# Álgebras de Caminhos e Representações de Quiver

Roger R Primolan

Universidade de São Paulo

05 de março de 2021

# Convenções

- **Corpos** considerados serão algebricamente fechados e denotados por $k$.
- **Álgebras** são anéis que também são $k$-espaços vetoriais.
- **Módulos** são $k$-espaços vetoriais com ação da álgebra, serão considerados módulos a direita.

# Tópicos

# Table of Contents

# Motivação e História

- **P1:** Como estudar o objeto abstrato *álgebra*?

# Motivação e História

- **P1:** Como estudar o objeto abstrato *álgebra*?
- **R1:** (1921) através de outro objeto um pouco mais "concreto", chamado de *módulo*!

Figure: E. Noether (1882-1935)

# Motivação e História

- **P1:** Como estudar o objeto abstrato *álgebra*?
- **R1:** (1921) através de outro objeto um pouco mais "concreto", chamado de *módulo*!
- **P2:** E como se estuda módulos?

Figure: E. Noether (1882-1935)

# Motivação e História

- **P1:** Como estudar o objeto abstrato *álgebra*?
- **R1:** (1921) através de outro objeto um pouco mais "concreto", chamado de *módulo*!
- **P2:** E como se estuda módulos?
- **R2:** (1972) através de representações de quivers!

$\oplus$ CONCRETO

Preço $\begin{cases} \text{álgebras de dimensão finita} \\ k = \overline{k} \end{cases}$

Figure: E. Noether (1882-1935)

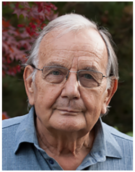


Figure: P. Gabriel (1933-2015)

# Table of Contents

# O que é um Quiver

*Quiver* é um outro nome para *grafo orientado*!

# O que é um Quiver

*Quiver* é um outro nome para *grafo orientado*!

**Definition**

Um **quiver** é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s : Q_1 \to Q_0, t : Q_1 \to Q_0)$. O conjunto $Q_0$ é denotado conjunto dos vértices $Q$, $Q_1$ é denotado conjunto das arestas (ou flechas) de $Q$, $s$ é uma função que para cada flecha associa o vértice de onde ela sai (do inglês, *source*) e $t$ é uma função que para cada flecha associa o vértice onde ela chega (do inglês, *target*). Notação para uma flecha entre $a$ e $b$ será $\alpha = (a|\alpha|b)$

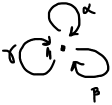
# O que é um Quiver

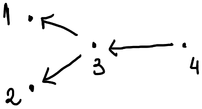
*Quiver* é um outro nome para *grafo orientado*!

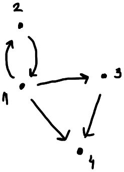
## Definition

Um **quiver** é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s : Q_1 \to Q_0, t : Q_1 \to Q_0)$. O conjunto $Q_0$ é denotado conjunto dos vértices $Q$, $Q_1$ é denotado conjunto das arestas (ou flechas) de $Q$, $s$ é uma função que para cada flecha associa o vértice de onde ela sai (do inglês, *source*) e $t$ é uma função que para cada flecha associa o vértice onde ela chega (do inglês, *target*). Notação para uma flecha entre $a$ e $b$ será $\alpha = (a|\alpha|b)$

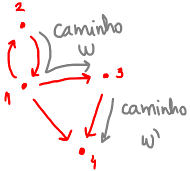
**Exemplos:**

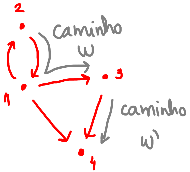



# Construindo a Álgebra de Caminhos



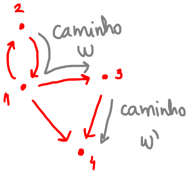

- Um *caminho* entre os vértices $a$ e $b$ de um quiver $Q$ é uma concatenação de flechas $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ tais que: $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_n) = b$ e $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$.

# Construindo a Álgebra de Caminhos



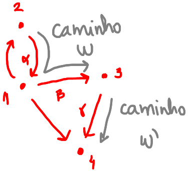

- Um *caminho* entre os vértices $a$ e $b$ de um quiver $Q$ é uma concatenação de flechas $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ tais que: $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_n) = b$ e $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$.
- Definimos, para cada $a \in Q_0$, um caminho de comprimento zero denotado por $\epsilon_a = (a||a)$.

# Construindo a Álgebra de Caminhos




- Um *caminho* entre os vértices $a$ e $b$ de um quiver $Q$ é uma concatenação de flechas $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ tais que: $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_n) = b$ e $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$.
- Definimos, para cada $a \in Q_0$, um caminho de comprimento zero denotado por $\epsilon_a = (a||a)$.
- Considere $kQ$ o espaço vetorial que tem como base todos os caminhos de $Q$ e todos os caminhos de comprimento zero.

# Construindo a Álgebra de Caminhos




- Um *caminho* entre os vértices $a$ e $b$ de um quiver $Q$ é uma concatenação de flechas $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ tais que: $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_n) = b$ e $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$.
- Definimos, para cada $a \in Q_0$, um caminho de comprimento zero denotado por $\epsilon_a = (a||a)$.
- Considere $kQ$ o espaço vetorial que tem como base todos os caminhos de $Q$ e todos os caminhos de comprimento zero.
- Definimos o produto associativo e distributivo

$$ww' = (2|\alpha\beta|3)(3|\gamma|4) = (2|\alpha\beta\gamma|4)$$

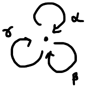
$$\cdot : kQ \times kQ \to kQ$$

$$((a|\alpha_1\cdots\alpha_n|b),(c|\beta_1\cdots\beta_m|d)) \mapsto \delta_{bc}(\alpha_1\cdots\alpha_n\beta_1\cdots\beta_m)$$

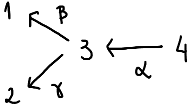
$$w'w = 0$$

# Exemplos

$Q_1$ :  $\rightsquigarrow kQ_1 = k\varepsilon_1 \oplus k\alpha \oplus k\alpha^2 \oplus \cdots \cong k[x]$, álgebra livre de posto 1.

$Q_2$ :  $\rightsquigarrow kQ_2 = k\varepsilon_1 \oplus k\alpha \oplus k\beta \oplus k\gamma \oplus k(\alpha\beta) \oplus k(\gamma\alpha) \oplus \cdots \cong k\langle x, y, z\rangle$

álg. livre posto 3.

$Q_3$ : 

$$kQ_3 = k\varepsilon_1 \oplus k\varepsilon_2 \oplus k\varepsilon_3 \oplus k\varepsilon_4 \oplus k\alpha \oplus k\beta \oplus k\gamma \oplus k(\alpha\beta) \oplus k(\alpha\gamma).$$

Tabela de multiplicação

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0 | $\alpha\beta$ | $\alpha\gamma$ |
| $\beta$ | 0 | 0 | 0 |
| $\gamma$ | 0 | 0 | 0 |

$$kQ_3 \cong \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ k & k & k & 0 \\ k & k & k & k \end{bmatrix}$$

# Propriedades

i) $\varepsilon_a \varepsilon_a = (a\| \,|a)(a\| \,|a) = \delta_{aa}(a\| \,|a) = \varepsilon_a \rightsquigarrow$ idempotentes

ii) Se $a \neq b$, então $\varepsilon_a \varepsilon_b = (a\| \,|a)(b\| \,|b) = 0 \rightsquigarrow$ ortogonais

iii) Dado um caminho $w = (a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b)$ temos

$$\left(\sum_{c \in Q_0} \varepsilon_c\right) w = \sum_{c \in Q_0} (c\| \,|c)(a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b) = (a\|a)(a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b) = w$$

$$\rightsquigarrow 1_{kQ} = \sum_{c \in Q_0} \varepsilon_c \rightsquigarrow \text{completo}$$

iv) São primitivos: não ocorre $\varepsilon_c = e_1 + e_2$, $e_1, e_2 \neq 0$ idempotentes $\perp$.

# Ideais Admissíveis

- **Ideal de destaque:** o ideal gerado por $Q_1$, isto é, pelas flechas e denotado por $R$ (do alemão, *richtungsspfeil*, seta de direção).

$$R = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} k\alpha \bigoplus_{|\rho|=2} k\rho \oplus \cdots .$$

# Ideais Admissíveis

- **Ideal de destaque:** o ideal gerado por $Q_1$, isto é, pelas flechas e denotado por $R$ (do alemão, *richtungsspfeil*, seta de direção).

$$R = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} k\alpha \bigoplus_{|\rho|=2} k\rho \oplus \cdots .$$

- **Motivo:**

$$\frac{kQ}{R} = \frac{\bigoplus_{a\in Q_0} k\varepsilon_a \oplus_{\alpha\in Q_1} k\alpha \oplus_{|\rho|=2} k\rho \oplus \cdots}{R} \cong \bigoplus_{a\in Q_0} k\varepsilon_a \cong \bigoplus_{a\in Q_0} k \; ; \quad \frac{R}{R^2} \cong \bigoplus_{\alpha\in Q_1} k\alpha$$

$$\frac{\varepsilon_a R \varepsilon_b}{R^2} \cong \bigoplus_{\alpha : a \to b} k\alpha$$

- Um ideal $I \lhd kQ$ é dito *admissível* quando $R^m \subseteq I \subseteq R^2$, para algum inteiro $m \geqq 2$. Ideais admissíveis são finitamente gerados por relações, que são elementos $\rho = \sum \lambda_i \omega_i$, em que cada $\omega_i$ é um caminho entre os mesmos vértices $a$ e $b$.

# Como encontrar $A \cong kQ/I$?

Propriedade | Conclusão

- $\{\varepsilon_a + I \,;\, a \in Q_0\} \subseteq \frac{kQ}{I}$ é scop $\Rightarrow$ A tem scop c/ $\#Q_0$ elem. $\{e_a : a \in Q_0\}$

- $\left(\frac{R}{I}\right)^m = 0$ , $\frac{kQ}{I} \Big/ \frac{R}{I} \cong \frac{kQ}{R} \cong \bigoplus_{a \in Q_0} k \Rightarrow \operatorname{rad}(kQ/I) = R/I$ e $kQ/I$ e A não básicas

- $\frac{R}{I} \Big/ \frac{R^2}{I} \cong R/R^2$ , $(\varepsilon_a + I) \frac{R/I}{R^2/I} (\varepsilon_b + I) \Rightarrow \frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}$ e $\frac{e_a \operatorname{rad} A \, e_b}{\operatorname{rad}^2 A}$ codifica $Q_1$

# Síntese: Realizando Álgebras como Quocientes de Álgebras de Caminhos

## Definition

Dada uma $k$-álgebra $A$ básica de dimensão finita e um sciop $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq A$ definimos o *quiver de Gabriel de A*, denotado por $Q_A$, como:

# Síntese: Realizando Álgebras como Quocientes de Álgebras de Caminhos

## Definition

Dada uma $k$-álgebra $A$ básica de dimensão finita e um sciop $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq A$ definimos o *quiver de Gabriel de A*, denotado por $Q_A$, como:

- $(Q_0)_A = \{1, \ldots, n\}$, isto é, tem a mesma cardinalidade do sciop.

# Síntese: Realizando Álgebras como Quocientes de Álgebras de Caminhos

## Definition

Dada uma $k$-álgebra $A$ básica de dimensão finita e um sciop $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq A$ definimos o *quiver de Gabriel de $A$*, denotado por $Q_A$, como:

- $(Q_0)_A = \{1, \ldots, n\}$, isto é, tem a mesma cardinalidade do sciop.
- Dados $i, j \in (Q_0)_A$, a quantidade de flechas de $(Q_1)_A$ com início em $i$ e fim em $j$ é $\dim_k e_i(\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A)e_j$.

# Síntese: Realizando Álgebras como Quocientes de Álgebras de Caminhos

## Definition

Dada uma $k$-álgebra $A$ básica de dimensão finita e um sciop $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq A$ definimos o *quiver de Gabriel de A*, denotado por $Q_A$, como:

- $(Q_0)_A = \{1, \ldots, n\}$, isto é, tem a mesma cardinalidade do sciop.
- Dados $i, j \in (Q_0)_A$, a quantidade de flechas de $(Q_1)_A$ com início em $i$ e fim em $j$ é $\dim_k e_i(\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A)e_j$.

## Theorem

*Para uma álgebra $A$ nas condições da definição acima, existe um ideal admissível $I \lhd kQ_A$ tal que $A \cong kQ_A/I$.*

# Exemplos

1) $A_1 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ k & k & k & 0 \\ k & k & k & k \end{bmatrix}$, $\text{rad}\, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ k & k & k & 0 \end{bmatrix}$, $\text{rad}^2 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

sciop $\{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{44}\}$, olhando as dimensões

$$\begin{tikzcd} 1 & & \\ & 3 \arrow[ul] \arrow[dl] & 4 \arrow[l] \\ 2 & & \end{tikzcd} : Q_{A_1}, \quad A \cong kQ_{A_1}.$$

2) $A_2 = k[x] / \langle x^2 \rangle$, sciop $\{1\}$, $\text{rad}\, A_2 = \langle \bar{x} \rangle$, $\text{rad}^2 A_2 = 0$, $1 \left( \dfrac{\text{rad}\, A_2}{\text{rad}^2 A_2} \right) 1 = \langle \bar{x} \rangle$

então $Q_{A_2}: \; \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$, $I = \langle \alpha^2 \rangle \Rightarrow A_2 \cong kQ_{A_2} / \langle \alpha^2 \rangle$.

3) $A_3 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ A_2 & k \end{bmatrix}$, $\text{rad}\, A_3 = \begin{bmatrix} \langle \bar{x} \rangle & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{rad}^2 A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \langle \bar{x} \rangle & 0 \end{bmatrix}$, sciop $\left\{ \underset{e_1}{\begin{bmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \right\}$,

$\dim e_1 \dfrac{\text{rad}\, A_3}{\text{rad}^2 A_3} e_1 = 1$, $\dim e_2 \dfrac{\text{rad}\, A_3}{\text{rad}^2 A_3} e_1 = 1 \rightsquigarrow Q_{A_3}: \; \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\beta"] & 2 \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$, $A_3 \cong kQ_{A_3} / \langle \beta^2 \rangle$.

# Table of Contents

# Análise: Exemplos de Módulos

$A = \frac{kQ}{I}$, $M$ um $A$-módulo:

(i) $M = M \cdot 1_{\frac{kQ}{I}} = M \cdot \left( \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a + I \right) = \bigoplus_{a \in Q_0} M(\varepsilon_a + I) = \bigoplus_{a \in Q_0} M e_a \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ então podemos pensar em $M$ como uma soma direta codificada / indexada por $Q_0$.

(ii) Seja $\alpha : i \longrightarrow j \in Q_1$, então $M\alpha = \left( \bigoplus_{a \in Q_0} M e_a \right) \alpha =$

$= \bigoplus_{a \in Q_0} M e_a \alpha = M e_i \alpha = M \alpha e_j \subseteq M e_j \rightsquigarrow$ então podemos pensar em $- \cdot \alpha$ como uma transf. linear $T_\alpha : M e_i \to M e_j$.

# Análise: Exemplos de Módulos

$A = \frac{kQ}{I}$ , M e N A-módulos e $f: M \to N$ homomorfismo de A-módulos:

i) $f(m\alpha) = f(m)\alpha$, $\forall \alpha \in Q_1$, $\forall m \in M$

ii) Se $\alpha: i \to j$, então $m \in Me_i$, $f(m) = f(me_i) = f(m)e_i \in Ne_i$,

def. $f_i: Me_i \longrightarrow Ne_i$, e a condição (i) passa a ser
$me_i \mapsto f(m)e_i$

$$\begin{tikzcd} Me_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\text{em } M \ -\cdot\alpha = T_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Ne_i \arrow[d, "S_\alpha = -\cdot\alpha \text{ em } N"] \\ Me_j \arrow[r, "f_j"'] & Ne_j \end{tikzcd}$$

# Representações de Quivers

## Definition

Dado um quiver finito $Q$ uma representação $k$-linear de $Q$ é:

- Para cada vértice $a \in Q_0$ um $k$-espaço vetorial $V_a$.
- Para cada flecha $\alpha : a \to b \in Q_1$ uma transformação linear $T_\alpha : V_a \to V_b$.

# Representações de Quivers

## Definition

Dado um quiver finito $Q$ uma representação $k$-linear de $Q$ é:

- Para cada vértice $a \in Q_0$ um $k$-espaço vetorial $V_a$.
- Para cada flecha $\alpha : a \to b \in Q_1$ uma transformação linear $T_\alpha : V_a \to V_b$.

Um morfismo de representações é uma família $(f_a)_{a \in Q_0}$ tal que $f_b \circ T_\alpha = S_\alpha \circ f_a$, para todo $\alpha : a \to b \in Q_1$.

## Definition

Para um caminho $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ entre $a$ e $b$ definimos $T_\omega = T_{\alpha_n} \cdots T_{\alpha_1} : V_a \to V_b$. Para uma relação $\rho = \sum \lambda_\omega \omega$ entre $a$ e $b$ definimos $\rho = \sum \lambda_\omega T_\omega$. Uma representação do quiver conectado $(Q, I)$ é uma representação de $Q$ tal que $T_\rho = 0$ para toda relação $\rho \in I$.

# É possível reverter o processo?

Seja $(M_a, T_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ uma representação de $(Q, I)$:

(i) $M := \bigoplus_{a \in Q_0} M_a$ ; (ii) $M \circlearrowleft \frac{kQ}{I}$? A ideia é que $T_\alpha$ codifica $- \cdot \alpha$, logo

definimos: $\begin{cases} m \cdot \varepsilon_a = m_a \\ m \cdot \alpha = T_\alpha(m_i), \text{ onde } \alpha : i \to j. \end{cases}$ Isso define uma ação $M \circlearrowleft kQ$.

(iii) Mostrar que $I$ está contido no kernel dessa ação: Seja $\rho = \sum \lambda_i w_i \in I$ uma relação entre $a$ e $b$, então

$$m \cdot \rho = m \cdot \left(\sum \lambda_i w_i\right) = \sum \lambda_i T_{w_i}(m_a) = \left(\sum \lambda_i T_{w_i}\right)(m_a) = T_\rho(m_a) = 0.$$

Então temos uma ação $M \circlearrowleft \frac{kQ}{I}$.

# É possível reverter o processo?

Vamos tratar dos morfismos $(f_i)_{i \in Q_0} : (M_j, T_\alpha) \longrightarrow (N_j, S_\alpha)$ :

(i) $f = \oplus f_i : M = \oplus M_j \longrightarrow N = \oplus N_j$ ;

(ii) $\begin{cases} f(m e_a) = f(m_a) = f_a(m_a) = f(m) e_a \, ; \\ f(m\alpha) = f(T_\alpha(m_i)) = f_j(T_\alpha(m_i)) = S_\alpha(f_i(m_i)) = f(m) \cdot \alpha \, , \ \forall \alpha \in Q_1 \, . \\ \hphantom{f(m\alpha) = f(T_\alpha(m_i)) = f_j(T_\alpha(m_i)) = S_\alpha(f_i(m_i)) = f(m) \cdot \alpha \, , \ } \alpha : i \to j \end{cases}$

# Obtendo um $kQ/I$-módulo através de uma representação de $(Q, I)$.

**Theorem**

*Existe uma equivalência de categorias* $\mathrm{Mod}(kQ/I) \cong \mathrm{Rep}(Q, I)$ *que se restringe a uma equivalência* $\mathrm{mod}(kQ/I) \cong \mathrm{rep}(Q, I)$.

# Obtendo um $kQ/I$-módulo através de uma representação de $(Q, I)$.

**Theorem**

*Existe uma equivalência de categorias* $\mathrm{Mod}(kQ/I) \cong \mathrm{Rep}(Q, I)$ *que se restringe a uma equivalência* $\mathrm{mod}(kQ/I) \cong \mathrm{rep}(Q, I)$.

**Moralmente...**

Estudar módulos sobre $kQ/I$ se resume a estudo de coisas lineares, que são as representações.

# Aplicações e Exemplos

(1) $A = \begin{bmatrix} \frac{k[x]}{\langle x^2\rangle} & 0 \\ \frac{k[x]}{\langle x^2\rangle} & k \end{bmatrix}$, $Q_A$: $\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[loop left, "\beta"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$ e $A \cong \frac{kQ_A}{\langle \beta^2 \rangle}$, então

uma representação de $(Q_A, \langle\beta^2\rangle)$ é $\begin{tikzcd} V_2 \arrow[loop left, "T_\beta"] & V_1 \arrow[l, "T_\alpha"'] \end{tikzcd}$, com

$T_{\beta^2} = (T_\beta)^2 = 0$, ex $\begin{tikzcd} k^2 \arrow[loop left, "\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}"] & & k^3 \arrow[ll, "\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 20 & 3 & 7 \end{bmatrix}"'] \end{tikzcd}$

(2) $A = \frac{kQ}{I}$, $Q$: $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "\beta"] & & \\ \bullet \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \bullet \arrow[r, "\xi"] & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "\delta"'] & & \end{tikzcd}$, $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^3 \end{bmatrix}"] & & \\ k^2 \arrow[ur, "{[0\ 1]}"] \arrow[dr, "{[0\ \lambda]}"'] & & k^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}"'] & k^4 \\ & k \arrow[ur, "\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}"'] & & \end{tikzcd}$$

, $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^3 \end{bmatrix}[0\ 1] = [\lambda^3]$, $T_{\alpha\beta-\gamma\delta} = 0$

$\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}[0\ \lambda] = [\lambda^3]$

# Aplicações e Exemplos

(i) Dada uma álgebra de dimensão finita, básica e com scíop $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq A$, um conjunto de projetivos irredutíveis de dimensão finita a menos de isomorfismo é

$$\{e_1 A, \dots, e_n A\} \quad e \quad e_i A \not\cong e_j A \text{, quando } i \neq j.$$

(ii) Os simples são dados por $S(i) = \operatorname{top} e_i A = \dfrac{e_i A}{\operatorname{rad} e_i A}$.

(iii) Pergunta: $S(i) \not\cong S(j)$, quando $i \neq j$? Resposta: Sim.

(iv) Ex: $Q: \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\bullet} \longleftarrow \underset{3}{\bullet}$, $A \cong kQ$

$$\begin{tikzcd}
S(1): & k \arrow[r, "\exists!0"] \arrow[d] & 0 \arrow[r, "\exists!0"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
& 0 \arrow[r, "\exists!0"] & k \arrow[r, "\exists!0"] & 0 \\
& 0 \arrow[u] \arrow[r, "\exists!0"'] & 0 \arrow[u] \arrow[r, "\exists!0"] & k \arrow[u] \\
& & S(2) & S(3)
\end{tikzcd}$$

# Table of Contents

# Considerações Finais

- Um isomorfismo de álgebras $A \cong kQ/I$ gera uma equivalência de categorias $\operatorname{Mod} A \cong \operatorname{Mod}(kQ/I)$.

## Considerações Finais

- Um isomorfismo de álgebras $A \cong kQ/I$ gera uma equivalência de categorias $\operatorname{Mod} A \cong \operatorname{Mod}(kQ/I)$.
- Para toda álgebra $A$ de dimensão finita é possível construir uma álgebra básica $A^b$ (também de dimensão finita) tal que $\operatorname{Mod} A \cong \operatorname{Mod}(A^b)$.

# Considerações Finais

- Um isomorfismo de álgebras $A \cong kQ/I$ gera uma equivalência de categorias $\operatorname{Mod} A \cong \operatorname{Mod}(kQ/I)$.
- Para toda álgebra $A$ de dimensão finita é possível construir uma álgebra básica $A^b$ (também de dimensão finita) tal que $\operatorname{Mod} A \cong \operatorname{Mod}(A^b)$.
- $\operatorname{Mod} A \cong \operatorname{Mod}(A^b) \cong \operatorname{Mod}(kQ/I)$.

# Bibliografia


Ibrahim Assem and Flávio Ulhoa Coelho.
*Basic representation theory of algebras.*
Springer, 2020.

Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowronski.
*Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory.*
Cambridge University Press, 2006.

Israel Kleiner et al.
*A history of abstract algebra.*
Springer Science & Business Media, 2007.

# Perguntas

# Perguntas