MAT0134
IME – Prova 2 – 29/10/2025

Modelo B

Nome : ____

NºUSP : ____

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Respostas sem justificativa não serão consideradas!

- Desligue celulares, smartfones, smartwatches;
- A prova pode ser feita à lápis;
- É proibido o uso dos livros, cadernos, apostilas, anotações;
- Qualquer tipo de cola = nota ”zero”na prova!!!

$1^{\underline{a}}$ **Questão:** (2 pontos). Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z + x)$$

Encontre a base e dimenção para $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$. T é um isomorfismo?

2ª Questão: (2.0 pontos). Seja T um operador linear, tal que:

$$T(1,0,0) = (1,1,0);$$
$$T(-1,1,0) = (0,2,-1);$$
$$T(0,-1,1) = (-3,1,-2).$$

(a) Verifique se T é um isomorfismo;

(b) Caso seja, encontre uma matriz que represente o seu inverso.

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (2.0 pontos). Em todos casos do espaço vetorial V e duas bases dados $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, encontre matriz mudança de base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ e matriz mudança de base $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$. Para vetor v encontre as suas coordenadas em base $\mathcal{B}$.

a) $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,1),(1,0)\}$ duas bases em $V = \mathbb{R}^2$.
Vetor $v = (2,5)$.

b) $\mathcal{B} = \{1,\ t,\ t^2-1\}$, $\mathcal{C} = \{1+t,\ t-1,\ t^2\}$ duas bases em $V = P_2(\mathbb{R})$.
Vetor $v = 1 + 2t + t^2$.

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (3.0 pontos). Encontrar uma base (e dimenção) do Ker(T), Im(T), Ker$(T) \cap$ Im(T) e Ker(T) + Im(T) em casos:

(a)

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$T(x, y, z) = (x + z,\ y + x,\ z - y).$$

(b)

$$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}),$$
$$T(p)(t) = p'(t) - p(1).$$

5ª Questão: (1.0 ponto). Responda **Sim** ou **Não**, justificando brevemente cada resposta.

1. No espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, o conjunto $\{1,\ 1+x,\ x^2,\ x^2-x\}$ gera $P_2(\mathbb{R})$.
2. Em $M_2(\mathbb{R})$, o conjunto
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$
é uma base.
3. Se $B = \{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, então as coordenadas do vetor $(1,1,1)$ em relação a B são $(1/2, 1/2, 1/2)$.
4. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x,y,z) = (2x+y,\ 2y+z,\ 2z+x).$$
A matriz de T em relação à base canônica é simétrica.
5. Para $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, definido por $T(p(x)) = p'(x) + p(0)$, temos $\dim(\ker T) = 1$ e $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$.
6. Seja
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$
Os espaços S e $V = \{p(t) \in P_4(\mathbb{R}) \mid p(0) = 0, p(1) = 0\}$ são isomorfos?