MAT0120 - Álgebra I para Licenciatura

Lista 5

Professor: Kostiantyn Iusenko
Monitor: Douglas de Araujo Smigly

1º Semestre de 2021

1 Inteiros módulo m

(1) Construa as tabelas de adição e de multiplicação de $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_{12}$.

(2) Busque os inversos dos seguintes elementos:

(a) $\overline{14}$ em $\mathbb{Z}_{15}$; (b) $\overline{38}$ em $\mathbb{Z}_{83}$; (c) $\overline{351}$ em $\mathbb{Z}_{6669}$; (d) $\overline{91}$ em $\mathbb{Z}_{2565}$.

(3) Mostre que

(a) $\overline{73} = \overline{-92}$ em $\mathbb{Z}_5$; (b) $\overline{99} = \overline{-87}$ em $\mathbb{Z}_6$; (c) $\overline{3!} = \overline{-2!}$ em $\mathbb{Z}_8$; (d) $\overline{12!} = \overline{15!}$ em $\mathbb{Z}_9$.

(4) Em $\mathbb{Z}_{20}$, determine

(a) os menores representantes positivos de $\overline{-10}$ e $\overline{-6}$;

(b) todos os divisores de zero;

(c) todos os elementos inversos com seus inversos;

(d) repita os itens (b) e (c) para $\mathbb{Z}_{10}$ e $\mathbb{Z}_{12}$.

(5) Determine os inversos multiplicativos de $\overline{a}$ em $\mathbb{Z}_n$ e, em seguida, resolva as equações de congruências reduzidas:

(a) $a = 3, \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{10}$ e $3x \equiv 7 \pmod{10}$;

(b) $a = 6, \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{35}$ e $6x - 2 \equiv 11 \pmod{35}$.

(6) Sejam $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$ com $\operatorname{mdc}(c, m) = 1$. Prove que $\overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c}$ implica que $\overline{a} = \overline{b}$.

(7) Sejam p um primo e $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_p$. Prove que

(a) $\overline{a}^p = \overline{a}$;

(b) $(\overline{a} + \overline{b})^p = \overline{a} + \overline{b}$.

(8) O elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se **idempotente** se $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

(a) Busque todos idempotentes em $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_{12}$.

(a) Busque todos idempotentes em $\mathbb{Z}_{10}$ e $\mathbb{Z}_{30}$.

(c) Seja p um primo. Mostre que $\bar{0}, \bar{1}$ são os únicos idempotentes em $\mathbb{Z}_p$.

(9) O elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se **nilpotente** se $\bar{a}^k = \bar{0}$ para algum k. Mostre que $\mathbb{Z}_m$ não tem não-nulos nilpotentes se e só se m não tem fator primo em quadrado.

(10) Em $\mathbb{Z}_7$, busque os quadrados de todos elementos.

(11) Encontre as raízes em $\mathbb{Z}_7$ de

(a) $x^2 + x + \bar{1}$

(b) $\bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$

por completar o quadrado e usando Exercício 10.

(12) Encontre os quadrados de todos elementos em $\mathbb{Z}_{11}$.

(13) Encontre as raízes em $\mathbb{Z}_{11}$ de

(a) $\bar{4}x^2 + \bar{6}x + \bar{1}$

(b) $\bar{4}x^2 + \bar{6}x + \bar{8}$

por completar o quadrado e usando Exercício 12.

(14) Determine os divisores de zero, em $\mathbb{Z}_m$, e resolva as equações para cada caso:

(a) $\bar{7}x = \bar{0}$, $m = 21$;

(b) $\bar{4}x = \overline{10}$, $m = 22$;

(c) $\bar{3}x = \bar{6}$, $m = 24$;

(d) $\bar{5}x = \bar{0}$, $m = 25$;.

(15) Encontre os divisores de zero, em $\mathbb{Z}_m$, para $m = 8, 9, 10, 14, 15, 26, 28$.

(16) Ache os divisores de zero e os elementos que tem inversos em $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{21}$ e $\mathbb{Z}_{89}$.

(17) Resolva, em $\mathbb{Z}_m$, as equações abaixo:

(a) $\bar{3}x + \bar{2} = \bar{6}x + \bar{7}$, $m = 8$;

(b) $(\bar{2}x + \bar{3})^2 + (\bar{3}x + \bar{2})^2 + \bar{5}x = \bar{0}$, $m = 5$;

(c) $\bar{4}x - \bar{7} + \bar{6}x + \bar{2} = \bar{3}x + \bar{5}x$, $m = 12$;

(d) $x^{21} - x = \bar{0}$, $m = 5$;

(e) $x^{12} - \bar{1} = \bar{0}$, $m = 5$;

(f) $x^7 - x = \bar{0}$, $m = 4$.

(18) Resolva em $\mathbb{Z}_m$ cada um dos sistemas abaixo:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{4}x + y & = & \bar{1} \\ x - \bar{2}y & = & \bar{4}. \end{array} \right. , m = 5$

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & \bar{0} \\ \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{3}z & = & \bar{3} \\ x + y + \bar{3}z & = & \bar{0}. \end{array} \right. , m = 4$

(19) Verifique se os elementos abaixo são inversíveis. Em caso afirmativo, determine o inverso.

(a) $\overline{97}$ em $\mathbb{Z}_{307}$; (b) $\overline{22}$ em $\mathbb{Z}_{105}$.

(20) Seja p um número primo. Prove que $\overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{p-1}$ são soluções em $\mathbb{Z}_p$ da equação

$$x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x + \overline{1} = \overline{0}.$$

[Dica:] Utilize a fatoração $x^{p-1} - 1 = (x-1)(x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x + 1)$.

(21) A **ordem** de um elemento $\overline{a}$ em $\mathbb{Z}_p$ é definida como o menor inteiro positivo m tal que $\overline{a}^m = \overline{1}$.

(a) Prove que $m \leq p - 1$.

(b) Encontre as ordens de todos os elementos de $\mathbb{Z}_{11}$ e $\mathbb{Z}_{13}$.