Soluções – Prova SUB MAT0103 – Versão B

1. **(1,0 ponto)** Calcule $f'(x)$.

   a) $f(x) = 2^{(x^2+2x+1)^3}$
   Note que:
   $$f(x) = 2^{(x+1)^6}$$
   Derivada da função exponencial com base diferente de e:
   $$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{(x+1)^6} \cdot \frac{d}{dx}\left[(x+1)^6\right] = \ln(2) \cdot 2^{(x+1)^6} \cdot 6(x+1)^5$$

   b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{\ln(x^3+1)}$
   Utilizando a regra do quociente:
   $$f'(x) = \frac{[(x-1)^2]' \cdot \ln(x^3+1) - (x-1)^2 \cdot [\ln(x^3+1)]'}{[\ln(x^3+1)]^2}$$
   Calculando:
   $$[(x-1)^2]' = 2(x-1), \quad [\ln(x^3+1)]' = \frac{3x^2}{x^3+1}$$
   Logo:
   $$f'(x) = \frac{2(x-1)\ln(x^3+1) - (x-1)^2 \cdot \frac{3x^2}{x^3+1}}{[\ln(x^3+1)]^2}$$

2. **(3,0 pontos)** Calcule as integrais:

a)

$$\int \left(\sqrt[4]{x^9} + 2\sin(x) + 3e^x\right)\,dx = \int \left(x^{9/4} + 2\sin(x) + 3e^x\right)\,dx$$
$$= \frac{4}{13}x^{13/4} - 2\cos(x) + 3e^x + C$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

c) Integração por partes: $u = x$, $dv = \cos(2x)\,dx$, então $du = dx$, $v = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

$$\int x\cos(2x)\,dx = \frac{x}{2}\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

3. **(2,0 pontos)** Veja prova 2.

4. **(2,0 pontos)** Esboce a região entre $y = x^3$ e $y = 4x$.

Igualando:

$$x^3 = 4x \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 2$$

Área entre curvas:

$$A = \int_{-2}^{0} (4x - x^3)\, dx + \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx$$

Calculando:

$$\int_{-2}^{0} (4x - x^3)\, dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = 0 - (8 - 4) = -4$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = (4 - 8) = -4$$

Área total (positiva): $A = 4 + 4 = \boxed{8}$

5. **(2,0 pontos)**

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \cdot \sin(x^2+1)}$$

Numerador $\sim x^2$, denominador $\sim x \cdot \sin(1+x^2) \to x \cdot \sin(1)$. Logo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x \cdot \sin(1)} = \frac{x}{\sin(1)} \to 0$$

Resposta: $\boxed{0}$

b) Para continuidade em $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$$

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = 3 \cdot 3 + b = 9 + b \Rightarrow 9 + b = 6 \Rightarrow b = -3$$

Questão Extra – Quiz

(a) **Sim.** Toda função derivável é contínua no ponto.

(b) **Não.** Considere função $f(x) = 1/x$ em $(0, 1]$.

(c) **Não.** $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$ não existe (diverge para $\pm\infty$).

(d) **Não.** A existência do limite não garante continuidade: é necessário que $f(c)$ esteja definida e igual ao limite.

(e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{1 - \sin(x) - \cos(x)} \approx \frac{1 + x - (1 - x^2/2)}{1 - x - (1 - x^2/2)} = \frac{x + x^2/2}{-x + x^2/2} \to -1$$

Resposta: **Não.**