MAT0134
IME – Prova 3 – 08/12/2025

Modelo A

Nome : ______________________________

NºUSP : ______________________________

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Respostas sem justificativa não serão consideradas!

- Desligue celulares, smartfones, smartwatches;
- A prova pode ser feita à lápis;
- É proibido o uso dos livros, cadernos, apostilas, anotações;
- Qualquer tipo de cola = nota ”zero”na prova!!!

Questão 1ª: (2,5 pontos). Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostre que A é diagonalizável. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e

$$SDS^{-1} = A.$$

Calcule A^{2025}.

Questão 2ª: (2,5 pontos). Seja T um operador linear tal que

$$\begin{aligned} T(0,1,0) &= (0,1,0), \\ T(2,1,0) &= (2,3,-2), \\ T(0,2,1) &= (1,3,3). \end{aligned}$$

Encontre os autovalores e os autovetores de T. T é diagonalizavel?

Questão 3ª: (3,0 pontos). Encontre uma base ortonormal de V a partir da base dada $\mathcal{B}$ nos seguintes casos.

(a) $V = \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{B} = \{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,2,1)\}$.

(b) $V = P_1(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt,$$

e $\mathcal{B} = \{1+t,\ 1-2t\}$.

Questão 4ª: (2,0 pontos). Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+b+c+d=0 \right\}.$$

5ª Questão: (1.0 ponto). Responda **Sim** ou **Não**, justificando brevemente cada resposta.

(a) Toda matriz 2×2 com dois autovalores reais distintos é diagonalizável.

(b) Se dois vetores não nulos em $\mathbb{R}^3$ são ortogonais, então eles são automaticamente ortonormais.

(c) Se v é autovetor de uma matriz A, então qualquer múltiplo não nulo de v também é autovetor de A.

(d) Suponha que polinomio caracteristico de uma matrix A é $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$ e $\dim V_2(A) = 2$. Assim A é disgonalizavel?

(e) Suponha que num espaço vetorial com produto interno temos vetores, u, v com: $\|u\| = 3, \|v\| = 4, \langle u, v \rangle = 6$ assim $\|u + v\| = \sqrt{35}$?