Introdução à Álgebra Linear: Prova Sub.

Modelo B

1. (2.5 pontos) Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real das matrizes 2×2.

a) **(1.5 pontos)** Verifique que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

b) **(1 ponto)** Encontre as coordenadas de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

na base B.

2. (2.5 pontos) Encontre uma base (e a dimensão) de U, W, $U \cap W$ e $U + W$ em seguintes casos:

a)

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},$$
$$W = [(2, 0, 1), (0, 1, 2)],$$

b)

$$U = \{p(t) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(-1) = 0\}$$
$$W = [1, t^2 + t + 1],$$

3. (2.5 pontos) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0), \qquad T(1, 1, 0) = (2, 7, 2), \qquad T(0, 1, 1) = (1, 10, 10),$$

Encontre os autovalores e autovetores de T. T é diagonalizavel?

4. (2.5 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mostre que A é diagonalizável. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e $SDS^{-1} = A$. Calcule A^{101} usando diagonalização.

5. (extra 1.0 ponto!) Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma base e a dimensão de $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$.