rank 1 de E é limitado superiormente.

A demonstração original de Grothendieck

- Então, para construir a sequência de forma que os graus sejam decrescentes, Grothendieck toma E_1 de forma que seu grau seja o maior possível;
- Finalmente, Grothendieck prova que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i/E_{i-1}$, fazendo indução em m;
- Isso completa a demonstração da primeira parte do teorema. Para provar que a sequência dos k_i está bem determinada pela classe de isomorfismo de E, Grothemdieck refere o leitor à um resultado mais geral de M. Atiyah (que nem tinha sido publicado na época!) que diz que para um *espaço analítico* compacto X qualquer, a decomposição de um fibrado vetorial em soma direta de indecomponíveis é única.

Uma demonstração alternativa elementar

Existe também uma demonstração elementar usando apenas álgebra linear. O ponto inicial da demonstração é a seguinte observação. Seja $\mathbb{P}^1$ com coordenadas $(x_0 : x_1)$. Seja novamente $\{U_0, U_1\}$ a *cobertura standard* de $\mathbb{P}^1$, e coloque $U_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[s_0]$, $U_1 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[s_1]$.
Então, sobre a interseção $U_0 \cap U_1$, obtemos $U_0 \cap U_1 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, pela identificação $\frac{s_1}{s_0} \mapsto t$.

Seja agora $\pi : E \to \mathbb{P}^1$ um fibrado holomorfo e $\varphi : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$ as trivializações, para $i = 0, 1$. Lembremos que E é completamente determinado pelo mapa

$$\varphi_i \circ \varphi_0^{-1} : U_0 \cap U_1 \times \mathbb{C}^r \to U_0 \cap U_1 \times \mathbb{C}^r \tag{6}$$

e mais especificamente, como $U_0 \cap U_1 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, podemos pensar no mapa

$$g_{1,0} : U_0 \cap U_1 \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \tag{7}$$

como uma matriz em $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, polinomial em t e t^{-1} (isso vai ficar mais claro no futuro!).

Uma demonstração alternativa elementar

Como esta observação nos ajuda a resolver o problema de classificação? Sejam E e F dois fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^1$, de ranks r e s respectivamente. Suponha que E é determinado pela matriz $g_{1,0}$, e F pela matriz $g'_{1,0}$. Seja $f\colon E \to F$ um morfismo de fibrados. Então da mesma maneira, f é determinado sobre U_0 pela matriz $A_0 \in \mathrm{Mat}_{r\times s}(\mathbb{C}[t])$, e sobre U_1 pela matriz $A_1 \in \mathrm{Mat}_{r\times s}(\mathbb{C}[t^{-1}])$ que fazem

$$U_0 \times \mathbb{C}^r \ni (u, v) \mapsto (u, A_0 v) \in U_0 \times \mathbb{C}^s \tag{8}$$

e

$$U_1 \times \mathbb{C}^r \ni (u, v) \mapsto (u, A_1 v) \in U_1 \times \mathbb{C}^s \tag{9}$$

Uma demonstração alternativa elementar

Além disso, as matrizes A_i devem satisfazer a condição de compatibilidade sobre a interseção

$$A_1 g_{1,0} = g'_{1,0} A_0. \tag{10}$$

Em particular, **podemos concluir que f é um isomorfismo se, e somente se $r = s$, $A_0 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t])$ e $A_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t^{-1}])$**, e daí

$$A_1 g_{1,0} A_0^{-1} = g'_{1,0} \tag{11}$$

Uma demonstração alternativa elementar: matrizes de transição de fibrados de linha

Por outro lado, dado um fibrado de linha $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$, sabemos que sua matriz de transição em $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = \mathbb{C}[t, t^{-1}]^\times$ é dada por t^d. Desta maneira, sabemos que a matriz de transição de uma soma direta de fibrados de linha $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_r)$ tem a forma

$$\mathrm{g} = \begin{pmatrix} t^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{d_r} \end{pmatrix}$$

Uma demonstração alternativa elementar

Desta maneira, provar o teorema de classificação se reduz à mostrar que, para toda matriz $f \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, existem matrizes $A_0 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t])$ e $A_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t^{-1}])$ de forma que

$$g = A_1 f A_0^{-1} \tag{12}$$

onde g é como no slide anterior. Mas isto é precisamente o conteúdo do próximo resultado, devido à Dedekind e Weber:

Resultado de Dedekind-Weber

Teorema

Para qualquer matriz $M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, existem matrizes $A_0 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t])$ e $A_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}[t^{-1}])$ de forma que

$$A_1 M A_0^{-1} = \mathrm{diag}(t^{d_1}, \ldots, t^{d_r}). \tag{13}$$

Referencias I

Yuri A. Drozd and Gert-Martin Greuel.
Tame and wild projective curves and classification of vector bundles.
J. Algebra, 246:1–54, 2001.

Yuri A. Drozd.
Vector bundles over projective curves.
disponível em https://www.imath.kiev.ua/ drozd/Escola.pdf, 2008.

A. Grothendieck.
Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de riemann.
American Journal of Mathematics, 79(1):121–138, 1957.