MAT0103 - Prova de nivelamento (04/04/2025)

Nome: Soluções
Número USP:
Assinatura:

Respostas					
Questão	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1	■				
2				■	
3					■
4		■			
5	■				
6				■	
7	Anulada				
8	Anulada				
9					■
10			■		
11					■
12		■			

1) Assinale a alternativa que contém uma expressão algébrica equivalente a

$$\frac{4x^2 - 4x - 3}{4x^2 - 9}$$

quando $x \neq \dfrac{3}{2}$.

(a) $\dfrac{2x+1}{2x+3}$ **(b)** $\dfrac{2x+3}{2x+1}$ **(c)** $\dfrac{2x-1}{2x+3}$ **(d)** $\dfrac{2x-3}{2x+1}$ **(e)** $\dfrac{2x-1}{2x-3}$

Solução: Alternativa (A)

Para simplificar esta expressão algébrica, vamos inicialmente analisar se é possível fatorar o denominador e o numerador. Observe que o denominador $4x^2 - 9$ corresponde a uma diferença de quadrados, já que $(2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$. Assim, podemos utilizar o seguinte produto notável:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{1}$$

No caso, substituindo $a = 2x$ e $b = 3$, chegamos a

$$(2x)^2 - 3^2 = (2x+3)(2x-3)$$

Como $x \neq \frac{3}{2}$ pela hipótese do enunciado, nenhum dos fatores acima é nulo. Agora, vejamos se é possível fatorar o numerador da fração utilizando um dos fatores encontrados no denominador. Observe que

$$4x^2 - 4x - 3 = (2x+1)(2x-3).$$

Assim, lembrando que $2x - 3 \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{4x^2 - 4x - 3}{4x^2 - 9} &= \frac{(2x+1)\cancel{(2x-3)}}{(2x+3)\cancel{(2x-3)}} \\ &= \frac{2x+1}{2x+3}\end{aligned}$$

Esta simplificação corresponde à que está indicada na Alternativa (A).

2) Assinale a alternativa que indica uma expressão equivalente a

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2.$$

(a) $4ab$ **(b)** $2a^2b^2$ **(c)** $\left[(a+b)^2 - (a^2 - b^2)\right]^2$

(d) $\left[(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\right]^2$ **(e)** $\left[(a+b)^2 + (a^2 + b^2)\right]^2$

Solução: Alternativa (D)
Para resolver esta questão, vamos utilizar dois produtos notáveis:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \tag{2}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{3}$$

Fazendo uso da diferença de quadrados 2, temos

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 &= \Big((a^2+b^2) + (a^2-b^2)\Big)\Big((a^2+b^2) - (a^2-b^2)\Big)\\ &= \Big(a^2+b^2+a^2-b^2\Big)\Big(a^2+b^2-a^2+b^2\Big)\\ &= 2a^2 \cdot 2b^2\\ &= 4a^2b^2\end{aligned}$$

Agora, observe que $4a^2b^2 = (2ab)^2$. Utilizando o produto notável quadrado da soma 3, obtemos

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para que reste apenas $2ab$ na equação acima, basta subtrair $a^2 + b^2$. Assim,

$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab.$$

Dessa forma, concluímos que

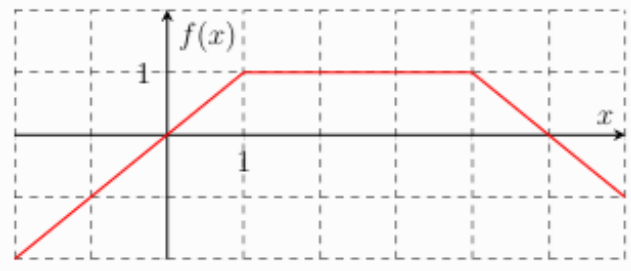
$$\Big((a+b)^2 - (a^2+b^2)\Big)^2 = \Big(2ab\Big)^2 = 4a^2b^2.$$

Portanto,

$$(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 = \Big((a+b)^2 - (a^2+b^2)\Big)^2.$$

Segue que a resposta correta é a Alternativa (D).

3) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pelo gráfico abaixo:



A lei de formação da função f é dada por

(a) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ x^2 - x, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x < 4 \\ 2 - x, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ x - 2, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x, & \text{se } 1 < x < 4 \\ -x, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 4 \\ 5 - x, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

Solução: Alternativa (E)

Vamos analisar o gráfico de f por partes. Primeiramente, observe que cada quadriculado corresponde a uma unidade. Isso significa que a figura apresenta o eixo das abscissas Ox de -2 até 6 e o eixo das ordenadas Oy de -2 até 2.

- De $x = -2$ até $x = 1$, observe que $f(x) = x$.
- De $x = 1$ até $x = 4$, veja que o valor de f permanece constante, valendo sempre 1. Logo, $f(x) = 1$ de $x = 1$ até $x = 4$.
- De $x = 4$ até $x = 6$, a função f passa a decrescer. Pela imagem, pode-se ver que $f(4) = 1$, $f(5) = 0$ e $f(6) = -1$. Assim, nesse intervalo inferimos que $f(x) = 5 - x$.

Após analisar cada um dos trechos, chegamos à conclusão de que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 4 \\ 5 - x, & \text{se } x \geq 4 \end{cases},$$

o que corresponde a representação de f fornecida na Alternativa (E).

4) Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 - |x - 7|}}$. Pode-se dizer que o domínio de f é

(a) $(7, 8)$ **(b)** $(-1, 15)$ **(c)** $[-1, 15]$ **(d)** $[0, 14]$ **(e)** $\mathbb{R}$

Solução: Alternativa B

Para determinar o domínio de f, ou seja, o conjunto de pontos nos quais podemos calcular o valor de f sem enfrentar problemas (como divisão por 0 ou raízes quadradas negativas), inicialmente precisamos supor que estamos tratando do maior conjunto possível, no caso, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, e estudar se existem valores de f no qual ela não está definida. Como f é composta por um quociente, então para que ela esteja bem-definida,o denominador deve ser não nulo. Desse modo, precisamos garantir que

$$\sqrt{8-|x-7|} \neq 0$$

Além disso, o radicando não pode ser um número negativo. Ou seja,

$$8-|x-7| > 0$$

Para isso, vamos encontrar os possíveis valores de x tais que essa identidade não se concretiza, ou seja, os valores de x que não podem estar no domínio de f. Veja que

$$\begin{aligned} 8-|x-7| \leq 0 &\Leftrightarrow -|x-7| \leq -8 \\ &\Leftrightarrow |x-7| \geq 8 \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, precisamos relembrar da definição da função módulo, também chamada de valor absoluto. Se $x \geq 0$, então $|x| = x$. (por exemplo, $|8| = 8$ pois $8 > 0$). Mas se $x < 0$, o sinal de x será negativo, e a função módulo irá retirar este sinal (por exemplo, $|-7| = 7$, pois $-7 < 0$. Mas veja que $7 = -(-7)$. Logo, podemos ver que, se $x < 0$, então $|x| = -x$. Em resumo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Desse modo, na equação $|x-7| \geq 8$ temos dois casos a considerar:

- Se $x - 7 \geq 0$, então $|x-7| = x-7$. Nesse caso,

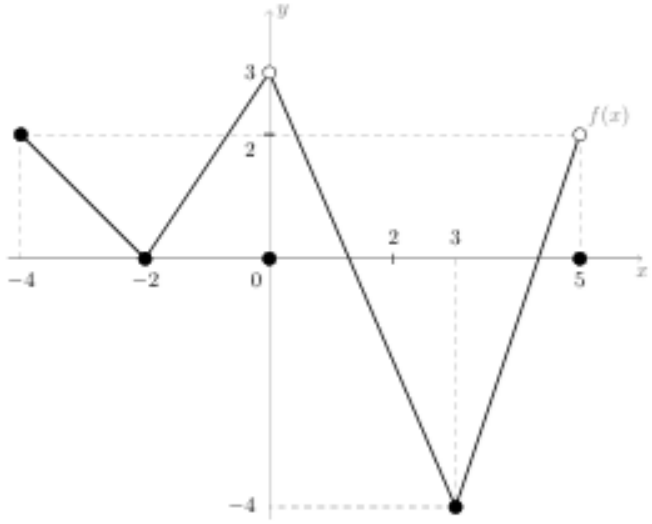
$$x - 7 \geq 8 \Rightarrow x \geq 15.$$

- Se $x - 7 < 0$, então $|x-7| = -(x-7) = 7-x$. Nesse caso,

$$7 - x \geq 8 \Rightarrow -x \geq 1 \Rightarrow x \leq -1.$$

Concluímos portanto que a função não está definida se $x \geq 15$ ou se $x \leq -1$. Portanto, o domínio corresponde a $-1 < x < 15$, o que na notação de conjuntos corresponde ao intervalo $(-1, 15)$.

Para as próximas duas questões, considere a função $f\colon [-4, 5] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico está mostrado na figura seguinte.



5) Qual dos conjuntos abaixo representa a imagem de f?

(a) $[-4, 3)$ **(b)** $[-4, 3]$ **(c)** $[-4, 5]$ **(d)** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ **(e)** $\mathbb{R}$

Solução: Alternativa (A)

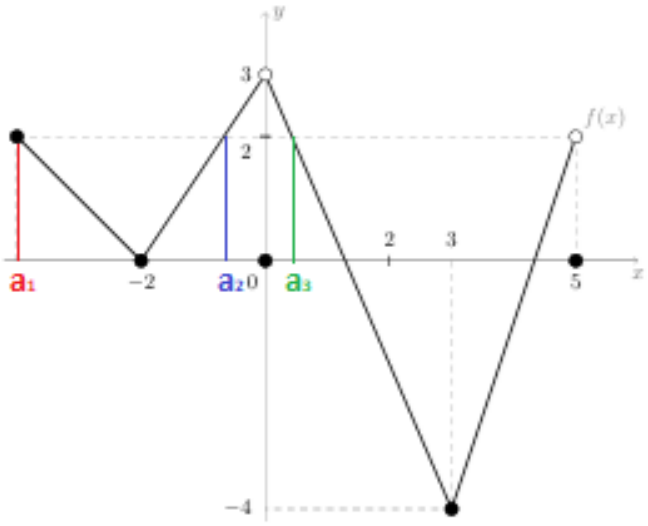
A imagem de f corresponde ao conjunto de valores que f pode assumir para os valores de x nos quais ela está definida. Vamos observar o eixo Oy das ordenadas para descobrir os valores que f assume. Para isso, é importante ter em conta que uma bolinha branca no gráfico $\circ$ indica um elemento que não está incluído no gráfico, enquanto uma bolinha preta significa que o valor ali descrito faz parte do intervalo. Por exemplo, veja que para $x = 0$, temos uma bolinha preta no 0 e uma bolinha branca no 3. Isso significa que $f(0) = 0$. Como para $x = 3$, há uma bolinha preta correspondente a $y = 4$, isso quer dizer que $f(3) = -4$, e portanto -4 é um elemento da imagem de f.
Pelo gráfico, concluímos que a imagem de f é representada pelo conjunto $[-4, 3)$.

6) Quantas soluções possui a equação $f(f(x)) = 2$?

(a) 3 **(b)** 4 **(c)** 6 **(d)** 7 **(e)** 8

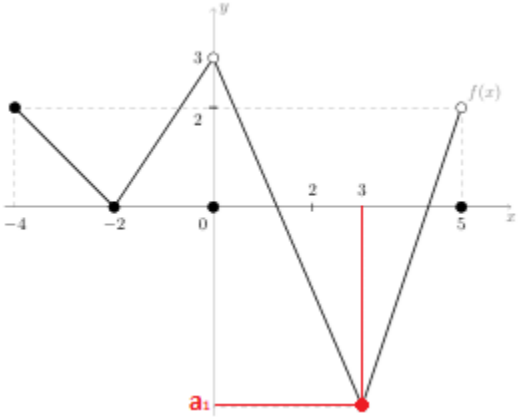
Solução: Alternativa (D)

Seja $a = f(x)$. Observe que a equação $f(f(x)) = 2$ corresponde a $f(a) = 2$. Encontremos tais valores de a analisando o gráfico. Para que isso ocorra, devemos ter 3 opções para a, indicados respectivamente nas cores vermelha (a_1), azul (a_2) e verde (a_3):

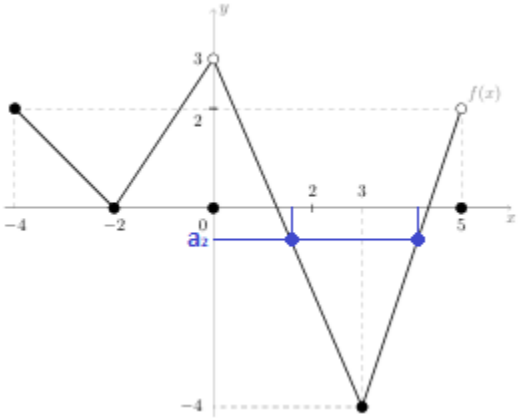


Agora, basta encontrar os valores de x tais que $f(x) = a$ para cada caso:

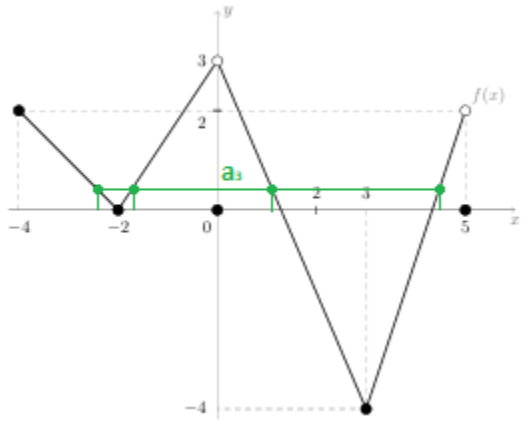
- Se $a = a_1$, então $f(x) = a_1$ possui uma solução, indicada abaixo:



- Se $a = a_2$, então $f(x) = a_2$ possui duas soluções, indicadas abaixo:



- Se $a = a_3$, então $f(x) = a_3$ possui quatro soluções, indicadas abaixo:



No total, temos $1 + 2 + 4 = 7$ soluções distintas para a equação $f(f(x)) = 2$.

Para as próximas duas questões, considere as funções f e g dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{se } x < 3 \\ 2x - 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 8 \\ x^3 + 2x - 1, & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

7) A soma das raízes reais de f e g é

(a) $-\frac{5}{2}$ **(b)** $\frac{7}{2}$ **(c)** $-\frac{3}{2}$ **(d)** $\frac{3}{2}$ **(e)** 0

Solução: Não há alternativa correta - QUESTÃO ANULADA

As raízes de uma função correspondem aos respectivos valores que a anulam. Assim, devemos resolver as equações $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$.

- Raízes de f :

  Se $f(x) = 0$, então temos duas opções:

  - $x^2 - 3x = 0$: Resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos como raízes $x = 0$ e $x = 3$. Mas como $f(x) = x^2 - 3x$ apenas se $x < 3$, então concluímos que a única possibilidade nesse caso é $x = 0$;
  - $2x - 1 = 0$: Neste caso, temos que $x = \frac{1}{2}$. Mas como $f(x) = 2x - 1$ apenas se $x \geq 3$, e $\frac{1}{2} < 3$, segue que não há raízes nesse caso.

Portanto, a única raiz real de f é $x = 0$.

- Raízes de g :

  Se $g(x) = 0$, então temos duas opções:

  - $x^2 + 2x = 0$: Resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos como raízes $x = 0$ e $x = -2$. Como ambos os valores são menores do que 8, concluímos que ambas são raízes para g.
  - $x^3 + 2x - 1 = 0$: Neste caso, veja que $x^3 + 2x - 1 > 0$ sempre que $x > 1$[1] e em particular, para $x > 8$. Daí, não haverá raízes nesse caso.

  Portanto, as raízes reais de g são $x = 0$ e $x = -2$.

Finalmente, a soma das raízes reais de f e g corresponde a $0 + 0 + (-2) = -2$.

8) Para $x \in (3, 4)$, o valor de $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$ é

(a) $2(x-1)^3$ **(b)** $2(x+1)(x^2-x+1)$ **(c)** $2(x-1)(x^2+x-1)$
(d) $2(x-1)(x^2-x+1)$ **(e)** 0

Solução: Não há alternativa correta - QUESTÃO ANULADA

9) Em relação à equação $\log\left|x^2 + x - 1\right| = 0$, é possível afirmar que

(a) não admite solução real **(b)** admite apenas uma solução real
(c) admite exatamente duas soluções reais **(d)** admite exatamente três soluções reais
(e) admite exatamente quatro soluções reais

Solução: Alternativa (E)
Para resolver esta questão, lembremos rapidamente da definição de logaritmo:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Quando a base é omitida, normalmente estamos tratando do logaritmo na base 10. No caso dessa questão, isso não faz diferença, pois, chamando $b = \left|x^2 + x - 1\right|$, veja que pela definição

$$\log_a b = 0 \Leftrightarrow a^0 = b \Rightarrow b = 1$$

[1] Mais exatamente, $x^3 + 2x - 1 > 0$ para $x > -2\left(\frac{2}{3\left(9+\sqrt{177}\right)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{177}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} \approx 0,45340.$

Basta portanto analisar a equação $\left|x^2+x-1\right|=1$.
Vamos novamente relembrar da definição da função módulo, também chamada de valor absoluto. Se $x \geq 0$, então $|x|=x$. (por exemplo, $|8|=8$ pois $8>0$). Mas se $x<0$, o sinal de x será negativo, e a função módulo irá retirar este sinal (por exemplo, $|-7|=7$, pois $-7<0$. Mas veja que $7=-(-7)$. Logo, podemos ver que, se $x<0$, então $|x|=-x$. Em resumo:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Dessa forma, temos dois casos a verificar:

- Se $x^2+x-1>0$, então $absx^2+x-1=x^2+x-1$. Nesse caso,

  $$x^2+x-1=1 \Rightarrow x^2+x-2=0.$$

  As soluções para esta equação do 2^{o} grau são $x=-2$ e $x=1$.

- Se $x^2+x-1<0$, então $absx^2+x-1=-(x^2+x-1)=-x^2-x+1$. Nesse caso,

  $$-x^2-x+1=1 \Rightarrow -x^2-x=0.$$

  As soluções para esta equação do 2^{o} grau são $x=-1$ e $x=0$.

Dessa forma, concluímos que a equação $\log\left|x^2+x-1\right|=0$, admite exatamente quatro soluções reais, sendo elas $x=-2$, $x=-1$, $x=0$ e $x=1$.

10) O conjunto das soluções reais da inequação

$$|x|+|x-1|<7$$

é dado por

(a) $[-1,0)$ **(b)** $(-3,-2)$ **(c)** $(-3,4)$ **(d)** $(-3,3)$ **(e)** $(-\infty,\infty)$

Solução: Alternativa (C)
Como já discutido anteriormente, sabemos que

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Assim, temos quatro situações para analisar:

- $x \geq 0$ e $x-1 \geq 0$:

  Nesse caso, temos que $|x|=x$ e $|x-1|=x-1$. Logo,

  $$x+x-1<7 \Rightarrow 2x-1<7 \Rightarrow 2x<8 \Rightarrow x<4$$

♣ $x \geq 0$ e $x - 1 < 0$: Nesse caso, temos que $|x| = x$ e $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$. Logo,

$$x + 1 - x < 7 \Rightarrow 1 < 7$$

Isto é sempre verdade, logo não há restrições para x nesse caso.

♥ $x < 0$ e $x - 1 \geq 0$: Nesse caso, temos que $|x| = -x$ e $|x-1| = x - 1$. Logo,

$$-x + x - 1 < 7 \Rightarrow -1 < 7$$

Isto é sempre verdade, logo não há restrições para x nesse caso.

♠ $x < 0$ e $x - 1 < 0$: Nesse caso, temos que $|x| = -x$ e $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$. Logo,

$$-x + 1 - x < 7 \Rightarrow -2x + 1 < 7 \Rightarrow -2x < 6 \Rightarrow x > -3$$

Desse modo, concluímos que $-3 < x < 4$, e portanto temos que $x \in (-3, 4)$.

11) Seja $x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. O valor de

$$\frac{\text{sen}\,(3x)}{\text{sen}\,(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$$

é

(a) -2 **(b)** -1 **(c)** 0 **(d)** 1 **(e)** 2

Solução: Alternativa (E) Para resolver esta questão, lembremos-nos das seguintes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,(a)\cos(b) + \text{sen}\,(b)\cos(a) \tag{4}$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}\,(a)\text{sen}\,(b) \tag{5}$$

Primeiramente, vamos encontrar os valores de $\text{sen}\,(3x)$ e $\cos(3x)$ em função de $\text{sen}\,(x)$ e $\cos(x)$.
Utilizando a identidade 4 com $a = 2x$ e $b = x$, veja que

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(3x) &= \text{sen}\,(2x + x) \\ &= \text{sen}\,(2x)\cos(x) + \text{sen}\,(x)\cos(2x) \end{aligned} \tag{6}$$

Utilizando agora as identidades 4 e 5 para calcular $\text{sen}\,(2x)$ e $\cos(2x)$, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(x+x) = \text{sen}\,(x+x) &= \text{sen}\,(x)\cos(x) + \text{sen}\,(x)\cos(x) \\ &= 2\text{sen}\,(x)\cos(x) \end{aligned} \tag{7}$$

e também

$$\begin{aligned}\cos(x+x) &= \cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\\ &= \cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2\end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (9), temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(2x) &= \Big(2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\Big)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\Big(\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2\Big)\\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^3\\ &= 3\operatorname{sen}(x)\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^3\\ &= \operatorname{sen}(x)\Big(3\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2\Big)\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(x)\Big(3\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2\Big)$$

Agora, utilizando a identidade 5 com $a = 2x$ e $b = x$, veja que

$$\begin{aligned}\cos((3x) &= \cos(2x + x)\\ &= \cos(2x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)\end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo (7) e (8) em (9), temos

$$\begin{aligned}\cos(2x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x) &= \Big(\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2\Big)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\Big(2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\Big)\\ &= \cos(x)^3 - \operatorname{sen}(x)^2\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)^2\cos(x)\\ &= \cos(x)^3 - 3\operatorname{sen}(x)^2\cos(x)\\ &= \cos(x)\Big(\cos(x)^2 - 3\operatorname{sen}(x)^2\Big)\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\cos(3x) = \cos(x)\Big(\cos(x)^2 - 3\operatorname{sen}(x)^2\Big)$$

Substituindo os valores encontrados na expressão original, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} &= \frac{\operatorname{sen}(x)\left(3\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2\right)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(x)\left(\cos(x)^2 - 3\operatorname{sen}(x)^2\right)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)\left(3\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2\right) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)\left(\cos(x)^2 - 3\operatorname{sen}(x)^2\right)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)\left(3\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2 - \cos(x)^2 + 3\operatorname{sen}(x)^2\right)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \\
&= \frac{\cancel{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\left(3\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2 - \cos(x)^2 + 3\operatorname{sen}(x)^2\right)}{\cancel{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}} \\
&= 3\cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2 - \cos(x)^2 + 3\operatorname{sen}(x)^2 \\
&= 2\cos(x)^2 + 2\operatorname{sen}(x)^2 \\
&= 2\left(\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)^2\right) \\
&= 2 \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

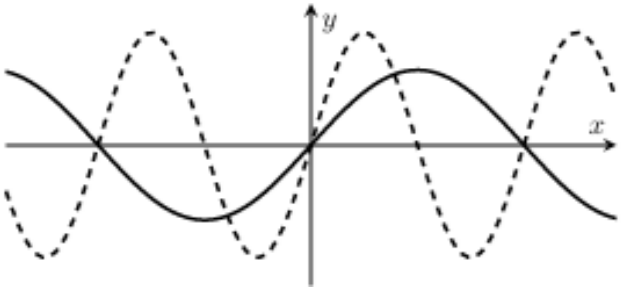
onde na penúltima passagem utilizamos a Identidade Fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Portanto, temos que

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2}$$

12) Sejam a e b números reais positivos. Na figura abaixo, a linha pontilhada representa o gráfico da função $f(x) = 4\operatorname{sen}(x)$ e a linha contínua representa o gráfico da função $g(x) = 4a\operatorname{sen}(bx)$.



Pode-se afirmar que

(a) $0 < a < 1$ e $b > 1$ **(b)** $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$ **(c)** $a > 1$ e $0 < b < 1$

(d) $a = 1$ e $b > 1$ **(e)** $0 < a < 1$ e $b = 1$

Solução: Alternativa (B)

Para resolver esta questão, lembremo-nos primeiramente que uma função senoidal genérica h da forma

$$h(x) = A + B\text{sen}\,(Cx)$$

com $A, B, C \in \mathbb{R}$, possui algumas características importantes que podem ser inferidas a partir dos coeficientes presentes, sendo elas:

- Amplitude: B
- Período: $\dfrac{2\pi}{C}$
- Imagem: $[A - B, A + B]$

Com base nessas informações, analisemos primeiramente a função f. Como $f(x) = 4\text{sen}\,(x)$, isso significa que sua amplitude é 4 e seu período é 2π, e seu gráfico corresponde à linha pontilhada. Agora, veja que $g(x) = 4a\text{sen}\,(bx)$, o que significa que a amplitude de g é $4a$ e seu período é $\dfrac{2\pi}{b}$. O gráfico de g corresponde à linha contínua, e comparando-o com o gráfico pontilhado, percebemos as seguintes constatações:

- A amplitude de g é **MENOR** do que a amplitude de f;
- O período de g é **MAIOR** do que o período de f.

Para que a amplitude de g seja menor que a amplitude de f, precisamos que

$$4a < 4 \Rightarrow a < 1$$

Para que o período de g seja maior do que o período de f, precisamos que

$$\frac{2\pi}{b} > 2\pi \Rightarrow 2\pi > 2\pi b \Rightarrow b < 1$$

Como a e b são números reais positivos conforme dito no enunciado, concluímos que

$$\boxed{0 < a < 1} \quad \text{e} \quad \boxed{0 < b < 1}$$

Esta opção está indicada na Alternativa (B).