MAT0134
IME – Prova 3 – 08/12/2025

Modelo B

Nome : ____

Nº USP : ____

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Respostas sem justificativa não serão consideradas!

- Desligue celulares, smartfones, smartwatches;
- A prova pode ser feita à lápis;
- É proibido o uso dos livros, cadernos, apostilas, anotações;
- Qualquer tipo de cola = nota ”zero”na prova!!!

Questão 1ª: (2,5 pontos). Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que A é diagonalizável. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e

$$SDS^{-1} = A.$$

Calcule A^{2025}.

Questão 2ª: (2,5 pontos). Seja T um operador linear tal que

$$\begin{aligned} T(0,1,0) &= (-1,2,0), \\ T(1,2,0) &= (4,7,0), \\ T(0,1,1) &= (-1,2,3). \end{aligned}$$

Encontre os autovalores e os autovetores de T. T é diagonalizavel?

Questão 3ª: (3,0 pontos). Encontre uma base ortonormal de V a partir da base dada $\mathcal{B}$ nos seguintes casos.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0),\ (1, 0, -1),\ (0, 1, 2)\}$.

(b) $V = P_1(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt,$$

e $\mathcal{B} = \{1 - t,\ 1 + t\}$.

Questão 4ª: (2,0 pontos). Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a - b + c - d = 0 \right\}.$$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** (1.0 ponto). Responda **Sim** ou **Não**, justificando brevemente cada resposta.

(a) Toda matriz 3×3 com três autovalores reais distintos é diagonalizável.

(b) Se $\langle u, v \rangle = 0$ e $u \neq 0$, então v deve ser o vetor nulo.

(c) Se um vetor w é autovetor de A associado a λ e w é ortogonal a outro autovetor z associado a $\mu \neq \lambda$, então A é diagonalizável.

(d) Se o polinômio característico de A é $p_A(\lambda) = (3 - \lambda)^3$ e $\dim V_3(A) = 1$, então A não é diagonalizável.

(e) Se $|u| = 5$, $|v| = 2$ e $\langle u, v \rangle = -5$, então $|u - v| = \sqrt{54}$.