Lista 3

Equações Diofantinas

1. Resolva as seguintes equações diofantinas:

   a) $3x + 5y = 47$,

   b) $47x + 29y = 99$.

2. Determine todas as soluções inteiras das equações abaixo que verificam $x \geq 0$, e $y \geq 0$.

   a) $54x + 21y = 906$,

   b) $30x + 17y = 300$.

3. Seja p um primo. Prove que a equação $x^4 + 4y^4 = p$ tem solução inteira se e só se $p = 5$. Nesse caso, determine suas soluções.

4. Determine todos os múltiplos positivos de 11 e 9 cuja some seja 270.

5. Determine todos os inteiros positivos menores de que 1000 que têm restos 9 e 15 quando divididos respectivamente por 37 e 52.

6. Somando-se um certo múltiplo $6x$ de 6 com certo múltiplo $9y$ de 9, obtém-se 126. Trocando x por y e y por x, a nova soma é 114. Determine x e y.

7. Se x e y são inteiros tais que $2x + 3y$ é múltiplo de 17, prove que então $9x + 5y$ é também múltiplo de 17.

8. Certo senhor, ao descontar um cheque, recebeu sem notar o número de reais trocado pelo número de centavos e vice-versa. Em seguida, gastou 68 centavos e observou, supreso, que tinha o dobro da quinta original do cheque. Determine o menor valor possível para o cheque.

9. Um pescador tenta pescar um cardume jogando diversas redes na água. Se cair exatamente em peixe em cada rede, salvam-se ainda n peixes. Se cairem n peixes em cada rede, sobram n redes vazias. Quantas são redes? Quantas são os peixes?

10. Uma pessoa tem R$ 13,60 para gastar em cervejas e refrigerantes. Se cada cerveja custa R$ 1,50 e cada refrigerante custa R$ 0,70 quantas cervejas e quantos refrigerantes ela poderá comprar?

11. Uma certa tinta pode ser comprada em galões de $18l$ ou em latas de $3l$. Precisa-se de $250l$ dessa tinta. De quantas maneiras se pode comprar latas e galões para que a quantidade de sobra seja minima?

12. Um hospital deseja adquirir medicamentos A e B de modo a distribuí-los entre alguns pacientes. Cada paciente receberá 20 vidros de cada medicamento devendo ainda sobrar 84 vidros de cada medicamento. Sabendo que A é vendido em caixas de 132 vidros e B, em caixas de 242 vidros, determine:

    a) o número mínimo de caixas de cada medicamento que o hospital deve comprar;

    b) o número de pacientes que receberão os medicamentos.

Números primos e Teorema Fundamental da Aritmética

13. Encontre todos os inteiros positivos a tais que

$$\begin{cases} \text{mmc}(120, a) & = & 360 \\ \text{mdc}(450, a) & = & 90 \end{cases}$$

14. Resolva em $\mathbb{Z}$ o sistema abaixo

$$\begin{cases} \text{mmc}(x, y) & = & 420 \\ \text{mdc}(x, y) & = & 20 \end{cases}$$

15. Seja n um inteiro positivo. Mostre que se n divide $(n-1)! + 1$, então n é primo. (*Dica:* Tome um divisor primo p de n e mostre que $p \geq n$.)

16. Seja $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = p$, um inteiro primo. O que se pode dizer sobre $\text{mdc}(a^2, b)$ e $\text{mdc}(a^2, b^2)$?

17. Mostrar que três inteiros positivos impares consecutivos não podem ser todos primos, com exceção de 3,5, e 7.

18. Sejam p, q primos tais que $p \geq q \geq 5$. Provar que $24 | p^2 - q^2$.

19. Seja n um inteiro positivo. Provar que

    a) Se $2^n - 1$ é primo entáo n é primo;
    b) $n^4 + 4$ é composto, para todo $n > 1$;
    c) todo inteiro positivo da forma $3n + 2$ tem um fator primo dessa forma;
    d) Se $n^3 - 1$ é primo, entáo $n = 2$;
    e) Se n é primo e $3n + 1$ é um quadrado, então $n = 5$.

20. a) Determinar a maior potência de 14 que divide $100!$.
    b) Determinar todos os primos que dividem $50!$;

21. Mostre que existem infinitos primos da forma $3n + 2$, com $n \in \mathbb{Z}$.

22. Mostre que se $2^m + 1$ é primos para algum $m > 0$ então m é uma potência de 2.

23. Seja $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots, p_n, \ldots$ a sequência dos números primos positivos em sua ordem natural.

    a) Mostre que $p_{n+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$;
    b) Mostre que $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$, para todo $n \geq 1$. (*Dica:* use indução.)
    c) Conclua que existem pelo menos $n + 1$ primos menores 2^{2^n}.

24. Prove que em inteiro é divisivel por 3 se, e somente se, a some de seus digitos for divisível por 3. Prove que em inteiro é divisivel por 9 se, e somente se, a some de seus digitos for divisível por 9.

25. Prove que em inteiro é divisivel por 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos seus digitos nas posições impares e a soma dos seus digitos nas posições pares for divisível por 11.

Congruências

26. a) Encontre $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x \leq 6$, tal que $11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19 \equiv x \pmod 7$
    b) Encontre $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x \leq 3$, tal que $(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{19}) \equiv x \pmod 4$

27. Sejam a, b inteiros e r, s inteiros positivos. Prove que
$$a \equiv b \pmod r \Leftrightarrow as \equiv bs \pmod{rs}$$

28. Sejam a, b inteiros e d, m inteiros positivos. Mostre que se $a \equiv b \pmod m$ e d divide m assim $a \equiv b \pmod d$

29. Sejam a, b inteiros e r, s inteiros positivos. Mostre que se $a \equiv b \pmod r$ e $a \equiv b \pmod s$ então $a \equiv b \pmod{\text{mmc}(r, s)}$

30. Sejam a, b inteiros e r, m inteiros positivos. Mostre que se $ra \equiv rb \pmod m$ e $\text{mdc}(r, m) = 1$ então $a \equiv b \pmod m$

31. Mostre que se $x \equiv y \pmod m$ assim $\text{mdc}(x, m) = \text{mdc}(y, m)$.

32. Mostre que $6 \cdot 4^m \equiv 6 \pmod 9$, para todo inteiro $m \geq 0$

33. Mostre que $5^n + 6^n \equiv 0 \pmod{11}$ para todo inteiro positivo impar m.

34. Seja a um inteiro. Mostre as afirmações abaixo.
    a) $a^2 \equiv 0, 1$ ou $8 \pmod 8$.
    b) Se a é cubo, então a^2 é congruente a $0, 1, 9$ ou 28 modulo 36
    c) Se $2 \nmid a$ e $3 \nmid a$ então $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

35. Prove que $n^7 \equiv n \pmod{42}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

36. Determine o resto das divições de:
    a) 2^{50} por 7;
    b) 41^{65} por 7;
    c) $(1^5 + 2^5 + \cdots + 100^5)$ por 4;
    d) 57383^5 por 19.

37. Use congruências para vereficar que:
    a) $89 \mid 2^{44} - 1$;
    b) $23 \mid 2^{11} - 1$.

38. Resolva as seguintes congruências lineares:
    a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$;
    b) $140x \equiv 133 \pmod{301}$.

39. Usando congruências, resolva as seguintes equações diofantinas:
    a) $4x + 51y = 9$;
    b) $12x + 25y = 331$.

40. Deternime todas as soluções das congruências abaixo:
    a) $3x - 7y \equiv 11 \pmod{13}$;
    b) $17x \equiv 3 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$.