

MAT0134
IME – Prova 2 – 29/10/2025

Modelo A

Nome : _____

NºUSP : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Respostas sem justificativa não serão consideradas!

- Desligue celulares, smartphones, smartwatches;
- A prova pode ser feita à lápis;
- É proibido o uso dos livros, cadernos, apostilas, anotações;
- Qualquer tipo de cola = nota "zero" na prova!!!

1ª Questão: (2 pontos). Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

Encontre a base e dimensão para $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$. T é um isomorfismo?

2ª Questão: (2.0 pontos). Seja T um operador linear, tal que:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0);$$

$$T(1, 1, 0) = (-1, 3, -1);$$

$$T(0, 1, 1) = (-5, 3, -2).$$

- (a) Verifique que T é um isomorfismo;
- (b) Encontre uma matriz que represente o seu inverso.

3ª Questão: (2.0 pontos). Em todos casos do espaço vetorial V e duas bases dados $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, encontre matriz mudança de base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ e matriz mudança de base $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$. Para vetor v encontre as suas coordenadas em base $\mathcal{B}$.

a) $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}, \mathcal{C} = \{(1, 2), (0, 1)\}$ duas bases em $V = \mathbb{R}^2$.
Vetor $v = (3, 4)$.

b) $\mathcal{B} = \{1, t + 1, t^2 + 1\}, \mathcal{C} = \{1, t - 1, t^2 - 1\}$ duas bases em $V = P_2(\mathbb{R})$.
Vetor $v = 1 + t + t^2$.

4ª Questão: (3.0 pontos). Encontrar uma base (e dimensão) do $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$, $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$ e $\text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$ em casos:

(a)

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z).$$

(b)

$$T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R}),$$
$$T(p)(t) = p'(t) - p(0).$$

5ª Questão: (1.0 ponto). Responda **Sim** ou **Não**, justificando brevemente cada resposta.

1. No espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, o conjunto $\{1, 1+x, 1-x, x^2\}$ gera $P_2(\mathbb{R})$.

2. Em $M_2(\mathbb{R})$, o conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base.

3. Se $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, então as coordenadas do vetor $(1, 1, 1)$ em relação a B são $(1/2, 1/2, 1/2)$.

4. Considere $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x).$$

A matriz de T em relação à base canônica é simétrica.

5. Para $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, definido por $T(p(x)) = p'(x)$, temos $\dim(\ker T) = 1$ e $\dim(\text{Im } T) = 2$.

6. Seja

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

Os espaços S e $V = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(t) = 0\}$ são isomorfos?