Lista Extra de Exercícios – MAT0103

1 Aviso importante:

Esta lista de exercícios é **opcional**, mas os(as) estudantes que a entregarem completa e corretamente poderão receber até **1,0 ponto extra na nota final** da disciplina.

Para ter direito ao bônus, a lista deve ser:

- Resolvida **à mão**, com boa organização e clareza;
- Entregue até o dia **27 de junho**;
- Entregue diretamente ao **monitor Douglas**, responsável por esta turma.

A correção considerará não apenas os resultados finais, mas também os cálculos e justificativas apresentados.

2 Instruções:

Para resolver esta lista, utilize os seguintes valores derivados do seu número USP:

- d_1: último dígito
- d_2: penúltimo dígito
- d_3: antepenúltimo dígito
- d_{12}: número formado pelos dois últimos dígitos (ex: se seu número USP termina com 43, então $d_{12} = 43$)
- S: soma de todos os dígitos do seu número USP

Substitua essas variáveis nas fórmulas antes de resolver os exercícios.

3 Exercicios

1. Uma caixa sem tampa será feita a partir de uma folha quadrada de papelão com lado $a = 30 + d_1 + d_2$ cm. Cortam-se quadrados de lado x nos cantos e dobram-se as laterais. Para qual valor de x o volume da caixa é máximo?

2. Uma empresa vende um produto ao preço de p reais por unidade. Estudos mostram que o número de unidades vendidas por semana é dado por $q(p) = 500 - (10 + d_3)p$. Determine o preço que maximiza a receita semanal.

3. Uma empresa quer construir uma embalagem cilíndrica com volume $V = 1000+5d_{12}$ cm³. Qual deve ser a altura h e o raio r que minimizam a área da superfície da embalagem?

4. Resolva **dois dos cinco** limites abaixo, escolhidos com base nos dois últimos dígitos do seu número USP.

   Como escolher os itens:

   Seja d_1 o penúltimo dígito e d_2 o último dígito do seu número USP. Defina:

   $$n_1 = ((d_1 + 1) \bmod 5) + 1, \quad n_2 = ((d_2 + 1) \bmod 5) + 1$$

   Você deve resolver os itens de número n_1 e n_2. Se $n_1 = n_2$, resolva apenas esse item com todos os detalhes.

   1) Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$
   2) Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + d_1 x}{e^x}$
   3) Calcule $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$
   4) Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$
   5) Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{1/d_2}}$

5. **Derivadas de funções compostas**

   Abaixo estão listadas 10 funções. **Cada estudante deve resolver exatamente 5 delas**, escolhidas com base em seu número USP.

   Use a seguinte regra para selecionar as alíneas a serem feitas:

   $$n_1 = d_1+1, \quad n_2 = d_2+1, \quad n_3 = d_3+1, \quad n_4 = ((d_1+d_2) \bmod 10)+1, \quad n_5 = ((d_2+d_3) \bmod 10)+1,$$

onde cada $n_i \in \{1, \ldots, 10\}$ representa o número da alínea que você deve fazer.

Exemplo: Para um estudante com número USP `12549873`, temos:

$$d_1 = 3, \quad d_2 = 7, \quad d_3 = 8$$

Logo,

$$n_1 = 3 + 1 = 4, \quad n_2 = 7 + 1 = 8, \quad n_3 = 8 + 1 = 9,$$
$$n_4 = (3 + 7) \bmod 10 + 1 = 0 + 1 = 1, \quad n_5 = (7 + 8) \bmod 10 + 1 = 5 + 1 = 6$$

Portanto, este estudante deverá resolver os itens: 1), 4), 6), 8) e 9).

Para cada item, calcule a derivada $f'(x)$.

1) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+d_1x+1}{x}\right)$
2) $f(x) = \sin\left((x^2 + d_1x + 1)\cos((d_2 + 1)x)\right)$
3) $f(x) = e^{\frac{(x^2+d_1x+1)}{\tan((d_2+1)x)}}$
4) $f(x) = \cos\left((x^2 + d_1x + 1)^2\right)$
5) $f(x) = \tan\left(\frac{e^{(d_3+1)x}}{x^2+d_1x+1}\right)$
6) $f(x) = \left(\frac{(x^2+d_1x+1)\cos((d_2+1)x)}{x^2+1}\right)^3$
7) $f(x) = (x^2 + d_1x + 1) \cdot \sin((d_2 + 1)x)$
8) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + d_1x + 1)}{\cos((d_2 + 1)x)}$
9) $f(x) = \dfrac{(x^2 + d_1x + 1)^2 \cdot \tan((d_2 + 1)x)}{e^x}$
10) $f(x) = \dfrac{\sin((d_2 + 1)x)}{x^2 + d_1x + 1}$

6. Uma placa retangular será feita a partir de uma folha metálica de $60 + d_2$ cm de comprimento por $40 + d_3$ cm de largura. Cortando-se retângulos congruentes nos cantos e dobrando-se as bordas, constrói-se uma caixa sem tampa. Determine o tamanho do corte que maximiza o volume.

7. Uma empresa deseja construir uma caixa com volume fixo $V = 500 + 10d_1$ cm^3, base quadrada e sem tampa. Determine as dimensões que minimizam a área da superfície.

8. Considere as funções abaixo. Para cada uma delas, é possível estudar domínio, assíntotas, intervalos de crescimento/decrescimento, máximos e mínimos locais, concavidade, convexidade e pontos de inflexão.

   Cada aluno deve resolver exatamente dois dos cinco itens abaixo, escolhidos com base nos dois últimos dígitos do seu número USP.

Sejam d_1 e d_2 os dois últimos dígitos do seu número USP. Calcule:

$$n_1 = ((d_1 + 2) \bmod 5) + 1, \quad n_2 = ((d_2 + 3) \bmod 5) + 1$$

Você deve resolver os itens de número n_1 e n_2. Se $n_1 = n_2$, resolva apenas esse com todos os detalhes.

Exemplo: Para o número USP `12549837`, temos $d_1 = 7$, $d_2 = 3$. Então:

$$n_1 = ((7 + 2) \bmod 5) + 1 = (9 \bmod 5) + 1 = 4 + 1 = 5,$$
$$n_2 = ((3 + 3) \bmod 5) + 1 = (6 \bmod 5) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Esse aluno deve resolver os itens 2) e 5).

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + d_1 x + 1}{x^2 + 1}$
2) $f(x) = \dfrac{x^2 + d_1 x + 1}{x^2 - 1}$
3) $f(x) = \dfrac{x^2 + d_1 x + 1}{x - d_2}$
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + d_1 x + 1}{x^2 + d_2 x + 1}$
5) $f(x) = \dfrac{(x^2 - d_1 x - 1)}{x^2 - 1}$

9. Cada aluno deve analisar **uma única função**, escolhida com base no seu número USP.

   Seja $n = ((d_1 + d_2 + d_3) \bmod 5) + 1$. Resolva o item de número n da lista abaixo.

   Para a função correspondente, você deve:

   a) Determinar o domínio.
   b) Identificar todas as assíntotas verticais e horizontais (ou oblíquas).
   c) Calcular os limites em $\pm\infty$ e nas vizinhanças das assíntotas verticais.
   d) Estudar a concavidade via segunda derivada.
   e) Esboçar o gráfico com base nas informações.

   Funções:

   1) $f(x) = \dfrac{(x^2 + d_2 x + 1)}{x - d_3}$
   2) $f(x) = \dfrac{(x - d_1)^2 (x + d_2)}{x^2 - d_3^2}$

3) $f(x) = \dfrac{(x^2 + d_1 x + 1)}{x^2 + d_2 x + d_1}$

4) $f(x) = \dfrac{(x^2 + d_3 x + 1)}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}$

5) $f(x) = \dfrac{x^3 + d_1 x^2 - d_2 x + 1}{x^2 - d_3^2}$

10. Um fabricante deseja construir uma caixa retangular com volume $V = 800 + 10d_1$ cm³, com base retangular e sem tampa, de modo que o comprimento da base seja o dobro da largura.

    a) Modele a área da superfície da caixa em função de uma única variável.

    b) Determine as dimensões que minimizam a área da superfície.

    c) Verifique se o ponto encontrado realmente fornece um mínimo.