USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor Jacques Marcovitch
Vice-reitor Adolpho José Melfi

edusp EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Diretor-presidente Plinio Martins Filho
Comissão Editorial Plinio Martins Filho (Presidente)
José Mindlin
Laura de Mello e Souza
Murillo Marx
Oswaldo Paulo Forattini

Diretora Editorial Silvana Biral
Diretora Comercial Eliana Urabayashi
Diretor Administrativo Renato Calbucci
Editor-assistente João Bandeira

Números
Uma Introdução à Matemática

César Polcino Milies
Sônia Pitta Coelho

edusp

1ª edição 1998
2ª edição 2000
3ª edição 2001

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Milies, Francisco César Polcino

Números: Uma Introdução à Matemática / Francisco César Polcino Milies, Sônia Pitta Coelho. – 3. ed. – São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 2001. (Acadêmica: 20)

ISBN: 85-314-0458-4

1. Conceito de Números 2. Matemática 3. Números – Teoria I. Coelho, Sônia Pitta II. Título. III. Série.

98-2561 CDD-510

Índice para catálogo sistemático:
1. Números : Matemática 510

Edusp – Editora da Universidade de São Paulo
Av. Prof. Luciano Gualberto, Travessa J, 374
6º andar – Ed. da Antiga Reitoria – Cidade Universitária
05508-900 – São Paulo – SP – Brasil Fax (0xx11) 3818-4151
Tel. (0xx11) 3818-4008 / 3818-4150
www.usp.br/edusp – e-mail: edusp@edu.usp.br

Printed in Brazil 2001

Foi feito o depósito legal

Sumário

PREFÁCIO

Este livro está baseado em notas escritas para o curso de Álgebra I do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Elas foram experimentadas entre 1977 e 1980 na forma de apostilas. Depois desse período foi feita uma edição preliminar que permitiu uma maior divulgação e, dessa forma, elas foram usadas não só na USP como também em outras universidades. Isso permitiu testar sua receptividade entre os alunos e fazer diversas correções.

O conteúdo deste livro apresenta algumas oportunidades didáticas muito interessantes. Ele se propõe a introduzir um grande número de demonstrações características do método axiomático, familiarizando gradualmente o estudante com o formalismo que irá encontrar à medida que progride em seus estudos. Os conceitos trabalhados são bem conhecidos do leitor, de modo que ele pode ir se adaptando aos novos métodos e ao nível de rigor necessário sem a dificuldade adicional de compreender idéias que lhe são estranhas.

O grau de formalização que adotamos é médio, apenas o suficiente para ilustrar o método axiomático. Assim, os próprios axiomas foram apresentados de um ponto de vista que poderíamos qualificar de ingênuo, mas, a partir daí, fomos bastante cuidadosos nas demonstrações.

Devemos dizer ainda uma palavra quanto à apresentação dos temas. Ela representa uma proposta ou, melhor, uma tomada de posição quanto à forma em que acreditamos que a matemática deve ser apresentada. Tomamos especial cuidado em introduzir ao longo do

texto um grande número de informações históricas, o que tem uma dupla finalidade.

De um lado, achamos que tanto conceitos como novos problemas não devem ser introduzidos "em abstrato" apenas porque o professor ou o programa querem se ocupar deles. Acreditamos que se deve levar em conta a motivação e a relevância dos temas em consideração. A história das questões tratadas é freqüentemente da maior importância nesse sentido. Isso é particularmente verdadeiro ao tratar de conceitos aritméticos ou algébricos, cuja motivação não está ligada à nossa intuição do mundo físico, como acontece em outros ramos da matemática.

De outro lado, acreditamos também que um texto, ou um curso, não se deve limitar a transmitir apenas o conteúdo "técnico" da matéria, deve-se preocupar também com a formação do estudante. Nesse sentido, é tão importante para o futuro profissional o estudo de uma determinada disciplina quanto o das circunstâncias em que se desenvolveu.

Gostaríamos de poder transmitir essas inquietudes ao estudante, para que este livro possa vir a ser para ele uma das muitas portas à matemática superior.

Quando da primeira redação destas notas, a Profa. Sara S. Herkowicz fez numerosas sugestões que contribuíram muito para o aprimoramento da versão final. Tanto a monitora Heloísa D. Borsari, que nos auxiliou na confecção da primeira versão mimeografada, como os alunos Kunio Okuda, Deborah Martins Raphael e Fernando Quadros Gouvêa, que fizeram uma cuidadosa leitura dos primeiros originais, são hoje doutores em matemática. A todos eles somos muito gratos pela valiosa colaboração.

Ao longo dos anos em que este texto foi empregado em forma experimental, diversos outros colegas nos auxiliaram com muitas correções. Somos particularmente gratos aos Profs. Leila M. Figueiredo, Roberto C. F. Costa, Maria Lucia S. Singer e Renate Watanabe, e ao aluno João F. Barros pela leitura meticulosa do mesmo, que nos levou a corrigir um grande número de detalhes.

Os autores

1

NÚMEROS INTEIROS

1.1 INTRODUÇÃO

A geometria costuma ser apresentada como uma ciência na qual todas as proposições podem ser logicamente demonstradas a partir de algumas afirmações iniciais chamadas axiomas ou postulados. Essa apresentação é muito antiga; data do século IV a.C., quando Euclides de Alexandria escreveu seus famosos *Elementos*.

Algo bem diferente acontece com a álgebra e, em particular, com a teoria elementar de números, que será o objeto destas notas. Parece claro que a noção de número natural desenvolveu-se gradativamente a partir da experiência cotidiana. Seu emprego foi-se generalizando aos poucos, e as propriedades das operações foram admitidas como um fato experimental.

Fato análogo aconteceu com a noção de racionais não-negativos, isto é, números da forma a/b em que a e b são números naturais, que surgiram ligados a problemas de grandezas geométricas.

O mesmo não aconteceu com os números inteiros negativos. O primeiro uso conhecido desses números encontra-se numa obra in-

diana, atribuída a Brahmagupta (628 d.C. aproximadamente), na qual são interpretados como dívidas.

Foi precisamente a possibilidade de dar diversas interpretações aos números negativos que fez com que eles fossem aceitos aos poucos na coletividade matemática. Porém, desde seu aparecimento, esses números suscitaram dúvidas quanto à sua legitimidade. Em 1543 Stieffel ainda os chamava de números absurdos, e Cardano, contemporâneo de Stieffel, denominava-os soluções falsas de uma equação.

Foi o aparecimento dos números complexos, ligados à problemas de resolução de equações, mas sem uma interpretação empírica acessível, que levou a ciência européia a refletir sobre a natureza dos números.

O primeiro a tentar dar à álgebra uma estrutura lógica comparável à geometria dos *Elementos* de Euclides foi o inglês George Peacok que, no seu *Treatise on Algebra*, publicado em 1830 e ampliado a dois volumes em 1845, destacou pela primeira vez a importância das chamadas "leis formais", isto é, das propriedades das operações, marcando assim o início do pensamento axiomático em álgebra.

Atitude semelhante foi assumida por seu contemporâneo e amigo, Augusto de Morgan, na sua *Trigonometry and Double Algebra*, publicada também em 1830.

Em geral, os textos apresentam aos estudantes teorias já bem organizadas, partindo de um punhado de axiomas e demonstrando ordenadamente todos os resultados subseqüentes e este livro não será exceção. Queremos, no entanto, advertir que esta abordagem dá freqüentemente ao estudante uma impressão errada da natureza da evolução da matemática, como se primeiro se fixassem as bases para só depois se desenvolver a teoria.

O processo histórico mostra que a realidade foi bem diferente. No século XVIII, Leonhard Euler descobriu as famosas fórmulas que levam seu nome, relacionando exponenciais com números complexos, e Karl F. Gauss demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que toda equação polinomial com coeficientes reais admite pelo menos uma raiz complexa. Contudo, a primeira fundamentação precisa da noção de número complexo como par ordenado de números reais é atribuída a *Sir* William R. Hamilton e data de 1833.

Como os números complexos foram os que levantaram mais dúvidas quanto à sua legitimidade, foram também eles os primeiros a ser fundamentados de forma cuidadosa, usando-se a noção de número real, que foi formalizada só em 1872 por Richard Dedekind.

No seu estudo dos números reais, Dedekind apóia-se nos racionais, que, por sua vez, definem-se a partir de pares ordenados de números inteiros. Mas, afinal, o que são os números inteiros?

A noção de número natural (a partir da qual se pode explicitar a noção de inteiros) foi fundamentada com precisão pela primeira vez por Giuseppe Peano em 1889 na sua *Arithmetica Principia Nova Methodo Exposita*. O método de Peano, com leves variantes, é usado até hoje por numerosos textos, mas tem o inconveniente de ser longo e demorado. Segundo essa teoria, a definição de número natural é estabelecida a partir de três conceitos primitivos e cinco axiomas. O leitor interessado nesse ponto de vista poderá consultar o último capítulo destas notas.

Nós preferimos dar diretamente uma fundamentação axiomática dos números inteiros, bastante usada em algumas das referências clássicas, que nos permitirá chegar mais rapidamente a resultados significativos.

1.2 UMA FUNDAMENTAÇÃO AXIOMÁTICA

Os números inteiros formam um conjunto, que notaremos por $\mathbb{Z}$, no qual estão definidas duas operações, que chamaremos de adição e multiplicação e denotaremos por $+$ e $\cdot$. Em $\mathbb{Z}$ também está definida uma relação que permite comparar os seus elementos, a relação "menor ou igual", que indicaremos por $\leq$.

Como não desejamos ser excessivamente formais, não definiremos aqui os conceitos de operação e relação; limitar-nos-emos a usá-los no seu sentido intuitivo.

Os axiomas que passaremos a detalhar descreverão algumas das propriedades básicas das operações e da relação "menor ou igual", que tomaremos como base para desenvolver a teoria. Qualquer outra propriedade, mesmo que intuitivamente óbvia, poderá ser demonstrada a partir dessas.

Observamos que em qualquer apresentação axiomática o começo tende a ser cansativo, precisamente por ser necessário demonstrar alguns fatos que são bem conhecidos. Tentamos poupar o leitor, na medida do possível, desse inevitável aborrecimento. Assim, nosso sistema de axiomas é superabundante, isto é, admitimos mais propriedades do que as estritamente necessárias, esperando tornar mais fluente a exposição. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar os exercícios.

O primeiro grupo de axiomas descreverá algumas propriedades da soma que certamente são familiares ao leitor.

A.1 Propriedade Associativa: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que

$$a + (b + c) = (a + b) + c \ .$$

A.2 Existência do Neutro: Existe um único elemento, denominado *neutro aditivo* ou *zero*, que indicaremos por 0, tal que

$$a + 0 = a \ , \text{ para todo } a \in \mathbb{Z} \ .$$

A.3 Existência do Oposto: Para cada inteiro a existe um único elemento que chamaremos oposto de a e indicaremos por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0 \ .$$

A.4 Propriedade Comutativa: Para todo par a, b de inteiros tem-se que

$$a + b = b + a \ .$$

O próximo grupo de axiomas explicita algumas das propriedades da multiplicação.

A.5 Propriedade Associativa: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que

$$a (bc) = (ab) c \ .$$

A.6 Existência do Neutro: Existe um único elemento, diferente de zero, denominado *neutro multiplicativo*, que indicaremos por 1, tal que

$$1 \cdot a = a, \text{ para todo } a \in \mathbb{Z} \ .$$

A.7 Propriedade Cancelativa: Para toda terna a, b, c de inteiros, com $a \neq 0$, tem-se que,

$$\text{se } ab = ac \text{, então, } b = c \ .$$

A.8 Propriedade Comutativa: Para todo par a, b de inteiros, tem-se que

$$ab = ba \ .$$

Comparando o grupo de axiomas dados para a adição e a multiplicação, percebe-se uma grande semelhança entre ambos. A única diferença notável surge entre os axiomas A.3 e A.7. Um análogo a A.3 para multiplicação afirmaria que para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe um elemento, digamos, $a' \in \mathbb{Z}$, tal que $a \cdot a' = 1$. Sabemos, porém, que isso não acontece: quando $a = 2$, por exemplo, não existe nenhum inteiro a' tal que $2a' = 1$ (para considerações mais precisas veja o exercício 7).

Poderíamos nos perguntar ainda por que não colocar, entre os axiomas da adição, um análogo à propriedade cancelativa A.7. Não o fizemos apenas porque é muito fácil *demonstrar* esse resultado a partir dos axiomas.

1.2.1 Proposição (Propriedade Cancelativa da Adição)

Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que,

$$\textit{se } a + b = a + c \textit{, então } b = c \ .$$

Demonstração

Se $a + b = a + c$, somando o oposto de a a ambos os membros dessa igualdade, temos que

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) \ .$$

Usando a propriedade associativa, temos:

$$[\,(-a)+(a)\,]+b=[\,(-a)+(a)\,]+c\ ,$$

isto é,

$$0+b=0+c\ ,$$

portanto,

$$b=c\ .$$ ■

O próximo axioma relaciona ambas operações.

A.9 Propriedade Distributiva: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que

$$a\,(b+c)=ab+ac\ .$$

As próximas afirmações também são intuitivamente evidentes, mas conforme o plano inicial serão demonstradas com base nos axiomas até aqui introduzidos.

1.2.2 Proposição

Para todo inteiro a, tem-se que $a\cdot 0=0$.

Demonstração

Como $a\cdot 0+a\cdot 0=a\,(0+0)=a\cdot 0=a\cdot 0+0$, comparando o primeiro e o último termo da cadeia de igualdades acima temos que

$$a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot 0+0\ .$$

Usando a propriedade cancelativa da adição, vem imediatamente que

$$a\cdot 0=0\ .$$ ■

1.2.3 Proposição

Sejam a, b inteiros, tais que $a\cdot b=0$. Então, $a=0$ ou $b=0$.

Demonstração

Se $ab=0$, usando a proposição anterior podemos escrever essa igualdade na forma $ab=a\cdot 0$.

Se $a=0$, a proposição está demonstrada. Se $a\neq 0$, podemos usar o axioma A.7 para cancelar e obtemos $b=0$. ■

Se o leitor lembra da forma como são apresentadas as operações com números inteiros no curso secundário e o mistério que envolve o processo de decidir o sinal de um produto, certamente apreciará as vantagens do método axiomático da proposição seguinte.

1.2.4 Proposição (Regra dos Sinais)

Sejam a e b inteiros. Então vale:

(i) $\quad -(-a)=a$

(ii) $\quad (-a)\,(b)=-(ab)=a\,(-b)$

(iii) $\quad (-a)\,(-b)=ab\ .$

Demonstração

Notamos inicialmente que podemos interpretar o axioma A.3 da seguinte forma: o oposto de um elemento a é o único inteiro que verifica a equação $a+x=0$.

Para provar (i) basta observar que a verifica a equação $(-a)+x=0$. Conseqüentemente, a é o oposto de $-a$ (que é o elemento indicado por $-(-a)$).

Para provar a primeira igualdade de (ii), basta observar que $(-a)\,b$ é a solução de $ab+x=0$, já que

$$ab+(-a)b=[\,(-a)+a\,]\,b=0\cdot b=0\ .$$

Analogamente, verifique que $ab+a(-b)=0$.

Para (iii), podemos observar diretamente que aplicando (ii) temos

$$(-a)\cdot(-b)=-(a(-b))=-(-(ab))\ .$$

e usando também (i) no último termo segue que

$$(-a)(-b) = ab \ . \qquad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS

1. Sejam a e b inteiros. Mostrar que:

   (i) $(-1)a = -a$.
   (ii) Se $a^2 = 0$, então $a = 0$.
   (iii) Se $a^2 = a$, então $a = 0$ ou $a = 1$.
   (iv) A equação $a + x = b$ tem uma única solução em $\mathbb{Z}$.

2. Mostrar que, se no sistema de axiomas substituímos A.7 pela proposição 1.2.3, então a propriedade cancelativa da multiplicação pode ser demonstrada a partir de novo sistema de axiomas.

Enunciaremos a seguir os axiomas referentes à relação "menor ou igual".

A.10 Propriedade Reflexiva: Para todo inteiro a tem-se que $a \leq a$.

A.11 Propriedade Anti-simétrica: Dados dois inteiros a e b, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.

A.12 Propriedade Transitiva: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Por causa dos axiomas A.10, A.11 e A.12 diz-se que a relação $\leq$ é uma *relação de ordem*.

Usaremos o símbolo $a < b$ para indicar que $a \leq b$, mas $a \neq b$; nesse caso, diremos que a é *menor* que b . No que segue, empregaremos os termos "positivo" e "negativo" no seu sentido usual, isto é, para indicar que um certo número é maior ou menor que zero, respectivamente. Quando conveniente, usaremos também os símbolos $b \geq a$ ou $b > a$ para indicar que $a \leq b$ ou $a < b$.

A.13 Tricotomia: Dados dois inteiros quaisquer a e b tem-se que ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$.

Devemos ainda introduzir alguns axiomas que vinculem a relação de ordem com as operações:

A.14 Para toda terna a, b, c de inteiros, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$.

A.15 Para toda terna a, b, c de inteiros, se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.

Note que, no nosso sistema de axiomas, admite-se que $1 \neq 0$, porém, não sabemos ainda se $0 < 1$ ou $1 < 0$. Felizmente, já estamos em condições de elucidar essa dúvida tão pouco razoável.

1.2.5 Proposição

Seja a um inteiro. Então:

(i) *Se $a \leq 0$, então $-a \geq 0$.*
(ii) *Se $a \geq 0$, então $-a \leq 0$.*
(iii) $a^2 \geq 0$ *(isto é, na terminologia usual, todo quadrado é não negativo).*
(iv) $1 > 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $a \leq 0$, usando o axioma A.14 podemos somar $-a$ a ambos os membros e temos

$$(-a) + a \leq (-a) + 0 \text{, isto é, } 0 \leq -a \ .$$

A demonstração de (ii) é análoga.

Para provar (iii) discutiremos separadamente dois casos. Se $a \geq 0$, podemos, usando A.15, multiplicar ambos os membros dessa desigualdade por a e obtemos diretamente $a \cdot a \geq 0 \cdot a$, isto é, $a^2 \geq 0$. Se $a \leq 0$, de (i) vem que $-a \geq 0$. Da parte anterior temos que $(-a)^2 \geq 0$ e, da parte (iii) da proposição 1.2.4 vem que $(-a)^2 = a^2$; logo $a^2 \geq 0$.

Finalmente, como $1 = 1^2$, (iv) segue imediatamente de (iii). $\blacksquare$

EXERCÍCIOS

3. Sejam a e b inteiros tais que $a < b$. Provar que $-a > -b$.

4. Demonstrar que as afirmações obtidas dos axiomas A.12, A.14 e A.15 substituindo o símbolo $\leq$ por $<$ são verdadeiras.

5. Dado um inteiro a, chamamos valor absoluto de a o número inteiro designado por $|a|$ e definido como segue:
Se $a \geq 0$, então $|a| = a$.
Se $a < 0$, então $|a| = -a$.
Sejam a e b inteiros. Provar que:

(i) $|a| \geq 0$ e $|a| = 0$ se e somente se $a = 0$.
(ii) $-|a| \leq a \leq |a|$.
(iii) $|-a| = |a|$.
(iv) $|ab| = |a|\,|b|$.
(v) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular) .
(vi) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Para apresentar nosso último axioma, introduziremos primeiro alguns conceitos.

1.2.6 Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Diz-se que A é limitado inferiormente se existe algum inteiro k tal que, para todo $a \in A$, tem-se que $k \leq a$.

Um elemento $a_0 \in A$ diz-se elemento mínimo de A se, para todo $a \in A$, tem-se que $a_0 \leq a$ (verifique que, se existe um elemento mínimo de A, ele é único).

De forma análoga define-se conjunto *limitado superiormente* e *elemento máximo* de um conjunto.

Usaremos os símbolos *min A* e *max A* para indicar o mínimo e o máximo de um conjunto A, quando existirem.

A.16 Princípio da Boa Ordem: Todo conjunto não-vazio de inteiros não-negativos contém um elemento mínimo.
Note que, como conseqüência dos axiomas A.14 e A.15, podemos provar que $0 < 1$. Porém, ainda não conseguimos demonstrar o fato óbvio de que não existem inteiros entre 0 e 1. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

1.2.7 Proposição

Seja a um inteiro tal que $0 \leq a \leq 1$. *Então,* $a = 0$ *ou* $a = 1$.

Demonstração

Suponhamos por absurdo que exista um inteiro a diferente de 0 e 1 nessas condições. Assim, o conjunto $S = \{ a \in \mathbb{Z} \mid 0 < a < 1 \}$ seria não-vazio e pelo Princípio da Boa Ordem existiria $m = min\ S$.

Como $m \in S$ temos que $m > 0$ e $m < 1$. Usando o axioma A.15, multiplicando por m a segunda desigualdade, obtemos $m^2 < m$. Assim, $m^2 > 0$ (verifique) e, como $m < 1$, da propriedade transitiva temos $m^2 < 1$. Logo, $m^2 \in S$ e é menor que seu elemento mínimo, uma contradição. ■

O Princípio da Boa Ordem desempenhará um papel importante em muitas demonstrações. Para ilustrar como o utilizamos, provaremos que o conjunto dos inteiros positivos tem a chamada Propriedade Arquimediana. Veja também a proposição 1.2.9 e o exercício 8.

1.2.8 Proposição (Propriedade Arquimediana)

Sejam a e b inteiros positivos. Então, existe um inteiro positivo n tal que $na > b$.

Demonstração

Suponhamos que a afirmação não seja verdadeira. Isso significa que, para todo inteiro positivo n, tem-se que $b \geq na$. Assim, o conjunto

$$S = \{ b - na \mid n \in \mathbb{Z},\ n > 0 \}$$

está formado por inteiros não-negativos. Conforme o Princípio da Boa Ordem, existe $m = min\ S$. Como $m \in S$, ele é da forma $m = b - ra$ para algum $r \in \mathbb{Z}$.

Consideramos então o elemento $m' = b - (r + 1)a$, que também pertence a S, e temos

$$m' = b - (r + 1)a = (b - ra) - a = m - a < m$$

(pois $a > 0$; verifique!).

Teríamos, então, que $m' \in S$ e $m' < m = min\ S$, uma contradição. ■

Note que, trivialmente, se um conjunto A tem um mínimo, então A é limitado inferiormente. A recíproca também é verdadeira, como demonstraremos a seguir.

1.2.9 PROPOSIÇÃO

Todo conjunto não-vazio de inteiros limitados inferiormente tem mínimo.

DEMONSTRAÇÃO

Seja A um tal conjunto e seja ainda $k \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $a \in A$, tem-se que $k \leq a$. Consideramos então o conjunto

$$S = \{ a - k \mid a \in A \} .$$

Obviamente, $S \neq \phi$, já que A é não-vazio. E, como $k \leq a$, para todo $a \in A$, os elementos de S são não-negativos. Do Princípio da Boa Ordem, existe $m = min\ S$, que será da forma $m = a_0 - k$, para algum $a_0 \in A$. Mostraremos que o elemento a_0 assim determinado é o mínimo de A.

Como a_0 é um elemento de A, só resta verificar que, para todo $a \in A$, tem-se que $a_0 \leq a$. Suponhamos que isso não aconteça; existiria, então, $a_1 \in A$ tal que $a_1 < a_0$. Somando $-k$ a ambos os membros, $a_1 - k < a_0 - k = m$. Teríamos exibido, assim, um elemento de S menor que $m = min\ S$, uma contradição.

EXERCÍCIOS

6. Seja a um inteiro. Provar que, se $b \in \mathbb{Z}$ é tal que $a \leq b \leq a + 1$ então $b = a$ ou $b = a + 1$. (Note que esse resultado permite definir a noção de "sucessor" de um inteiro. Esse é um dos conceitos em que G. Peano se baseou para elaborar sua axiomática do número natural.)

7. Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ diz-se *inversível* se existe um outro elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostrar que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1. (Sugestão: provar que, se $aa' = 1$, então $|a| = 1$.)

8. Provar que todo conjunto não-vazio de inteiros limitado superiormente contém um elemento máximo.

9. Provar que, se um conjunto de inteiros tem elemento mínimo, então este é único. Fazer o mesmo, em relação ao máximo.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

10. Sejam a, b, c, d inteiros. Provar que
    (i) Se $a \geq b$ e $c \geq 0$, então $ac \geq bc$.
    (ii) Se $c > 0$ e $ac < bc$, então $a < b$.
    (iii) Se $c < 0$ e $ac > bc$, então $a < b$.
    (iv) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$. (Sugestão: dividir em casos. Por exemplo, $a, b \geq 0$.)
    (v) Se $a < b$, então $a^3 < b^3$. É verdade que, se $a < b$, então $a^2 < b^2$?
    (vi) Se $ab > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$.
    (vii) Se $0 \leq a \leq b$ e $0 < c \leq d$, então $ac < bd$.
    (viii) Se $0 \leq a < b$ e $0 < c \leq d$, então $ac < bd$.
    (ix) Se $a^7 = b^7$, então $a = b$. (Sugestão: dividir em casos. Por exemplo, $a, b \geq 0$.)
    (x) Se $a + a + a + a = 0$, então $a = 0$.

11. Provar que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{Z}$.

12. Demonstrar que, para todo inteiro a, $a - 1$ é o maior inteiro menor que a.

Os próximos exercícios mostram algumas alternativas possíveis na formulação do sistema de axiomas.

13. Provar que a propriedade cancelativa A.7 pode ser deduzida usando o axioma A.13, se este for formulado para a relação $<$.

14. Provar que a propriedade comutativa da adição A.4 é conseqüência do caso particular $a+(-a)=(-a)+a$ e dos demais axiomas. (Sugestão: desenvolver $(a+b)(1+1)$ de duas formas diferentes.)

15. Provar que o axioma A.13 (Tricotomia) é conseqüência do seguinte caso particular: dado um inteiro a, tem-se que ou $a<0$ ou $a=0$ ou $a>0$.

16. Provar que, se nos axiomas A.2, A.3 e A.6 supomos *apenas a existência* de neutro aditivo, de oposto de um elemento e de neutro multiplicativo, então pode-se *demonstrar* que esses elementos são únicos.

17. Seja $P=\{a\in\mathbb{Z}\mid a>0\}$ (isto é, o conjunto dos inteiros que usualmente chamamos de positivos). Provar que:

    (i) Se $a\in P$ e $b\in P$, então $a+b\in P$.
    (ii) Se $a\in P$ e $b\in P$, então $ab\in P$.
    (iii) Para todo $a\in\mathbb{Z}$, vale uma e somente uma das seguintes possibilidades: $a=0$ ou $a\in P$ ou $-a\in P$.

    Demonstrar que, se aceitarmos os axiomas A.1, A.2 e A.3, se admitirmos a existência de um subconjunto $P\subset\mathbb{Z}$ verificando as condições (i), (ii) e (iii) acima e se definirmos uma relação de ordem por $a\leq b$ se e somente se $a=b$ ou $b-a\in P$, então os axiomas A.10, A.11, A.12, A.13, A.14 e A.15 podem ser demonstrados como proposições.

1.3 O PRINCÍPIO DE INDUÇÃO COMPLETA

As ciências naturais utilizam o método chamado indução empírica para formular leis que devem reger determinados fenômenos a partir de um grande número de observações particulares, selecionadas adequadamente. Esse tipo de procedimento, embora não seja uma demonstração de que um dado fato é logicamente verdadeiro, é freqüentemente satisfatório. Por exemplo: ninguém duvidaria de que quando um corpo é liberado ao seu próprio peso, no vácuo, na superfície da Terra, ele cai segundo a vertical local.

A validade de um teorema matemático se estabelece de forma totalmente diferente. Verificar que uma certa afirmação é verdadeira num grande número de casos particulares não nos permitirá concluir que ela é válida.

Com efeito, dada a expressão $\phi(n)=n^2-n+41$, consideremos a seguinte afirmação: para cada inteiro positivo n, o valor de $\phi(n)$ é um número primo (estamos supondo aqui que o leitor está familiarizado com a noção de número primo; de qualquer forma, ela será definida no próximo capítulo).

Para $n=1$ temos que $\phi(1)=41$. Da mesma forma, $\phi(2)=43$, $\phi(3)=47$ e se o leitor tiver paciência suficiente poderá verificar que a afirmação é verdadeira para os primeiros 40 valores de n. Porém, para $n=41$ temos que $\phi(41)=41\cdot 41$, que não é um número primo.

Consideremos então uma afirmação como a seguinte: a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a

$$\frac{n(n+1)}{2}, \text{ ou em símbolos,}$$

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\quad .$$

Como verificar sua validade? Evidentemente, é impossível demonstrá-la em *todos* os casos particulares.

Para demonstrar a verdade desse tipo de proposição, que na realidade é uma seqüência infinita de proposições, uma para cada inteiro positivo, introduziremos o chamado *método de recorrência* ou de *indução completa*. Para isso, começaremos demonstrando o seguinte resultado:

1.3.1 Teorema

Sejam a um inteiro dado e S um conjunto de inteiros maiores ou iguais a a, que tem as seguintes propriedades:

(i) $a\in S$.
(ii) *Se um inteiro $k\geq a$ pertence a S, então $k+1$ também pertence a S.*

Então S é o conjunto de todos os inteiros maiores ou iguais a a.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então, o conjunto S' dos inteiros maiores ou iguais a a que não pertencem a S é não-vazio (e limitado inferiormente por a). Conforme a proposição 1.2.9, existe $m = mín\ S'$.

Como $a \in S$, certamente $a < m$, logo $a \leq m - 1 < m$. Temos ainda que $m - 1 < m = mín\ S'$, logo $m - 1 \notin S'$, isto é, $m - 1 \in S$. Conforme (ii), teremos então que $m = (m-1)+1 \in S$, uma contradição, já que $m \in S'$. ■

1.3.2 COROLÁRIO (PRINCÍPIO DE INDUÇÃO COMPLETA – 1ª FORMA)

Seja a um inteiro dado. Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $A(n)$ de forma que:

(i) *$A(a)$ é verdadeira.*

(ii) *Se para um inteiro $k \geq a$, $A(k)$ é verdadeira, então $A(k+1)$ é verdadeira.*

Então a afirmação $A(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq a$.

DEMONSTRAÇÃO

Basta considerar o conjunto S dos inteiros $n \geq a$ para os quais $A(n)$ é verdadeira e verificar que está nas condições do teorema anterior. Assim, S contém *todos* os inteiros maiores ou iguais a a e segue a tese. ■

1.3.3 EXEMPLO

Provaremos agora que a fórmula

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Para $n = 1$, a fórmula acima dá

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}, \text{ isto é, } 1 = 1.$$

Assim, nossa afirmação é verdadeira para $n = 1$. Deveremos mostrar agora que, se a afirmação é verdadeira para $n = k$, então também é verdadeira para $n = k+1$.

Estamos admitindo, então, como verdadeiro que

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Somando $k + 1$ a ambos os membros dessa igualdade temos

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2},$$

isto é,

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

que é a fórmula correspondente a $n = k + 1$, cuja validade queríamos demonstrar.

1.3.4 EXEMPLO (SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA)

Sejam a e r dois números inteiros. A seqüência $a_1 = a$, $a_2 = a + r$, $a_3 = a + 2r, \ldots, a_n = a + (n-1)r, \ldots$ diz-se uma *progressão aritmética de razão r*. Provaremos que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é

$$a + (a + r) + \ldots + (a + (n-1)r) = \frac{n(2a+(n-1)r)}{2}$$

Como efeito, para $n = 1$ a fórmula é

$$a = 1 \cdot \frac{2a}{2}, \text{ isto é, para } n = 1 \text{ ela é verdadeira.}$$

Suponhamos agora que a fórmula valha para $n = k$, isto é, admitimos que vale

$$a + (a + r) + ... + (a + (k - 1) r) = \frac{k(2a+(k-1)r)}{2}$$

Somando $a + kr$ a ambos os membros dessa igualdade, temos

$$a+ (a+ r) + ... (a+ (k-1) r) + (a+ kr) = \frac{k(2a+(k-1)r)}{2} + (a+ kr) =$$

$$= \frac{k(2a+(k-1)r)+2(a+kr)}{2} = \frac{2ak+k(k-1)r+2a+2kr}{2} =$$

$$= \frac{2a(k+1)+kr(k-1+2)}{2} = \frac{2a(k+1)+kr(k-1)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(2a+kr)}{2},$$

isto é,

$$a + (a + r) + ... + (a + kr) = \frac{(k+1)(2a+kr)}{2},$$

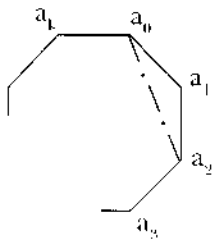
que é a fórmula correspondente a $n = k+1$, cuja validade queríamos demonstrar.

1.3.5 Exemplo

Mostraremos agora um resultado da geometria do plano: "a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é

$$S_n = (n - 2) 180^\circ, n \geq 3" .$$

De fato, para $n = 3$ temos que o polígono convexo correspondente é um triângulo e sabemos da geometria elementar que a soma dos seus ângulos é 180°.



Suponhamos a afirmação válida para $n = k \geq 3$, isto é, que a soma dos ângulos de um polígono convexo com k lados é $S_k = (k-2)\ 180^\circ$ e consideremos o polígono convexo $a_0\, a_1 ... a_k$ com $k + 1$ lados.

O polígono $a_0\, a_2 ... a_k$ que se obtém traçando o segmento $a_0\, a_2$ tem k lados; conseqüentemente, a soma dos seus ângulos é $S_k = (k-2)\ 180^\circ$.

Agora, a soma dos ângulos do polígono original será S_k mais a soma dos ângulos do triângulo $a_0\, a_1\, a_2$, isto é, $S_{k+1} = S_k + 180^\circ = (k-2)\ 180^\circ + 180^\circ = (k-1)\ 180^\circ$.

1.3.6 Exemplo

Consideremos a fórmula $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. O leitor poderá verificar diretamente que ela é falsa para $n = 1$ e $n = 2$. Porém, para $n = 3$ obtemos $54 > 37$, que é uma afirmação verdadeira.

Suponhamos, então, que a afirmação é verdadeira para $n = k \geq 3$, isto é, que $2k^3 > 3k^2 + 3k + 1$. Tentaremos demonstrar que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$, isto é, que

$$2 (k + 1)^3 > 3(k + 1)^2 + 3 (k + 1) + 1 .$$

Temos que

$$2 (k + 1)^3 = 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 .$$

Usando a hipótese de indução, vem

$$2 (k + 1)^3 > 3k^2 + 3k + 1 + 6k^2 + 6k + 2 =$$

$$= 3 (k^2 + 2k + 1) + 3k + 6k^2 =$$

$$= 3 (k + 1)^2 + 3k + 6k^2 .$$

Como $k \geq 3$, temos que $6k^2 \geq 54 > 3 - 1$ e substituindo na fórmula acima obtemos:

$$2(k+1)^3 > 3(k+1)^2 + 3k + 3 + 1 = 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1,$$

como queríamos demonstrar.

Podemos, afirmar, então que a fórmula dada é válida para todo inteiro maior ou igual a 3.

EXERCÍCIOS

1. Usando a fórmula do exemplo 1.3.3, dar outra demonstração da fórmula que dá a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

2. Calcular a soma dos n primeiros números pares.

3. Calcular a soma dos n primeiros inteiros ímpares.

4. Provar que para todo inteiro positivo n vale:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} .$$

5. (Soma dos termos de uma progressão geométrica) Sejam a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. A seqüência $a_1 = a$, $a_2 = ra$, $a_3 = r^2a$, ..., $a_n = r^{n-1}a$, ... diz-se uma *progressão geométrica de razão* r. Provar que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1} .$$

6. Provar que $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

7. Provar que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\frac{n(n-3)}{2}$.

Existe uma variante do Princípio de Indução, que é útil em algumas demonstrações.

1.3.7 Teorema

Sejam a um inteiro dado e S um conjunto de inteiros maiores ou iguais a a, que tem as seguintes propriedades:

(i) $a \in S$.

(ii) *Se k é um inteiro maior ou igual a a tal que todo inteiro m verificando $a \leq m \leq k$ pertence a S, então $k + 1$ pertence a S.*

Então, S é o conjunto de todos os inteiros maiores ou iguais a a.

Demonstração

Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então, o conjunto S' dos inteiros maiores ou iguais a a, que não pertencem a S, é não-vazio e limitado inferiormente. Conforme a proposição 1.2.9, existe $m_0 = min\ S'$, e pela condição (i) certamente $m_0 > a$, logo $m_0 - 1 \geq a$.

Como m_0 é o menor dos elementos de S', podemos concluir que os inteiros a, $a + 1$, ..., $m_0 - 1$ todos pertencem a S. Logo, aplicando a condição (ii) para $k = m_0 - 1$, temos que $(m_0 - 1) + 1 = m_0$ pertence a S; uma contradição. ■

1.3.8 Corolário (Princípio de Indução Completa – 2ª Forma)

Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $A(n)$ de forma que

(i) *$A(a)$ é verdadeira.*
(ii) *Se $A(m)$ é verdadeira para todo inteiro m tal que $a \leq m \leq k$, então $A(k + 1)$ é verdadeira.*

Então $A(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq a$.

Deixamos a demonstração a cargo do leitor, que poderá fazê-la imitando a do corolário 1.3.2.

1.3.9 Exemplo

Vamos definir uma seqüência da seguinte forma: os dois primeiros termos serão $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$; cada um dos termos subseqüentes define-se como a soma dos dois anteriores, isto é, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Assim, os primeiros termos dessa seqüência serão: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

Queremos demonstrar que, para cada n, vale a desigualdade:

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n .$$

De fato, para $n = 1$ temos $1 < \frac{7}{4}$ e para $n = 2$ temos $3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$.

Seja então $k \geq 2$ e suponhamos agora que ela vale para todo inteiro positivo menor ou igual a k. Queremos provar que $a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$. Temos então que $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$.

Da hipótese de indução, a afirmação vale, em particular, para $n = k$ e $n = k - 1$. Logo, temos

$$a_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k \text{ e } a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}, \text{ donde}$$

$$a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left[\frac{7}{4}+1\right] = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \frac{11}{4}.$$

Como ainda $\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^2$, temos que

$$a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1},$$

como queríamos demonstrar. (Nesse exemplo usamos propriedades elementares da exponenciação, que o leitor demonstrará no exercício 8.)

Antes de concluir esta seção, gostaríamos de observar que a indução completa fornece também um método para definir novos conceitos (o chamado *método de recorrência*).

Por exemplo, dado um inteiro a, podemos definir potência de a de expoente positivo da seguinte forma:

(i) $a^1 = a$.
(ii) Para cada inteiro positivo n, definimos $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

O par de condições acima dá uma regra que especifica o significado do símbolo a^n para cada inteiro $n \geq 1$. Por convenção definiremos ainda $a^0 = 1$.

O método de recorrência também é usado para definir o símbolo $n!$ (fatorial de n). Definimos:

(i) $1! = 1$.
(ii) $n! = n\,[\,(n-1)!\,]$ para todo inteiro $n \geq 2$.

Assim, temos que $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ e, em geral, $n!$ é o produto de todos os números positivos menores ou iguais a n. Por conveniência, define-se também $0! = 1$ *.

Como seria de se esperar, quando se define um objeto matemático por recorrência, o Princípio de Indução Completa revela-se uma ferramenta útil para estudar esse objeto. Os exercícios 8 e 10 ilustrarão esse fato.

EXERCÍCIOS

8. Sejam a e b inteiros. Provar que:

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$,
(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$,
(iii) $(ab)^m = a^m b^m$,

quaisquer que sejam $m, n \geq 0$.

9. Decidir se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

(i) $(mn)! = m!\,n!$, para todo $m, n \geq 1$.
(ii) $(m+n)! = m! + n!$, para todo $m, n \geq 1$.

10. Provar que:

(i) $n! > n^2$, para todo $n \geq 4$.
(ii) $n! > n^3$, para todo $n \geq 6$.

(*) Note que, sem menção explícita, fizemos uso de definições por recorrência nos exemplos 1.3.4, 1.3.9 e no exercício 5.

11. Sejam a e b inteiros e n um inteiro maior ou igual a 1. Provar que:

(i) Se n é ímpar e $a^n = b^n$, então $a = b$.

(ii) Se n é par e $a^n = b^n$, então $a = \pm b$.

(iii) Se a e b são positivos e $a^n < b^n$, então $a < b$.

O que se pode afirmar se a e b são negativos? E se são inteiros quaisquer?

O uso do Princípio de Indução Completa como método de demonstração parece ser muito antigo e está implícito na obra de Euclides. Aceita-se freqüentemente que a primeira formulação explícita desse princípio se deve a Blaise Pascal, num folheto intitulado *Traité du Triangle Arithmétique*, escrito em 1654, mas publicado somente depois de 1665, porque Pascal havia se retirado da matemática para dedicar-se à religião * . Descobriu-se posteriormente que o essencial desse folheto estava contido na correspondência mantida entre Pascal e Pierre de Fermat sobre o jogo de azar. Essa mesma correspondência é considerada hoje a origem da Teoria das Probabilidades.

O nome "indução matemática" surgiu bem mais tarde. Apareceu pela primeira vez em 1838 num artigo de Morgan. Esse princípio desempenha um papel essencial na fundamentação do número natural devida a G. Peano, que mencionamos em 1.1 .

Sobre a história do Princípio de Indução, o leitor pode consultar, por exemplo, o artigo de F. Cajori, "Origin of the Name 'Mathematical Induction'", *American Mathematical Monthly*, 25 (1918), pp. 197-201.

(*) Lemos, por exemplo, na *História da Matemática* de Carl B. Boyer (São Paulo, Edusp e Edgar Blücher, 1974), que, na noite de 23 de novembro de 1654, das 22h30min às 24h30min, Pascal experimentou um êxtase religioso que o levou a abandonar a ciência pela teologia. Uma noite, em 1658, uma dor de dentes o impedia de dormir e, para distrair-se, voltou ao estudo da ciclóide. A dor melhorou milagrosamente e Pascal considerou isso um sinal de que o estudo da matemática não desagradava a Deus.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

12. Demonstrar que para todo inteiro positivo n vale:

(i) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [\frac{1}{2}\, n\, (\, n+1\,)\,]^2$.

(ii) $1 + 2\,(\frac{1}{2}) + 3\,(\frac{1}{2})^2 + \ldots + n\,(\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(iii) $(1 - \frac{1}{2})\,(1 - \frac{1}{3})\ldots(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

(iv) $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

(v) $n < 2^n$.

13. Seja x um inteiro positivo. Demonstrar que

$(1 + x)^n > 1 + nx$, para todo $n \geq 2$.

14. Demonstrar que, traçando-se n retas em um plano, não se pode dividi-lo em mais de 2^n "partes" .

1.4 O TEOREMA DO BINÔMIO

O leitor certamente está familiarizado, desde o curso secundário, com as potências de um binômio. Assim, por exemplo, temos que

$(a + b)^1 = a + b$,
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Nesta seção utilizaremos o Princípio de Indução Completa para demonstrar a fórmula que dá a expressão de $(a + b)^n$, para qualquer inteiro positivo n . Esse teorema é freqüentemente atribuído a Newton, mas era conhecido há muito tempo pela ciência européia e mesmo antes por autores orientais, ao menos de forma empírica. A razão pela qual se associa o nome Newton a esse resultado é que ele conseguiu

estendê-lo para coeficientes fracionários (que não consideraremos aqui). Quando o expoente não é um inteiro positivo, o desenvolvimento do binômio conduz a séries infinitas; isso o levou naturalmente à idéia de limite. O Teorema do Binômio, junto com suas preocupações com o problema da determinação de tangentes, pode, assim, ser considerado parte da "pré-história" do cálculo diferencial.

Introduziremos primeiro os *números combinatórios*, já que eles irão desempenhar um papel fundamental no Teorema do Binômio.

Desde tempos muito remotos os homens têm-se preocupado com o problema de saber de quantas maneiras se pode combinar um determinado número de letras. Por exemplo, no *Sefer Ietzirá* — um livro que data dos primeiros séculos da era cristã e que, segundo a tradição oral, teria sido composto pelo patriarca Abraão milhares de anos antes — lemos:

> Aleph com todas e todas com Aleph.
> Beth com todas e todas com Beth.
> Se repetem num círculo e existem em 231 portas *.

O que o autor quer dizer é o seguinte: o alfabeto hebraico é formado por 22 letras (das quais as duas primeiras são precisamente Aleph e Beth) e está-se tentando determinar quantos grupos de duas letras podem ser formados com elas. Como veremos adiante, esse número é precisamente 231.

Esse problema pode ser enunciado de forma geral. Seja $A = \{a_1, ..., a_n\}$ um conjunto não vazio, com n elementos; desejamos determinar o número de subconjuntos de A com k elementos, onde k é um inteiro tal que $0 \le k \le n$. Denotaremos esse número pelo símbolo $\binom{n}{k}$, que se lê: combinações de n elementos tomados k a k. Não é difícil determinar o número.

1.4.1 PROPOSIÇÃO

Nas condições acima, tem-se que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

(*) Ver, por exemplo, A. Kaplan, *Sepher Ietzirá*, Madrid, Ed. Mirach, S.L., 1994, p.158.

DEMONSTRAÇÃO

Faremos a demonstração por indução sobre n.

Se $n = 1$, os únicos valores possíveis para k são $k = 0$ e $k = 1$. Obviamente, um conjunto com um elemento tem um único subconjunto com 0 elementos (o vazio) e um único subconjunto com 1 elemento (ele próprio), donde

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1 .$$

Temos: $\frac{1!}{0!(1-0)!} = 1$ e $\frac{1!}{1!(1-1)!} = 1$,

de modo que o enunciado é válido se $n = 1$.

Suponhamos, agora, como hipótese de indução, que a proposição é válida para conjuntos com $n-1$ ($n \ge 2$) elementos, seja k um inteiro tal que $0 \le k \le n-1$ e seja A um conjunto com n elementos.

Vamos denotar por r o número de subconjuntos de A que têm k elementos e que não contêm, entre eles, o elemento a_n, e denotar por s o número de subconjuntos de A que têm k elementos e que contêm o elemento a_n. Então, claramente, temos que

$$\binom{n}{k} = r + s .$$

Note que r nada mais é do que o número de subconjuntos de $A' = \{a_1, ..., a_{n-1}\}$ que têm k elementos. Logo,

$$r = \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

E os subconjuntos de k elementos de A que contêm a_n estão formados pela união de $\{a_n\}$ com subconjuntos de A' que têm $k-1$ elementos. Portanto,

$$s = \binom{n-1}{k-1} .$$

Segue-se, então, que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Essa relação entre números combinatórios é conhecida como *Fórmula de Stieffel*.

Podemos calcular os números do segundo membro a partir da nossa hipótese de indução. Temos, assim, que

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} .$$

Como $k! = (k-1)!k$ e $(n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$, podemos escrever as frações acima com denominador comum:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

o que demonstra a fórmula para $0 \le k \le n-1$. Para $k = n$, tem-se

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1 . \qquad \blacksquare$$

Note que todos os fatores de $(n-k)!$ comparecem em $n!$. Cancelando, podemos dar outra expressão para $\binom{n}{k}$, com a qual é mais fácil calcular:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} .$$

No numerador, temos k fatores decrescentes começando por n e no denominador, k fatores crescentes começando por 1.

Assim, por exemplo, temos que

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 .$$

No caso particular das "portas" mencionadas no *Sefer Yetzirá*, temos que

$$\binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{1 \cdot 2} = 231 .$$

Também vale a pena observar que, pelo fato de $\binom{n}{k}$ indicar um número de subconjuntos, ele é sempre um inteiro, apesar de a expressão obtida ter denominadores. Segue-se, então, o seguinte:

1.4.2 Corolário

Sejam k, n inteiros positivos, com $k \le n$. Então,

$k!\,(n-k)!$ divide $n!$.

Agora estamos em condições de estabelecer a fórmula do binômio.

1.4.3 Teorema

Sejam a e b inteiros e n um inteiro positivo. Então,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

ou, usando a notação de "somatórias",

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}\, b^i .$$

Demonstração

Usaremos a primeira forma do Princípio de Indução.

Para $n = 1$, a fórmula obtida é $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b$; logo, a afirmação é verdadeira nesse caso.

Suponhamos, então, que a fórmula é válida para $n = k \ge 1$. Temos que

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = a(a+b)^k + b(a+b)^k .$$

Usando a hipótese de indução, vem

$$a(a+b)^k = \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k ,$$

$$b(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} .$$

Somando ambas as expressões, temos

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0} a^{k+1} + \left\{\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right\} a^k b + \left\{\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right\} a^{k-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ \left\{\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right\} ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

e, usando repetidamente a Fórmula de Stieffel, obtemos

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \ldots + \binom{k+1}{k} ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1}.$$

Como ainda $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$, temos finalmente

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{k+1}{k} ab^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}. \quad \blacksquare$$

Como um exercício simples, o leitor pode provar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Isso mostra que *coeficientes eqüidistantes dos extremos são iguais no desenvolvimento de* $(a+b)^n$.

Se dispusermos os coeficientes binomiais por filas, correspondentes a cada potência, obteremos o seguinte diagrama:

n=0					1					
n=1				1		1				
n=2			1		2		1			
n=3		1		3		3		1		
n=4	1		4		6		4		1	
n=5	1		5		10		10		5	1

Essa disposição de números é conhecida como *triângulo de Pascal* ou *triângulo aritmético*. É muito fácil dar uma regra para sua formação: os lados estão formados por 1's e cada número no interior do triângulo é a soma dos dois números mais próximos dele, na fila anterior. O leitor poderá justificar facilmente esta regra, relendo a demonstração do teorema 1.4.3.

Como dissemos na seção anterior, Pascal explicitou pela primeira vez o Princípio de Indução no seu trabalho sobre o triângulo. Porém, o conhecimento do Teorema do Triângulo é bem anterior; aparece numa obra de Chu Shih-Chieh, o *Ssu-yüan yü-chien* (*Espelho Precioso dos Quatro Elementos*), publicado em 1303, que inclui os coeficientes binomiais até a oitava potência. Chu não se atribui o mérito da descoberta e refere-se ao triângulo como o "diagrama do velho método para achar potências oitavas ou menores". O triângulo aritmético também aparece numa obra árabe de Al-Kashi, do século XV.

EXERCÍCIOS

1. Para $n \geq 1$, provar que:

   (i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$, se e somente se n é um inteiro ímpar e $k = \frac{1}{2}(n-1)$.

   (ii) $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$, se e somente se $0 \leq k < \frac{1}{2}(n-1)$.

2. Para $n \geq 4$ e $2 \leq k \leq n-2$, provar que

   $$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

3. Para $n \geq 1$, demonstrar as identidades:

   (i) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

   (Sugestão: fazer $a = b = 1$ no Teorema do Binômio.)

(ii) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

(iii) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

(Sugestão: expandir $n(1+b)^{n-1}$ pelo Teorema do Binômio e fazer $b = 1$. Observar, ainda, que $n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$.)

(iv) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \ldots + 2^n \binom{n}{n} = 3^n$.

4. (i) Para $n \geq 2$, provar que $\binom{2}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$.

(ii) Observando ainda que $2\binom{m}{2} + m = m^2$, para $m \geq 2$, deduzir:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nos exercícios seguintes, indicaremos por T_i o termo que ocupa o lugar i no desenvolvimento do binômio, ou seja, o correspondente ao índice $i-1$ na somatória.

5. No desenvolvimento de $(x+a)^n$, os termos T_{10} e T_{15} são eqüidistantes dos extremos. Determinar n e o valor de

$$\frac{T_5}{T_4} .$$

6. No desenvolvimento de $\left(ax + \frac{b}{x}\right)^n$, sabe-se que $T_5 = \frac{945}{256x}$ e $ab = \frac{3}{4}$.

Determinar n , a e b .

7. Determinar o coeficiente numérico de maior valor absoluto no desenvolvimento de $(4x - 5y)^{14}$.

8. No desenvolvimento de $\left(2x^2 + \frac{1}{x^9}\right)^{20}$, determinar:

(i) o termo central;

(ii) O coeficiente do termo em x^{18} , se existir, e o termo simétrico.

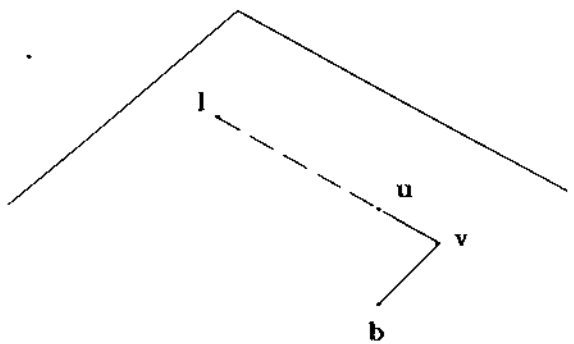
(iii) Se existem termos em x^8, x^6 e x^{-5} .

9. Dado o binômio $\left(ax^5 + \frac{1}{3x^\alpha}\right)^\beta$, determinar α e β de modo que T_{11} seja independente de x e que o termo central ocupe o décimo lugar.

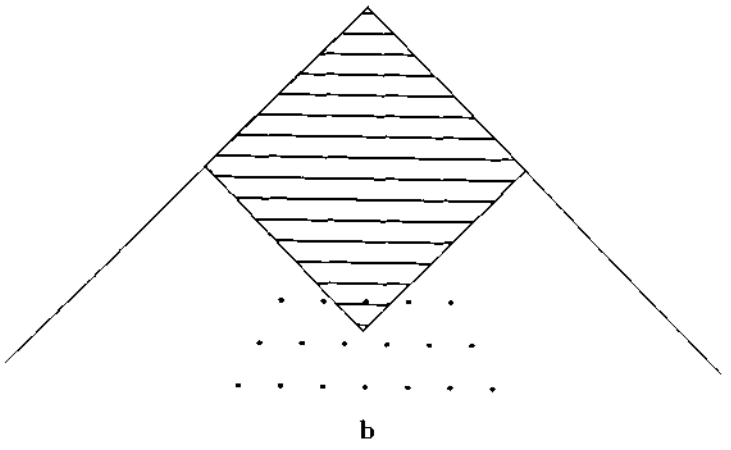
EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

10. Provar que a soma de todos os coeficientes da fila n-ésima do triângulo de Pascal é duas vezes a soma dos coeficientes da fila anterior.

11. Seja b um inteiro do interior do triângulo de Pascal. Provar que b é igual à soma de todos os inteiros que o precedem, na diagonal acima de b ; isto é, $b = 1 + \ldots + u + v$ como na figura.



12. Seja b um inteiro do interior do triângulo de Pascal. Provar que $b-1$ é igual à soma de todos os inteiros contidos na região indicada na figura.



b

2

DIVISIBILIDADE

2.1 ALGORITMO DA DIVISÃO

Uma equação do tipo $bx = a$ pode ou não ter solução no conjunto dos números inteiros; isso dependerá dos coeficientes a e b da equação. Quando tal solução existe, diz-se que a é *divisível* por b. Mais precisamente:

2.1.1 Definição

Sejam a e b números inteiros. Diz-se que b *divide* a (ou que b é um *divisor* de a ou, ainda, que a é um *múltiplo* de b) se existe um inteiro c tal que $bc = a$.

Usaremos a notação $b \mid a$ para indicar que b divide a. A negação dessa afirmação será indicada por $b \nmid a$.

Convém observar que, se $b \neq 0$, o inteiro c nas condições da definição é único. De fato, se existisse outro c' tal que $bc' = a$, teríamos que $bc = bc'$ e, cancelando, vem que $c = c'$. O inteiro assim definido chama-se *quociente* de a por b e é indicado por

$$c = a / b = \frac{a}{b} .$$

Por outro lado, note que $0|a$ se e somente se $a = 0$. Nesse caso, o quociente não é único pois $0 \cdot c = 0$, para todo inteiro c. Por causa disso, costuma-se excluir o caso em que o divisor é nulo, e nós vamos aderir a essa convenção: *em tudo o que segue, mesmo que não seja explicitamente dito, estaremos admitindo que todos os divisores considerados são diferentes de zero.*

2.1.2 PROPOSIÇÃO

Se $b|a$ e $a \neq 0$, *então* $|b| \leq |a|$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $b|a$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = a$. Tomando módulos em ambos os membros, tem-se que $|b||c| = |a|$.

Como $|c|$ é um inteiro positivo, temos que $1 \leq |c|$ e, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $|b|$, temos que $|b| \leq |b||c| = |a|$. ■

2.1.3 COROLÁRIO

(i) *Os únicos divisores de* 1 *são* 1 *e* -1.
(ii) *Se* $a|b$ e $b|a$, *então* $a = \pm b$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Se b é um divisor de 1, temos, pela proposição anterior, que $|b| \leq 1$. Da proposição 1.2.7 sabemos que não existem inteiros entre 0 e 1; como $b \neq 0$, temos que $0 < |b|$. Logo, $|b| = 1$ e, portanto, $b = +1$ ou $b = -1$.

(ii) Se $a|b$ e $b|a$, existem inteiros c e d tais que $ac = b$ e $bd = a$. Substituindo na segunda igualdade o valor de b dado pela primeira, temos

$$acd = a$$

e, como $a \neq 0$, podemos cancelar, donde

$$cd = 1 .$$

Logo, d é um divisor de 1; pela parte anterior, $d = \pm 1$. Conseqüentemente,

$$a = \pm b .$$ ■

Na proposição seguinte, reunimos algumas das propriedades elementares da divisibilidade.

2.1.4 PROPOSIÇÃO

Quaisquer que sejam os números inteiros a, b, c, d (lembrando que assumimos os divisores diferentes de zero), valem:

(i) $a|a$.
(ii) *Se* $a|b$ e $b|c$, *então* $a|c$.
(iii) *Se* $a|b$ e $c|d$, *então* $ac|bd$.
(iv) *Se* $a|b$ e $a|c$, *então* $a|(b+c)$.
(v) *Se* $a|b$, *então para todo* $m \in \mathbb{Z}$, *tem-se que* $a|mb$.
(vi) *Se* $a|b$ e $a|c$, *então, para todos* $m, n \in \mathbb{Z}$, *tem-se que* $a|(mb+nc)$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Basta observar que podemos escrever $a \cdot 1 = a$.
(ii) Por definição, existem inteiros d e d', tais que $ad = b$ e $bd' = c$. Substituindo o valor de b dado pela primeira igualdade, temos $c = (ad)d' = a(dd')$, logo $a|c$.
(iii) Novamente, por definição, existem inteiros f e f', tais que $af = b$ e $cf' = d$. Multiplicando ordenadamente ambas as igualdades, temos $ac(ff') = bd$, donde segue a tese .
(iv) Existem inteiros d e d', tais que $ad = b$ e $ad' = c$. Somando ordenadamente ambas as igualdades, temos $a(d+d') = b+c$, donde $a|(b+c)$.
(v) Se $a|b$, existe um inteiro c tal que $ac = b$. Multiplicando por m, temos $a(cm) = bm$; portanto, $a|bm$.
(vi) Segue diretamente de (v) e (iv) . ■

Note que a relação $|$ tem algumas propriedades semelhantes

àquelas da relação $\leq$. Com efeito, compare (i) e (ii) da proposição anterior com as dadas pelos axiomas A.10 e A.12. Por outro lado, existem também algumas diferenças; por exemplo, compare a parte (ii) do corolário 2.1.3 com o axioma A.11. Ainda, conforme o axioma A.13, dois inteiros a e b são sempre comparáveis, na relação $\leq$, isto é, $a \leq b$ ou $b \leq a$. Isso não é necessariamente verdadeiro para a relação $\mid$; de fato, temos, por exemplo, que $3 \nmid 4$ e também que $4 \nmid 3$.

EXERCÍCIOS

1. Decidir se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, dando a demonstração ou um contra-exemplo. Comparar com as propriedades da relação $\leq$.
   Sejam a, b e c inteiros quaisquer:

   (i) Se $a \mid b$, então $(a+c) \mid (b+c)$.
   (ii) Se $a \mid b$, então $ac \mid bc$.
   (iii) Se $a \mid b$, então $(-b) \mid (-a)$.
   (iv) Se $a \mid (b+c)$, então $a \mid b$ ou $a \mid c$.

2. Sejam a, b, c inteiros. Provar que:

   (i) Se $a \mid b$, então $(-a) \mid b$, $a \mid (-b)$ e $(-a) \mid (-b)$.
   (ii) Se $c \neq 0$, então $a \mid b$ se e somente se $ac \mid bc$.

O leitor certamente sabe que, se $b \nmid a$, existe um método para "dividir" a por b, obtendo-se um resto, e que esse "processo" de divisão termina quando o resto é menor que b. Por exemplo, se $a = 2\,437$ e $b = 5$, fazemos:

```
2 437 | 5
20    487
 43
 40
 37
 35
  2
```

e temos que $2\,437 = 5 \cdot 487 + 2$.

Isso pode ser enunciado de forma geral: dados dois inteiros a e b com $b \neq 0$, sempre existem q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$.

Antes de dar a demonstração formal desse resultado, gostaríamos de dar uma interpretação dele. Note que bq é um múltiplo de b, e $r = a - bq$. A condição $0 \leq r < |b|$ pode ser interpretada no seguinte sentido: estamos procurando um múltiplo de b, menor ou igual a a (já que $a - bq \geq 0$), mas que esteja "o mais perto possível de a". Essa idéia sugere o método de demonstração.

Primeiro estudaremos um caso particular:

2.1.5 Lema

Sejam a e b inteiros, tais que $a \geq 0$ e $b > 0$. Então, existem q e r, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

Demonstração

Consideremos o seguinte conjunto

$$S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z},\ a - bx \geq 0\}.$$

Quando $x = 0$, temos que $a - bx = a \geq 0$ é um elemento de S, logo, $S \neq \emptyset$.

Pelo Princípio da Boa Ordem, existe $r = \min S$. Como $r \in S$, ele também é da forma $r = a - bq \geq 0$, para algum $q \in \mathbb{Z}$.

Para mostrar que as condições do enunciado estão verificadas, bastará provar que $r < b$. De fato, se fosse $r \geq b$, teríamos que:

$$a - b(q+1) = a - bq - b = r - b \geq 0,$$

logo, $a - b(q+1)$ também pertenceria a S.

Mas $a - b(q+1) = r - b < r = \min S$, uma contradição. ■

2.1.6 Teorema (Algoritmo da Divisão)

Sejam a e b inteiros, com $b \neq 0$. Então, existem inteiros q e r, únicos, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$.

DEMONSTRAÇÃO

Mostraremos inicialmente que podemos determinar q e r quando $b > 0$ e a é qualquer.

O caso $a \geq 0$ está dado pelo lema anterior.

Se $a < 0$ podemos, ainda pelo lema anterior, determinar q' e r' tais que

$$|a| = bq' + r' \quad \text{e} \quad 0 \leq r' < b \ .$$

Se $r' = 0$, temos $-|a| = a = b(-q') + 0$, e o par $q = q'$, $r = 0$ verifica as condições do teorema.

Se $r' > 0$, temos

$$a = -|a| = b(-q') - r' = b(-q') - b + b - r' = b(-q' - 1) + (b - r').$$

Obviamente, $0 < b - r' < b$; logo, os inteiros $q = -q' - 1$ e $r = b - r'$ verificam as condições do enunciado.

Agora provaremos que o resultado também vale quando $b < 0$. Qualquer que seja a, pela parte anterior, podemos determinar q' e r' tais que

$$a = |b| q' + r' \quad \text{e} \quad 0 \leq r' < |b| \ .$$

Quando $b < 0$, temos que $|b| = -b$, logo,

$$a = |b| q' + r' = (-b) q' + r' = b(-q') + r' \ ,$$

e os inteiros $q = -q'$ e $r = r'$ estão nas condições do enunciado.

Finalmente, provaremos que, se (q, r) e (q', r') são dois pares de inteiros verificando as condições do enunciado, então $q = q'$ e $r = r'$.

De fato, temos que

2.1.7 $$qb + r = a = q' b + r' .$$

Podemos supor, por exemplo, que $r' \geq r$. Da igualdade acima, temos $(q - q')b = r' - r$.

Como $|b| > r'$, também temos $r' - r < |b|$. Substituindo,

$(q - q')b < |b|$ e, tomando módulos,

$$0 \leq |q - q'| \, |b| < |b| \ .$$

Como $|b| > 0$, podemos cancelar e obtemos $0 \leq |q - q'| < 1$. Da proposição 1.2.7, vem que $|q - q'| = 0$, isto é, $q = q'$. Na igualdade 2.1.7, temos agora $qb + r = qb + r'$. Cancelando, segue $r = r'$. ■

2.1.8 DEFINIÇÃO

Os números q e r determinados no teorema anterior chamam-se, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão de a por b.

Os exercícios 3, 4 e 5 são uma aplicação do Algoritmo de Divisão.

EXERCÍCIOS

3. Usar o Algoritmo da Divisão para provar que:
   - (i) Todo inteiro ímpar é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$.
   - (ii) O quadrado de um inteiro é da forma $3k$ ou $3k + 1$.
   - (iii) O quadrado de um inteiro é da forma $4k$ ou $4k + 1$.
   - (iv) O cubo de um inteiro é da forma $9k$, $9k + 1$ ou $9k + 8$.

4. (i) Provar que, de três inteiros consecutivos, um é múltiplo de 3.
   (ii) Mais geralmente, provar que, de n inteiros consecutivos, um é múltiplo de n.

5. Provar, diretamente e também usando indução, que $6 | n(n+1)(2n+1)$ para todo $n \geq 1$.

6. Provar que, se a e b são inteiros com $b > 0$, então existem inteiros q e r, únicos, tais que $a = bq + r$, com $2b \leq r < 3b$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

7. Provar que todo inteiro da forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$, mas não vale a recíproca.

8. Mostrar que, se um inteiro é um quadrado e também é um cubo (como $64 = 8^2 = 4^3$), então é da forma $7k$ ou $7k + 1$.

9. Demonstrar a seguinte versão do Algoritmo da Divisão: sejam a e b inteiros, com $b \neq 0$. Então, existem inteiros q e r, únicos, tais que

$$a = bq + r, \quad \text{com } -\frac{1}{2}|b| < r \leq \frac{1}{2}|b| .$$

(Sugestão: tomar primeiro $a = bq' + r'$ com $0 \leq r' < |b|$. Quando $0 < r' \leq \frac{1}{2}|b|$, tomar $r = r'$ e $q = q'$; quando $\frac{1}{2}|b| < r' < |b|$, tomar $r = r' - |b|$ e $q = q' + 1$, se $b > 0$ ou $q = q' - 1$ se $b < 0$.)

10. Seja a um inteiro. Provar que um dos inteiros a, $a + 2$, $a + 4$ é múltiplo de 3 .

11. Para todo inteiro a, provar que $4 \nmid (a^2+2)$.

12. Seja $n \geq 1$. Provar que:

(i) $7 \mid (2^{3n}-1)$.
(ii) $8 \mid (3^{2n}+7)$.
(iii) $3 \mid (2^n+(-1)^{n+1})$.

13. Mostrar que, se a é um inteiro tal que $2 \nmid a$, então $8 \mid (a^2-1)$.

14. Provar que:

(i) A soma dos quadrados de dois inteiros ímpares não pode ser um quadrado perfeito .
(ii) O produto de quatro inteiros consecutivos é a diferença entre um quadrado perfeito e 1 .
(iii) A diferença de dois cubos de inteiros consecutivos não é divisível por 2 .

15. Provar que:

(i) Se a é um inteiro ímpar, então $24 \mid a(a^2-1)$.

(ii) Se a e b são inteiros ímpares, então $8 \mid (a^2-b^2)$.
(iii) Se a é um inteiro tal que $2 \nmid a$ e $3 \nmid a$, então $24 \mid (a^2+23)$.
(iv) Se a é um inteiro arbitrário, então $360 \mid a^2(a^2-1)(a^2-4)$.

16. Determinar o menor inteiro positivo n, tal que $935n$ é múltiplo de 43. *Idem*, tal que $935 + n$ é múltiplo de 43 .

17. Sejam $a = bq + r$ e $a = (b+1)q' + r'$, com a, b positivos, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b+1|$. Provar que $q = q'$ se e somente se $r \geq q$.

18. (i) Determinar a e b tais que $a - b = 184$, e o quociente e o resto da divisão de a por b sejam, respectivamente, $q = 16$ e $r = 4$.
(ii) *Idem*, $a - b = 274$, $q = 16$ e $r = 19$.
(iii) Quais as condições sobre q, r e s para que existam inteiros a e b, tais que $a = bq + r$ e $a - b = s$?

19. (i) Que condições devem verificar inteiros n e s para que existam n inteiros consecutivos cuja soma seja s ?
(ii) Determinar oito inteiros consecutivos, os maiores possíveis, cuja soma é menor ou igual a 1000 .

20. Sejam a e b inteiros, $b \neq 0$, e seja r o resto de divisão de a por b. Se $c > 0$ é outro inteiro, provar que:

(i) O resto da divisão de ac por bc é rc .
(ii) Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid r$, e o resto da divisão de a/c por b/c é r/c.

2.2 NUMERAÇÃO

Há uma anedota sobre um mercador alemão do século XV que, embora eu não possa autenticar, é tão característica da situação existente, que não posso resistir à tentação de contá-la. O mercador tinha um filho ao qual desejava dar uma ampla formação comercial. Chamou um eminente professor da universidade para lhe perguntar para onde devia enviar seu filho.

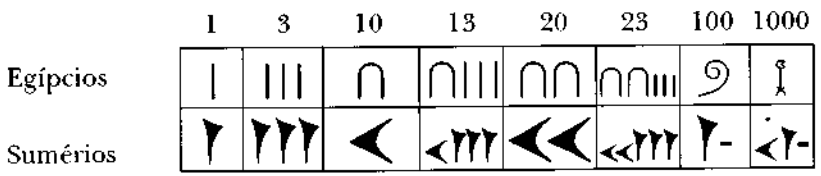
O professor respondeu que, se os conhecimentos matemáticos do filho deviam limitar-se à adição e subtração, provavelmente numa universidade alemã pudesse obter essa instrução; mas, se queria chegar à multiplicação e divisão, como estas tinham sido muito estudadas na Itália, ele pensava que somente nesse país poderia aprendê-las. T. Dantzig

A numeração escrita nasceu, nas épocas mais primitivas, do desejo de manter registro de gado ou outros bens, com marcas ou traços em paus, pedras, tábuas de argila etc. É pelo menos tão antiga quanto a escrita, e talvez anterior: é possível que o registro de números tenha sugerido o registro de sons.

Os sistemas de escrita numérica mais antigos que se conhecem são os dos egípcios e os dos sumérios, que datam aproximadamente do ano 3500 a.C.

Para os egípcios, um traço vertical valia 1; o número 10 era representado por um osso de calcanhar invertido ∩; o 100 por um laço 𓆐, e o 1000 por uma flor de lotus** 𓆼. Outros números eram escritos com a combinação desses símbolos. Assim, por exemplo 2125 se escrevia como

O quadro seguinte dá uma idéia da semelhança entre o sistema egípcio e o sumério.



(*) Número, a Linguagem da Ciência, Zahar, Rio de Janeiro, 1970

(**) Tinham também símbolos para números bem maiores. Ver por exemplo, o livro de C. Boyer, *op. cit.*

Um novo estágio na história da numeração corresponde aos sistemas hebraico e grego. Ambos os povos atribuíam valores numéricos às letras.

O sistema romano (usado até hoje para datas, números de capítulos etc.) mostra influências gregas no uso de letras para representar números: por exemplo, X para dez, C para cem e M para mil; porém, em essência, está baseado nos mesmos princípios que a numeração egípcia ou suméria.

Se tratasse apenas de registrar números, as diferenças de um sistema para outro não teriam grande importância; o problema é que dependemos da escrita dos números para a realização prática das operações. As dificuldades envolvidas no uso do sistema romano explicam a anedota com que iniciamos esta seção (sugerimos ao leitor pensar como calcular o produto de CCXVII por CXIX sem usar numeração decimal; ou pior ainda, a divisão do primeiro desses números pelo segundo!).

A numeração posicional de base 10, que adotamos atualmente, teve sua origem na Índia, aproximadamente no fim do século V, e foi divulgada na Europa em torno do ano 825 d.C. pelo matemático árabe Mohamed Ben Mussa Al Khawarismi. Na obra de Aryabhata, intitulada *Aryabhatiya* (um pequeno volume escrito em verso, publicado em 499 d.C.), aparece a frase "de lugar para lugar, cada um vale dez vezes o precedente", que sugere o uso do Princípio de Posição. Porém, a primeira aparição inquestionável de um zero na Índia é do ano 876 d.C.

A palavra hindu para o zero era *sunya*, que significava "vazio" ou "em branco". Quando os árabes adotaram a numeração hindu, traduziram esse termo por *cifr*, que significa vazio em árabe. Deste deriva a palavra *cifra*, que, até na obra de Gauss – último grande matemático a escrever em latim –, ainda conservava seu significado primitivo de zero.

Detenhamo-nos, então, para pensar no que expressamos quando escrevemos um inteiro positivo no sistema decimal. Quando escrevemos 3 427, por exemplo, estamos nos referindo na verdade ao número que se obtém fazendo:

$$3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 \quad .$$

Mais geralmente, uma expressão do tipo $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$, no sistema decimal, representa o número

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 .$$

A primeira vantagem é que esse sistema representa uma grande economia de notação. Usando apenas os dez símbolos - 0, 1, 2,..., 9 -, podemos escrever qualquer inteiro positivo. Uma vantagem adicional, e decerto a mais importante, é que permite dar regras de cálculo simples.

Um instante de reflexão nos mostrará que nada determina que a base de numeração seja necessariamente dez. Com toda probabilidade, esse é o sistema usado quase que universalmente pelo fato de termos dez dedos disponíveis nas mãos para nos auxiliar nos cálculos.

Teoricamente, entretanto, poderíamos escolher uma base de numeração arbitrária, como demonstraremos a seguir.

2.2.1 Teorema

Seja $b \geq 2$ um inteiro. Todo inteiro positivo a pode ser escrito de modo único na forma

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b + r_0 \quad ,$$

em que $n \geq 0$, $r_n \neq 0$ e, para cada índice i, $0 \leq i \leq n$, tem-se que

$$0 \leq r_i < b \ .$$

Demonstração

(i) Existência

Dividindo a por b, obtemos números q_0, r_0, tais que

$$a = bq_0 + r_0, \ 0 \leq r_0 < b \ .$$

Dividindo q_0 por b, obtemos q_1, r_1, tais que

$$q_0 = bq_1 + r_1, \ 0 \leq r_1 < b.$$

Esse processo pode ser repetido; porém, como cada quociente obtido é não negativo e necessariamente menor que o anterior (verifique!), em algum passo deveremos obter um quociente nulo. Suponhamos que o primeiro quociente nulo seja o n-ésimo.

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_0, && 0 \leq r_0 < b \ . \\
q_0 &= bq_1 + r_1, && 0 \leq r_1 < b \ . \\
q_1 &= bq_2 + r_2, && 0 \leq r_2 < b \ . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_{n-2} &= bq_{n-1} + r_{n-1}, && 0 \leq r_{n-1} < b \ . \\
q_{n-1} &= b \cdot 0 + r_n, && 0 < r_n < b \ .
\end{aligned}$$

Agora, podemos substituir o valor de q_0 na primeira expressão e continuar fazendo substituições sucessivas.

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_0 = b(bq_1 + r_1) + r_0 = b^2 q_1 + br_1 + r_0 = \\
&= b^2 (bq_2 + r_2) + br_1 + r_0 = b^3 q_2 + b^2 r_2 + br_1 + r_0 = \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= b^{n-1} (bq_{n-1} + r_{n-1}) + b^{n-2} r_{n-2} + \ldots + b^2 r_2 + br_1 + r_0 = \\
&= b^n r_n + b^{n-1} r_{n-1} + b^{n-2} r_{n-2} + \ldots + b^2 r_2 + br_1 + r_0 \ .
\end{aligned}$$

Essa é uma expressão para a nas condições do enunciado.

(ii) Unicidade

Suponhamos que temos duas expressões para a:

$$\begin{aligned}
a &= r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0 = \\
&= r'_m b_m + r'_{m-1} b^{m-1} + \ldots r'_2 b^2 + r'_1 b + r'_0 \ .
\end{aligned}$$

Pondo em evidência b em ambas as expressões, temos

$$\begin{aligned}
a &= b(r_n b^{n-1} + \ldots + r_2 b + r_1) + r_0 = \\
&= b(r'_m b^{m-1} + \ldots r'_2 b + r'_1) + r'_0 \ .
\end{aligned}$$

Como $0 \leq r_0 < b$, $0 \leq r'_0 < b$, da unicidade do quociente e resto

da divisão inteira, vem que

$$r_n b^{n-1} + \ldots + r_2 b + r_1 = r'_m b^{m-1} + \ldots + r'_2 b + r'_1 \quad \text{e} \quad r_0 = r'_0$$

Agora, repetindo o processo, temos que

$$b(r_n b^{n-2} + \ldots + r_2) + r_1 = b(r'_m b^{m-2} + \ldots + r'_2) + r'_1$$

e, usando novamente a unicidade do quociente e do resto, temos

$$r_1 = r'_1 \quad \text{e} \quad r_n b^{n-2} + \ldots + r_2 = r'_m b^{m-2} + \ldots + r'_2$$

Dessa forma, poderemos demonstrar sucessivamente que os coeficientes em ambas as expressões são iguais (note que esse raciocínio pode ser formalizado, usando indução completa).

Utilizamos o símbolo $(r_n r_{n-1} \ldots r_0)_b$ para representar a expressão de a na base b, que determinamos no teorema anterior. Naturalmente, omitiremos mencioná-la explicitamente, quando trabalharmos com números na base 10.

Note que a demonstração anterior dá um método para determinar a expressão de um número dado na base 10, numa outra base.

2.2.2 Exemplo

Escrever o número 1 329 em base 5.

Precisamos efetuar as divisões sucessivas:

1329	5			
32	265	5		
29	15	53	5	
4	0	03	10	5
		3	0	2	5
				2	0

Conforme demonstramos no teorema anterior, a expressão de 1329 em base 5 será

$$1\,329 = (20\,304)_5 .$$

2.2.3 Exemplo

Escrever 855 em base 12.

Observamos inicialmente que precisamos de mais dois algarismos correspondentes aos inteiros 10 e 11. Notamos: $\alpha = 10$, $\beta = 11$.

Agora, efetuamos as divisões sucessivas:

855	12		
015	71	12	
3	11	5	12
		5	0

Logo, $855 = (5\beta 3)_{12}$.

Para obter a expressão de um número escrito em outra base, na base 10, basta interpretar o significado da expressão.

2.2.4 Exemplo

Escrever $(1\,235)_6$ em base 10.

Temos que $(1\,235)_6 = 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 5 = 311$.

EXERCÍCIOS

1. Escrever:

   (i) 1 472 em base 5 .
   (ii) 218 em base 2 .
   (iii) 15 422 em base 12 .

2. Escrever:

   (i) $(2\,356)_7$ em base 10 .
   (ii) $(532)_6$ em base 8 .
   (iii) $(21)_3$ em base 12 .

3. Seja $m = (r_n r_{n-1} \dots r_0)_b$. Provar que $b^r m = (r_n r_{n-1} \dots r_0 \underbrace{00\dots0}_{r \text{ vezes}})_b$

4. Sejam $m = (r_n r_{n-1} \dots r_0)_b$, $m' = (s_{n'} s_{n'-1} \dots s_0)_b$. Provar que, se $n < n'$, então $m < m'$. Dar um critério para comparar m e m' em geral.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

5. (Critérios de divisibilidade) Seja b um inteiro positivo cuja expressão na base 10 é

$$b = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + \dots + r_1 10 + r_0 .$$

Provar que:

(i) $2 \mid b$ se e somente se $2 \mid r_0$.
(ii) $3 \mid b$ se e somente se $3 \mid (r_0 + r_1 + \dots + r_n)$.
(iii) $5 \mid b$ se e somente se $5 \mid r_0$.
(iv) $9 \mid b$ se e somente se $9 \mid (r_0 + r_1 + \dots + r_n)$.
(v) $11 \mid b$ se e somente se $11 \mid (r_0 - r_1 + r_2 - \dots + (-1)^n r_n)$.

6. Quais são os números que, em base 10, são representados com todos os algarismos iguais e que são divisíveis por 3? E por 9? E por 11?

7. Determinar todos os inteiros positivos múltiplos de 5 que, em base 10, são de 3 algarismos e cuja soma dos algarismos é 19.

8. Provar que nenhum inteiro da seqüência 11, 111, 1111,... é um quadrado perfeito. (Sugestão: um termo arbitrário dessa seqüência pode ser escrito na forma $111\dots1 = 111\dots108 + 3 = 4k + 3$.)

9. (i) Demonstrar que todo quadrado perfeito é da forma $5k$ ou $5k \pm 1$.
(ii) Como aplicação, indicar em quais algarismos pode terminar um quadrado perfeito .
(iii) Demonstrar que, se três inteiros positivos a, b, c verificam a condição $a^2 = b^2 + c^2$, então, entre eles há um múltiplo de 5 e um múltiplo de 2 .

10. Determinar um número de quatro algarismos que, somado com a soma de seus algarismos, resulta 2 603.

11. (i) Mostrar que nenhum quadrado perfeito se escreve com todos os seus algarismos iguais.
(ii) Determinar um quadrado perfeito n tal que $n = (aabb)_{10}$.

12. Determinar um inteiro n da forma $n = (ab)_{10}$, que é múltiplo de 3 e tal que $n^2 = (bxax)_{10}$

13. Determinar o menor inteiro positivo n tal que $9n$ se escreve com os mesmos algarismos de n, na ordem contrária.

14. Um farmacêutico tem apenas pesos de 1g, 3g, 9g, 27g, 81g e uma balança de dois pratos (os pesos podem ser colocados em ambos os pratos). Mostrar que ele pode pesar qualquer objeto com até 121g (Sugestão: exercício 9 de 2.1.)

2.3 IDEAIS E MÁXIMO DIVISOR COMUM

É impossível escrever um cubo como soma de dois cubos, uma quarta potência como soma de duas quartas potências, e, em geral, qualquer potência maior que a segunda como soma de duas potências similares. Para isto eu descobri uma prova verdadeiramente maravilhosa, mas esta margem é muito pequena para contê-la.

Pierre de Fermat, em torno de 1637.

Pierre de Fermat (1601-1655), funcionário público francês, foi o último dos grandes matemáticos amadores que cultivava o estudo dessa ciência apenas como um *hobby*. Fez importantíssimas contribuições à matemática, e seu nome está ligado às origens da geometria analítica, do cálculo, da probabilidade e, sobretudo, da moderna teoria dos números. A citação que transcrevemos foi deixada por ele numa tradução da *Arithmetica*, de Diophanto de Alexandria, e grandes matemáticos tentaram, ao longo de séculos, descobrir a prova mencionada.

A afirmação reproduzida passou a ser conhecida como o "último teorema de Fermat" ou, ainda, como a "conjetura de Fermat".

Explicitamente, ela afirma que se, $n \geq 3$, então a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras.

O próprio Fermat publicou uma demonstração para o caso em que $n = 4$. No século XVIII, Euler provou que ela é verdadeira também quando $n = 3$, mas sua demonstração era muito complicada e a validade nesse caso só foi completamente aceita quando Gauss deu uma nova demonstração. O caso em que n=5 foi estudado por Dirichlet, no século XIX, e o caso n=7, por Lamé, em 1839.

Lamé propôs uma demonstração geral, introduzindo uma "aritmética" de certos números complexos, e assumindo implicitamente que ela tinha as mesmas propriedades da aritmética usual. Isso suscitou certas dúvidas em Liouville, que as comunicou a Kummer. Este provou que a pressuposição de Lamé era falsa. Porém, conseguiu resgatar em parte as idéias envolvidas nessa demonstração e provar que a conjetura vale quando n é um "primo regular" (a definição desse conceito é muito técnica e escapa aos limites deste livro). Esse foi o primeiro resultado de caráter geral em relação à conjetura de Fermat.

A questão permaneceu em aberto durante muitíssimo tempo e, ocasionalmente, alguns matemáticos acreditaram tê-la provado. A história começou a ser solucionada em junho de 1993, quando o matemático Andrew Wiles, numa série de três conferências proferidas na Universidade de Cambridge, anunciou a prova da conjetura. Havia, porém, uma falha no raciocínio, que levou mais de um ano para ser corrigida. Finalmente, em 1995, Wiles publicou a demonstração completa em uma revista * . Um dos passos da demonstração foi elaborado em colaboração com Richard Taylor e publicado como artigo independente no mesmo volume da revista ** . O conteúdo desses artigos é altamente técnico e certamente está fora do alcance do leitor destas notas. Porém, pode ser interessante ler as páginas 449 a 454, em que o autor conta o processo de descoberta.

(*) A. Wiles, "Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem", *Annals of Math.*, 141, 3 (1995), pp. 443-551.

(**) A. Wiles e R. Taylor, "Ring-theoretic Properties of Certain Hecke Algebras", *Annals. of Math.*, 141, 3 (1995), pp. 553-572.

Quando da tentativa de resgatar a demonstração de Lamé, em 1843, Kummer definiu uma nova classe de números, que chamou de *números ideais*. Mais tarde, Richard Dedekind trabalhou com a aritmética dos chamados *números algébricos* e substituiu na sua teoria os números ideais de Kummer por certos conjuntos, que também chamou de *ideais*.

A noção de *ideal*, além das inúmeras aplicações em diversos campos, permite dar um tratamento muito simples a questões da Teoria Elementar de Números.

2.3.1 Definição

Um conjunto não-vazio J de números inteiros diz-se um *ideal* de $\mathbb{Z}$ se

(i) $\alpha, \beta \in J \Rightarrow \alpha + \beta \in J$.
(ii) $\alpha \in J, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha a \in J$.

É fácil dar exemplos triviais de ideais: o próprio conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os números inteiros certamente é um ideal de $\mathbb{Z}$, e o conjunto $\{0\}$ também o é.

Um exemplo mais interessante é o conjunto dos números pares; de fato, a soma de números pares é par e o produto de um número par por qualquer número também é par. Porém, é fácil ver que o conjunto I dos números ímpares não é ideal; de fato, a soma de dois elementos de I não pertence a I.

O conjunto dos números pares nada mais é do que o conjunto dos múltiplos de 2. Podemos obter novos exemplos com uma construção análoga.

Dado um inteiro m, indicaremos por $m\mathbb{Z}$ o conjunto:

$$m\mathbb{Z} = \{mx \mid x \in \mathbb{Z}\},$$

isto é, o conjunto de todos os múltiplos de m.

Mostraremos que $m\mathbb{Z}$ é um ideal. Com efeito, dados $\alpha, \beta \in m\mathbb{Z}$, existem $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que $\alpha = mx$ e $\beta = my$. Então, temos que $\alpha + \beta = m(x+y) \in m\mathbb{Z}$. Por outro lado, dado $a \in \mathbb{Z}$, temos que $\alpha a = m(xa) \in m\mathbb{Z}$.

Um fato interessante é que esses são todos os exemplos possíveis, como veremos a seguir.

2.3.2 TEOREMA

Seja J um ideal de $\mathbb{Z}$. Então, $J = \{0\}$ ou existe um inteiro positivo m tal que $J = m\mathbb{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja J um ideal de $\mathbb{Z}$.

Se $J \neq \{0\}$, existe pelo menos um inteiro $a \neq 0$ tal que $a \in J$. Da condição (ii) da definição de ideal vem que $-a \in J$. Como a e $(-a)$ pertencem a J, podemos afirmar que J contém inteiros positivos. Assim, o conjunto $J^+ = \{ \alpha \in J \mid \alpha > 0 \}$ é não–vazio. Pelo Princípio de Boa Ordem, existe $m = min\, J^+$.

Provaremos que J é, precisamente, o conjunto dos múltiplos de m, isto é, $J = m\mathbb{Z}$.

De fato, como $m \in J$, a condição (ii) da definição 2.3.1 mostra que, para todo $x \in \mathbb{Z}$, tem-se que $mx \in J$, logo, $m\mathbb{Z} \subset J$. Para provar a inclusão contrária, consideraremos um elemento qualquer $\alpha \in J$ e provaremos que é um múltiplo de m. Efetuando a divisão inteira de α por m podemos determinar q e r tais que $\alpha = mq + r$, em que $0 \leq r < m$. Se $r \neq 0$, como $r = \alpha - mq$ e tanto α quanto mq pertencem a J, teríamos que $r \in J^+$. Mas, $r < m = min\, J^+$, uma contradição. Assim, $r = 0$, logo, $\alpha = mq$ é um múltiplo de m. ■

EXERCÍCIOS

1. Provar que o inteiro positivo m nas condições de 2.3.2 é único.

2. Quais dos seguintes conjuntos são ideais do $\mathbb{Z}$? Em cada resposta afirmativa, determinar o inteiro positivo nas condições do teorema 2.3.2 .

   (i) Todos os inteiros n tais que alguma potência de n seja divisível por 64 .
   (ii) Todos os inteiros n tais que $n \mid 24$.
   (iii) Todos os inteiros n tais que $6 \mid n$ e $24 \mid n^2$.

   (iv) Todos os inteiros n tais que $21n$ seja divisível por 9 .

Agora, passaremos a estudar alguns conceitos de teoria elementar de números cujo estudo é facilitado pelo uso da noção de ideal.

Em toda esta seção, a e b indicarão inteiros, não ambos nulos.

Um inteiro c diz-se um *divisor comum de* a e b se $c \mid a$ e $c \mid b$. O conjunto $D(a, b)$ de todos os divisores comuns de a e b é limitado superiormente (pois se $a \neq 0$, para todo elemento $c \in D(a, b)$ temos que $c \leq |a|$). Conseqüentemente, $D(a, b)$ tem máximo.

2.3.3 DEFINIÇÃO

Chama-se *máximo divisor comum de a e b* o maior de seus divisores comuns, isto é,

$$mdc(a, b) = max\, D(a, b) .$$

2.3.4 TEOREMA DE BÉZOUT

Sejam a, b inteiros e $d = mdc(a,b)$. Então, existem inteiros r e s tais que $d = ra + sb$.

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos o conjunto $J = \{ xa+yb \mid x, y \in \mathbb{Z} \}$. Mostraremos que J é um ideal de $\mathbb{Z}$. Com efeito, dados $\alpha, \beta \in J$, eles devem ser da forma

$$\alpha = x_1 a + y_1 b \quad \text{e} \quad \beta = x_2 a + y_2 b .$$

Temos, então, que

$$\alpha + \beta = (x_1 + x_2)a + (y_1 + y_2)\, b \in J .$$

De forma análoga, temos que, para todo $a \in \mathbb{Z}$ e todo $\alpha \in J$, $\alpha a \in J$. Agora, do teorema 2.3.2 vem que existe um inteiro positivo x_0 tal que $J = x_0\mathbb{Z}$. Mostraremos que $x_0 = mdc(a,b) = d$.

Com efeito, como a é da forma $a = 1 \cdot a + 0 \cdot b$, temos que $a \in J$,

logo $x_0 \mid a$. De forma idêntica, vem que $x_0 \mid b$, portanto $x_0 \in D(a, b)$.

Ainda, como o próprio x_0 *é um elemento* de J, então deve ser da forma $x_0 = ra + sb$, com $r, s \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, para provar que x_0 é o maior dos elementos de $D(a,b)$, consideramos $d' \in D(a, b)$.

Como $d' \mid a$ e $d' \mid b$, vem que $d' \mid (ra + sb)$; logo, $d' \mid x_0$. Portanto, $\mid d' \mid \leq \mid x_0 \mid = x_0$ e segue a tese. ■

EXERCÍCIOS

A função $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\} \to \mathbb{Z}^+$
$(a,b) \to mdc(a,b)$

pode ser considerada como uma operação em $\mathbb{Z}$. O exercício abaixo estuda as semelhanças e diferenças em relação às operações de adição e multiplicação.

3. Sejam a, b e c números inteiros. Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, dando a demonstração ou um contra-exemplo:

(i) $mdc(a, b) = mdc(b, a)$.
(ii) $mdc(mdc(a, b)\, c,) = mdc(a, mdc(b, c))$.
(iii) A operação $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - (0, 0) \to \mathbb{Z}^+$
$(a, b) \to mdc(a, b)$
tem elemento neutro.
(iv) $mdc(a, 1) = 1$.
(v) $mdc(a, b + c) = mdc(a, b) + mdc(a, c)$.
(vi) $mdc(a, bc) = mdc(a, b) \cdot mdc(a, c)$.
(vii) $mdc(a, a) = \mid a \mid$.
(viii) $mdc(a, bc) = b\, mdc(a, c)$.
(ix) $mdc(ab, cd) = mdc(a, c) \cdot mdc(b, d)$.
(x) $b \mid a \Leftrightarrow mdc(a, b) = \mid b \mid$.
(xi) $mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(a, b)$.

4. Sejam a, b e d inteiros, com $d > 0$. Decidir se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, dando a demonstração ou um contra-exemplo.

(i) Se existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ra + sb$, então $d = mdc(a,b)$.
(ii) Se existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ra + sb = 1$, então $mdc(a,b) = 1$.

Note-se que no decorrer da demonstração do teorema 2.3.4 provamos também que todo divisor comum de a e b é um divisor de $d = mdc(a, b)$. Na verdade, essa propriedade pode ser usada para caracterizar o máximo divisor comum de dois números, como demonstraremos a seguir.

2.3.5 Teorema

Sejam a, b inteiros. Um inteiro positivo d é o máximo divisor comum de a e b se e somente se verifica

(i) $d \mid a$ e $d \mid b$.
(ii) Se $d' \mid a$ e $d' \mid b$, então $d' \mid d$.

Demonstração

Seja $d = mdc(a, b)$. Então, obviamente d verifica (i), e, na demonstração do Teorema de Bézout, provamos também que a condição (ii) se verifica.

Reciprocamente, se um inteiro positivo d verifica (i), então $d \in D(a, b)$. A condição (ii) afirma que, se $d' \in D(a, b)$, então $d' \mid d$; logo, $d' \leq d$, donde segue que d é o maior dos divisores comuns. Portanto, $d = mdc(a, b)$. ■

A caracterização do máximo divisor comum dada pelo teorema anterior apresenta algumas vantagens. Entre outras, é mais fácil de ser usada e simplificará algumas das demonstrações que se seguem.

2.3.6 Proposição

Sejam a, b inteiros, $d = mdc(a, b)$ e c um inteiro não nulo. Então:

(i) $mdc(ac, bc) = d \mid c \mid$.
(ii) *Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então* $mdc(a/c, b/c) = d/\mid c \mid$.

DEMONSTRAÇÃO

Para (i), mostraremos que $d \mid c \mid$ verifica as condições (i) e (ii) do teorema 2.3.5 em relação aos inteiros ab e bc.

De fato, como $d = mdc(a, b)$, temos em particular que $d \mid a$, logo, $(d \mid c \mid) \mid (ac)$. Da mesma forma, $(d \mid c \mid) \mid (bc)$. Ainda, do Teorema de Bézout, temos que existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ra + sb$. Logo,

$$d \mid c \mid = r(a \mid c \mid) + s(b \mid c \mid).$$

Agora, se d' é um inteiro tal que $d' \mid ac$ e $d' \mid bc$, da relação acima vem imediatamente que $d' \mid (d \mid c \mid)$.

Para provar (ii), poderíamos usar um raciocínio análogo, mas daremos uma demonstração mais breve, usando o resultado anterior. Seja $x = mdc(a/c, b/c)$. De (i) temos que

$$mdc(a,b) = mdc\left(\frac{a}{c}.c, \frac{b}{c}.c\right) = mdc\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right).\mid c \mid,$$

isto é, $d = x \mid c \mid$, donde $x = d/\mid c \mid$. ■

O próximo resultado, embora de demonstração simples, será de uso freqüente na teoria.

2.3.7 TEOREMA DE EUCLIDES

Sejam a, b, c inteiros tais que $a \mid bc$. Se $mdc(a, b) = 1$, então $a \mid c$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $mdc(a, b) = 1$, da proposição anterior temos que
$mdc(ac, bc) = \mid c \mid$.
Agora, obviamente $a \mid ac$ e, da hipótese, $a \mid bc$. Conseqüentemente, usando (ii) do teorema 2.3.5 temos que $a \mid \mid c \mid$, logo $a \mid c$.

■

2.3.8 DEFINIÇÃO

Dois inteiros a e b dizem-se *relativamente primos* se $mdc(a,b) = 1$.

Podemos então enunciar o Teorema de Euclides da seguinte forma: se um número divide um produto de dois fatores e é relativamente primo com um deles, então divide o outro.

2.3.9 PROPOSIÇÃO

Sejam a e b inteiros relativamente primos, e seja c um outro inteiro tal que $a \mid c$ e $b \mid c$. Então, $ab \mid c$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $a \mid c$, podemos escrever $c = a \cdot q$. Agora, $b \mid aq$ e $mdc(a,b) = 1$. Do teorema anterior, $b \mid q$, isto é, podemos escrever $q = br$, com $r \in \mathbb{Z}$. Substituindo na expressão de c, temos $c = abr$, logo, $ab \mid c$. ■

EXERCÍCIOS

5. Sejam a, b, c inteiros. Provar que
   (i) Se $a \mid b$ e $mdc(b, c) = 1$, então $mdc(a, c) = 1$.
   (ii) $mdc(a, c) = mdc(b, c) = 1$ se e somente se $mdc(ab, c) = 1$.

6. Dar outra demonstração do teorema de Euclides, usando o fato de que $1 = mdc(a, b) = ra + sb$, para $r, s \in \mathbb{Z}$.

7. A proposição 2.3.9 pode ser generalizada. De fato: se a e b são inteiros e $d = mdc(a,b)$, dado um outro inteiro c tal que $a \mid c$ e $b \mid c$, provar que $\frac{ab}{d} \mid c$.

8. Dar uma demonstração direta da proposição 2.3.9, imitando a demonstração do teorema de Euclides.

9. Sejam a, b inteiros tais que $mdc(a,b) = 1$. Provar que:
   (i) $mdc(a \pm b, ab) = 1$.
   (ii) $mdc(a + b, a - b) = 1$ ou 2.
   (iii) $mdc(a + b, a^2 + ab + b^2) = 1$.
   (iv) $mdc(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1$ ou 3.
   (v) $mdc(2a + b, a + 2b) = 1$ ou 3.
   (vi) $mdc(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2.

10. Sejam a um inteiro, n um inteiro positivo e $d = mdc(a, a+n)$. Provar que $d \mid n$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

11. Sejam a, b, c inteiros. Provar que

    (i) Se $87a \mid bc$ e a e b são relativamente primos, então $a \mid c$.
    (ii) Se a e b são relativamente primos e $c \mid (a+b)$, então $mdc(a, c) = mdc(b, c) = 1$.
    (iii) Se a e b são relativamente primos, então $mdc(ac, b) = mdc(c, b)$.
    (iv) $mdc(a, b) = mdc(a, a \pm b)$.

12. Sejam a e b inteiros relativamente primos e n um outro inteiro. Calcular:

    (i) $mdc(a + nb, a + (n+1)b)$.
    (ii) $mdc(a + nb, a + (n+2)b)$.

13. Sejam a e b inteiros. Provar que, se $mdc(a, 4) = mdc(b, 4) = 2$ então, $mdc(a+b, 4) = 4$.

14. Provar que, se d é um divisor positivo comum de a e b, então $d = mdc(a,b)$ se e somente se $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

15. Sejam, a, b, c inteiros, $d = mdc(a, b)$. Provar que:

    (i) Os inteiros r, s tais que $d = ra + sb$ não estão univocamente determinados
    (ii) Existem inteiros r, s tais que $c = ra + sb$ se e somente se $d \mid c$
    (iii) Para cada par de inteiros r, s tais que $d = ra + sb$, tem-se que $mdc(r, s) = 1$

16. Sejam a, b inteiros. Para $n \geq 1$, provar que:

    (i) $mdc(a, b) = 1$ se e somente se $mdc(a^n, b^n) = 1$ (Sugestão: exercício 5(ii)).
    (ii) $a^n \mid b^n$ se e somente se $a \mid b$.

17. Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{Z}$ tal que, se a_1, $a_2 \in A$, então $a_1 \pm a_2 \in A$. Provar que A é um ideal de $\mathbb{Z}$.

2.4 O ALGORITMO DE EUCLIDES

O leitor certamente conhece, do curso secundário, o método para determinar o *mdc* de dois números usando a decomposição deles em fatores primos (que trataremos brevemente em 2.6). Porém, quando se trata de números muito grandes, pode não ser fácil encontrar essa decomposição. O método que damos a seguir é baseado apenas em divisões sucessivas e aparece no livro sétimo dos *Elementos de Euclides*; porém, há evidências históricas de que o método seja ainda anterior a essa obra.

2.4.1 Lema

Sejam a, b inteiros, $b \neq 0$, e sejam q, r o quociente e o resto da divisão de a por b, respectivamente. Então, $D(a, b) = D(b, r)$; temos também que $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

Demonstração

Podemos escrever $a = bq + r$. Seja $x \in D(a, b)$. Então, $x \mid a$ e $x \mid b$. Mas $r = a - bq$ e x divide cada um dos somados, logo $x \mid r$. Mostramos, assim, que $D(a, b) \subset D(b, r)$. A inclusão contrária segue de forma análoga, donde resulta a igualdade dos conjuntos.

Se os conjuntos são iguais, seus máximos também coincidem, isto é, $mdc(a, b) = mdc(b, r)$. ■

Segue do lema acima que o problema de achar o $mdc(a, b)$ reduz-se a achar o $mdc(b, r)$.

Naturalmente, pode-se repetir esse processo. Fazendo divisões sucessivas, teremos:

$$
\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, && 0 \leq r_1 < |b|. \\
b &= r_1 q_2 + r_2, && 0 \leq r_2 < r_1. \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, && 0 \leq r_3 < r_2. \\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, && 0 \leq r_n < r_{n-1}. \\
r_{n-1} &= r_n q_{n+1}. &&
\end{aligned}
$$

Como o resto diminui a cada passo, o processo não pode continuar indefinidamente, e alguma das divisões deve ser exata. Suponhamos então que r_{n+1} seja o primeiro resto nulo, como está indicado antes. Do lema, temos que

$$mdc\,(a, b) = mdc\,(b, r_1) = mdc\,(r_1, r_2) = \cdots = mdc\,(r_{n-1}, r_n)$$

Finalmente, como $r_n \mid r_{n-1}$ é fácil ver que $mdc\,(r_{n-1}, r_n) = r_n$, logo, $mdc\,(a, b) = r_n$. Demonstramos assim que, nesse processo, o máximo divisor comum de a e b é o último resto diferente de zero.

Usualmente, para dividir a por b utilizamos o seguinte esquema:

a	b
r	q

Se mudarmos um pouco o esquema para

	q
a	b
r	

será fácil dispor os números que intervêm no processo de cálculo do $mdc\,(a, b)$:

	q_1	q_2	q_3	.....	.....	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	...	...	r_n	0	

2.4.2 Exemplo

Vamos calcular o mdc (1 128, 336). Temos:

	3	2	1	4
1 128	336	120	96	24
120	96	24	0	

Logo, mdc (1 128, 336) = 24 .

Notamos, agora, que esse processo também permite determinar inteiros r e s nas condições do Teorema de Bézout. De fato, da primeira das divisões, temos que

$$r_1 = a - q_1 b\,,$$

isto é, r_1 foi escrito como uma combinação linear de a e b. Substituindo r_1 pelo seu valor na segunda, temos: $b = (a - q_1 b)\, q_2 + r_2$; logo,

$$r_2 = -\,q_2 a + (1 + q_1 q_2)\, b\ .$$

Novamente, pudemos escrever r_2 como combinação linear de a e b. Na igualdade seguinte poderemos substituir r_1 e r_2 pelas expressões achadas e escrever r_3 em função de a e b. Reiterando o processo, obteremos finalmente uma expressão para r_n como combinação linear de a e b.

Escrevendo explicitamente as divisões, no caso do exemplo 2.4.2 temos:

(1) $1\,128 = 3 \cdot 336 + 120$.
(2) $336 = 2 \cdot 120 + 96$.
(3) $120 = 1 \cdot 96 + 24$.
(4) $96 = 4 \cdot 24$.

Em (1), obtemos $120 = 1\,128 - 3 \cdot 336$. Substituindo em (2), vem que $336 = 2 \cdot (\,1\,128 - 3 \cdot 336\,) + 96$, logo, $96 = -\,2 \cdot 1\,128 + 7 \cdot 336$.

Finalmente, em (3) obteremos
$1128 - 3{\times}336 = 1 \cdot (-2 \cdot 1128 + 7 \cdot 336\,) + 24$, logo,
$24 = 3 \cdot 1128 - 10 \cdot 336$.

Assim, um par de inteiros r, s nas condições do Teorema de Bézout é dado por $r = 3$ e $s = -10$.

EXERCÍCIOS

1. Usar o Algoritmo de Euclides para obter números r e s satisfazendo:
   (i) $mdc\ (56, 72) = 56r + 72s$.
   (ii) $mdc\ (24, 138) = 24r + 138s$.
   (iii) $mdc\ (119, 272) = 119r + 272s$.

2. Demonstrar a proposição 2.3.6 lançando mão do Algoritmo de Euclides.

3. Determinar um múltiplo de 19 e um múltiplo de 17 cuja diferença seja 5.

4. Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ números inteiros não todos nulos e $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o conjunto dos seus divisores comuns. Definimos, então, que

   $mdc\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) = max\ D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

   (i) Provar que, se $a_1 \neq 0$ e $mdc\ (a_1, a_2) = d$, então

   $mdc\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) = mdc\ (d, a_3, \ldots, a_n)$.

   (ii) Provar que, se $D = mdc\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, então existem inteiros $r_1, \ldots, r_n$ tais que

   $$D = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n.$$

   (iii) Calcular $mdc(96, 1974, 858)$ e determinar r, s, t tais que

   $$d = r \cdot 96 + s\,1974 + t\,858.$$

5. Resolver novamente o exercício 14 de 2.3 lançando mão do algoritmo de Euclides.

2.5 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Sejam a e b inteiros não-nulos. Um inteiro c diz-se um *múltiplo comum de a e b* se $a \mid c$ e $b \mid c$. Indicaremos por $M(a, b)$ o conjunto de todos os múltiplos comuns de a e b e por $M^+(a, b)$ o conjunto de todos os múltiplos comuns positivos de a e b .

Certamente $M^+(a, b) \neq \phi$, pois $|a|\,|b| \in M^+(a, b)$; logo, pelo Princípio da Boa Ordem, esse conjunto contém um elemento mínimo.

2.5.1 Definição

Chama-se *mínimo múltiplo comum* de a e b o menor dos seus múltiplos positivos comuns, isto é,

$$mmc\ (a, b) = min\ M^+(a, b)$$

2.5.2 Lema

Sejam a e b inteiros. Então, o $mmc\ (a, b)$ divide todo outro múltiplo comum de a e b.

Demonstração

Usaremos novamente a noção de ideal.

Mostraremos inicialmente que $M(a, b)$ é um ideal. De fato, sejam $\alpha, \beta \in M(a, b)$. Temos que $a \mid \alpha$ e $a \mid \beta$; logo, $a \mid (\alpha+\beta)$. Da mesma forma, $b \mid (\alpha + \beta)$. A outra condição da definição 2.3.1 segue facilmente.

Do teorema 2.3.2, sabemos que $M(a, b)$ deve ser da forma $m\mathbb{Z}$, em que m é precisamente o elemento mínimo de $M^+(a, b)$, isto é, $m = mmc\ (a,b)$.

Assim, se $m' \in M(a,b) = m\mathbb{Z}$, então $m \mid m'$, como queríamos demonstrar. ■

Podemos agora dar uma outra caracterização do *mmc* de dois inteiros.

2.5.3 Teorema

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e m um inteiro positivo. Então, $m = mmc\ (a, b)$ se e somente se m verifica:

(i) $a \mid m$, $b \mid m$.
(ii) *Se $a \mid m'$ e $b \mid m'$, então $m \mid m'$* .

DEMONSTRAÇÃO

Do lema 2.5.2 vem que o *mmc (a, b)* verifica as condições (i) e (ii) do enunciado.

Reciprocamente, se m verifica as condições, de (i) temos que $m \in M^+(a, b)$, e (ii) mostra que $m = min\, M^+(a, b)$, já que $m \leq |m'|$. Logo, $m = mmc(a, b)$. ■

2.5.4 TEOREMA

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $d = mdc(a, b)$ e $m = mmc(a, b)$. *Então,* $md = |ab|$.

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos o caso em que a e b são positivos (apenas para evitar ter que escrever as barras (| |) a cada passo, já que a demonstração seria idêntica). Seja então

$$x = \frac{ab}{d} .$$

Queremos provar que $x = m$ e, para isso, bastará provar que x verifica as condições do teorema 2.5.3.

Escrevendo $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$, vem, da parte (ii) da proposição 2.3.6, que $mdc(a_1, b_1) = 1$, e podemos escrever $x = a_1 b$. Da mesma forma, $x = ab_1$. Segue, então, imediatamente que $a \mid x$ e $b \mid x$, logo, a condição (i) do teorema está verificada.

Seja agora $m' \in \mathbb{Z}$ um múltiplo comum de a e b. Como $a \mid m'$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $m' = aq = a_1 dq$. Ainda, $b \mid m'$, isto é, $b_1 d \mid a_1 dq$, logo, $b_1 \mid a_1 q$.

Como $mdc(a_1, b_1) = 1$, do Teorema de Euclides 2.3.7 vem que $b_1 \mid q$. Assim, podemos escrever $q = b_1 c$ e, substituindo na expressão de m', temos $m' = a_1 db_1 c$, isto é, $m' = xc$, e segue que $x \mid m'$.

Assim, verificamos que x satisfaz também a condição (ii) do teorema 2.5.3; logo, $x = m$, como queríamos demonstrar. ■

O teorema acima dá então um método de cálculo para o $mmc(a, b)$. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, podemos calcular o $mdc(a,b)$ pelo Algoritmo de Euclides e depois obter

$$mmc(a,b) = \frac{|ab|}{mdc(a,b)}$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar o mínimo múltiplo comum dos pares de inteiros dados no exercício 9 de 2.3.

2. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, -1$, calcular:

   (i) $mmc(n, n+1)$.
   (ii) $mmc(2n-1, 2n+1)$.
   (iii) $mmc(2n, 2n+2)$.
   (iv) $mmc(nc, (n+1)c)$, $c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$.

3. (i) Determinar inteiros positivos a e b tais que $ab = 9900$ e $mmc(a,b) = 330$.
   (ii) Determinar inteiros positivos a e b tais que $a+b = 581$ e $\frac{mmc(a,b)}{mdc(a,b)} = 240$.

4. Determinar todos os inteiros positivos a e b tais que $mmc(a,b) = 72$ e $mdc(a,b) = 36$.

5. Dados os inteiros não-nulos a e b, provar que:

   (i) $mdc(a,b) = mmc(a,b)$ se e somente se $|a| = |b|$.
   (ii) Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $mmc(ka, kb) = |k|\, mmc(a, b)$.
   (iii) Se $k \mid a$ e $k \mid b$, $mmc\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{mmc(a,b)}{|k|}$.

6. Sejam a e b inteiros positivos. Provar que o número de múltiplos de a contidos no conjunto $\{b, 2b, \ldots, ab\}$ é igual ao $mdc(a, b)$.

2.6 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Nesta seção mostraremos que todo inteiro diferente de 0, 1 e –1 pode-se expressar como produto de números primos, de forma única, a menos da ordem dos fatores. Esse resultado, conhecido como o Teorema Fundamental da Aritmética, já aparece do livro IX dos *Elementos* de Euclides e destaca a importância dos primos na Teoria dos

Números: eles desempenham um papel análogo ao dos átomos na estrutura da matéria. Todos os outros números podem ser obtidos através de produtos dos números primos.

Começaremos lembrando sua definição .

2.6.1 DEFINIÇÃO

Um inteiro p diz-se *primo* se tem exatamente dois divisores positivos, 1 e $|p|$.

Note que a definição exclui propositadamente o 0, que tem infinitos divisores positivos, e os inteiros 1 e –1 que têm *um* divisor positivo.

Um número diferente de 0, 1 e –1 que não é primo diz-se *composto*. Note que, da definição, vem imediatamente que, se um inteiro não-nulo a é composto, ele admite um divisor b tal que $|b|$ seja diferente de 1 e de $|a|$, isto é, um divisor b tal que $1 < |b| < |a|$. Um divisor nessas condições diz-se um *divisor próprio de a* .

Começaremos provando uma propriedade muito importante dos números primos.

2.6.2 PROPOSIÇÃO

Seja p um número primo, e sejam a e b inteiros.

(i) *Se* $p \nmid a$, *então mdc* $(p, a) = 1$.
(ii) *Se* $p \mid ab$, *então* $p \mid a$ *ou* $p \mid b$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Se $p \nmid a$, o único divisor comum positivo de a e p é 1, donde segue imediatamente a tese.
(ii) Suponhamos que $p \mid ab$. Se $p \mid a$, a tese está verificada. Em caso contrário, da parte anterior temos que $mdc\,(p,a) = 1$, e, do Teorema de Euclides 2.3.7, vem que $p \mid b$. ■

2.6.3 COROLÁRIO

Se um número primo p divide um produto $a_1\, a_2 \ldots a_n$, *então* $p \mid a_k$, *para algum* k, $1 \le k \le n$.

DEMONSTRAÇÃO

Segue imediatamente da proposição, usando indução. ■

Notamos ainda que a parte (ii) da proposição 2.6.2 pode ser usada para caracterizar a noção de número primo.

2.6.4 TEOREMA

Seja p um inteiro diferente de 0, 1 e –1. *Então, p é primo se e somente se, toda vez que p divide um produto de dois números, p divide pelo menos um dos fatores.*

DEMONSTRAÇÃO

Num sentido, o enunciado nada mais é do que a parte (ii) da proposição 2.6.2.

Para provar a afirmação no outro sentido, vamos raciocinar por absurdo. Suponhamos que p tenha a propriedade do enunciado mas não seja primo. Então, $|p|$ pode ser escrito na forma $|p| = a \cdot b$, onde a e b são divisores próprios positivos, isto é, verificam

$$1 < a < |p| \quad \text{e} \quad 1 < b < |p| .$$

Conseqüentemente, $p \mid ab$, mas $p \nmid a$ e $p \nmid b$; uma contradição. ■

A seguir daremos o primeiro passo na direção do resultado mais importante desta seção.

2.6.5 LEMA

Todo inteiro $a > 1$ *pode ser escrito como produto de números primos.*

DEMONSTRAÇÃO

Usaremos a segunda forma do Princípio de Indução.

Para $a = 2$ o enunciado é verdadeiro, já que 2 é, ele próprio, um número primo. Suponhamos agora que o resultado seja verdadeiro para todo inteiro b, $2 \le b < a$. Mostraremos que também vale para a.

Se a é primo, o lema está demonstrado. Caso contrário, a admite

um divisor positivo b tal que $1 < b < a$. Isto é, $a = bc$, e temos também $1 < c < a$. Pela hipótese de indução, b e c podem ser escritos como produto de primos, na forma

$$b = p_1 \cdots p_s , \quad c = q_1 \cdots q_k .$$

Substituindo, temos $a = p_1 \cdots p_s q_1 \cdots q_k$, e o resultado também vale para a. ■

2.6.6 Teorema

Seja $a > 1$ um inteiro. Então, existem primos positivos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_t$ tais que $a = p_1 p_2 \cdots p_t$, e essa decomposição é única.

Demonstração

No lema anterior, provamos a existência da decomposição. Resta apenas provar sua unicidade.

Dado um inteiro a, ele pode admitir, em princípio, mais de uma decomposição em produto de fatores primos. Chamaremos comprimento de uma decomposição ao número de fatores que nela comparecem.

Faremos a demonstração por indução no comprimento de uma decomposição de a.

Suponhamos que a admita uma decomposição do tipo $a = p_1$, onde p_1 é primo, e que vale

$$a = p_1 = q_1 q_2 \cdots q_s ,$$

em que $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_s$ são primos positivos. Como q_1 divide $q_1 q_2 \cdots q_s$, q_1 deve dividir p_1, que é primo. Então, devemos ter $p_1 = q_1$. Cancelando, vem $1 = q_2 \cdots q_s$. Se $s > 1$, teríamos que o primo q_2 seria inversível, uma contradição. Assim, $s = 1$ e, como já provamos que $p_1 = q_1$, o primeiro passo de indução está verificado.

Suponhamos agora o resultado verdadeiro para todo inteiro que admita uma decomposição de comprimento $k \geq 1$, e seja a um inteiro com uma decomposição de comprimento $k+1$. Se a admite outra decomposição, temos

2.6.7 $a = p_1 \cdots p_{k+1} = q_1 \cdots q_s$,

em que $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_s$ são primos positivos.

Como na primeira parte, $q_1 \mid p_1 \cdots p_{k+1}$ e, pelo corolário 2.6.3, temos que $q_1 \mid p_i$, para algum i. Como p_i é primo, devemos ter novamente que $q_1 = p_i$. Em particular, $q_1 \geq p_1$.

De forma análoga, pode-se obter que $p_1 = q_j$, para algum j. Logo, $p_1 \geq q_1$. De ambas as desigualdades, vem que $p_1 = q_1$. Finalmente, cancelando em 2.6.7, temos que

$$p_2 \cdots p_{k+1} = q_2 \cdots q_s .$$

Agora, o primeiro membro da igualdade tem uma decomposição de comprimento k, logo, da hipótese de indução, admite uma única decomposição. Assim, temos $k = s-1$, donde $k+1 = s$ e $p_i = q_i$, para $i = 2, \ldots, k+1$. Como já provamos que $p_1 = q_1$, ambas as expressões de a coincidem. ■

Agrupando primos eventualmente repetidos na decomposição de a, podemos enunciar o teorema anterior de forma levemente diferente. Também podemos estendê-lo a números negativos.

2.6.8 Teorema Fundamental da Aritmética

Seja a um inteiro diferente de 0, 1 e -1. Então, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ e inteiros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$ tais que $a = E\, p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$, em que $E = \pm 1$, conforme a seja positivo ou negativo. Além disso, essa decomposição é única.

Demonstração

Temos que $a = E|a|$, onde $E = 1$ ou $E = -1$, conforme a seja positivo ou negativo. Como $|a|$ é positivo, do teorema anterior, temos que existem primos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_t$ tais que

$$a = E\, p_1 p_2 \cdots p_t .$$

Agrupando os primos eventualmente repetidos, podemos escrever

$$a = E\, p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t} .$$

A unicidade segue diretamente do teorema anterior.

Uma conseqüência importantíssima do Teorema Fundamental da Aritmética é que ele permite dar uma nova caracterização do *mdc* e *mmc* de dois números. Para isso, faremos algumas observações preliminares.

Consideremos primeiro uma situação particular. A decomposição em fatores primos dos números 360 e 4 725 é

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 ,$$
$$4\,725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 .$$

Os primos que comparecem numa e noutra decomposição não são todos iguais; porém usando expoentes iguais a 0, podemos dar decomposições com os mesmos primos:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^0 ,$$
$$4\,725 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 .$$

Naturalmente, isso pode ser feito para qualquer par de números. Assim, o leitor poderá formalizar a demonstração da seguinte conseqüência do Teorema Fundamental.

2.6.9 Corolário

Sejam a e d inteiros diferentes de 0, 1 e −1. Então, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$ e inteiros não-negativos $n_1, \ldots, n_t$, $m_1, \ldots, m_t$ (mas eventualmente iguais a zero, se necessário) tais que

$$a = E_1\, p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t} ,$$

$$d = E_2\, p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t} ,$$

em que $E_i = \pm 1$, $i = 1, 2$.

Usando essas decomposições, podemos dar um critério de divisibilidade que formulamos apenas para inteiros positivos (observar que isso não é uma perda de generalidade, já que $d \mid a$ se e somente se $|d|$ divide $|a|$) .

2.6.10 Lema

Sejam $a = p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t}$ e $d = p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t}$ inteiros positivos, onde $p_1, \ldots, p_t$ são primos positivos e n_i, m_i, $1 \le i \le t$ são inteiros não-negativos. Então, $d \mid a$ se e somente se $m_i \le n_i$, $1 \le i \le t$.

Demonstração

Se $d \mid a$, existe um inteiro positivo c tal que $a = dc$. Escrevendo $c = p_1^{r_1} \ldots p_t^{r_t}$, temos que :

$$p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t} = p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t} \cdot p_1^{r_1} \ldots p_t^{r_t} = p_1^{m_1 + r_1} \ldots p_t^{m_t + r_t} .$$

Do teorema 2.6.6, vem que $n_i = m_i + r_i$, donde $n_i \ge m_i$, $1 \le i \le t$. (Note que nessa prova assumimos que os primos que aparecem na decomposição de c são os mesmos que nas decomposições de a e d, isto é, que c não é múltiplo de nenhum outro primo. Mostre que é correto proceder assim!)

Reciprocamente, se $m_i \le n_i$, $1 \le i \le t$, chamando $r_i = n_i - m_i$, temos que

$$a = p_1^{m_1 + r_1} \ldots p_t^{m_t + r_t} = d \cdot p_1^{r_1} \ldots p_t^{r_t} .$$

Logo, $d \mid a$. ■

2.6.11 Teorema

Sejam $a = p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t}$ ... e $b = p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t}$ inteiros nas condições do lema 2.6.10. Então,

$$d = mdc\,(a,b) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t} , \text{ em que } \alpha_i = min\,(n_i, m_i)\ 1 \le i \le t ,$$

$$m = mmc\,(a,b) = p_1^{\beta_1} \ldots p_t^{\beta_t} , \text{ em que } \beta_i = max\,(n_i, m_i)\ 1 \le i \le t .$$

DEMONSTRAÇÃO

Bastará provar que os inteiros d e m verificam as condições dos teoremas 2.3.5 e 2.5.3, respectivamente. Isto seguirá facilmente do uso repetido do lema anterior. Deixamos a tarefa a cargo do leitor. ■

EXERCÍCIOS

Ao refazer as demonstrações das proposições e resolver os exercícios relacionados abaixo, usando as informações desta seção, o leitor poderá apreciar a eficácia do Teorema Fundamental da Aritmética como ferramenta na Teoria dos Números.

1. Demonstrar as proposições 2.3.6, 2.3.7 e 2.3.9, usando o lema 2.6.10 e o teorema 2.6.11 .

2. Resolver os exercícios 4, 6, 8, 9(iii), 13 e 15 de 2.3, usando o Teorema Fundamental da Aritmética e o teorema 2.6.11 .

3. Demonstrar o teorema 2.5.4 usando o teorema 2.6.11 .

4. Resolver o exercício 5 de 2.5 usando o teorema 2.6.11 .

A Teoria dos Números é um dos ramos mais antigos da matemática. Muitos dos seus problemas nasceram mais ligados a questões místicas do que a considerações de caráter científico.

Quando se perguntou a Pitágoras o que é um amigo, ele respondeu: "aquele que é o outro eu, como acontece com 220 e 284". O que Pitágoras tinha em mente é o seguinte: os divisores positivos de 284, diferentes dele próprio, são 1, 2, 4, 71 e 142, cuja soma é precisamente 220; da mesma forma, a soma dos divisores positivos de 220, diferentes dele, é 284. Dois números nessas condições dizem-se *amigos*.

Um conceito semelhante é o de número perfeito. Um número diz-se *perfeito* se é igual à soma dos seus divisores positivos diferentes dele próprio, isto é, se é amigo de si mesmo.

Os primeiros números perfeitos são 6 e 28, e alguns estudiosos da Bíblia atribuem a essa propriedade o papel desses números na descrição do universo (ver a esse respeito R. Dantzig, *op.cit.*).

De qualquer forma, o conceito de números amigos chamou a

atenção para um problema: determinar o número de divisores de um número dado ou, ainda, calcular a soma desses divisores.

Podemos usar o Teorema Fundamental da Aritmética e o lema 2.6.10 para responder essas questões .

2.6.12 PROPOSIÇÃO

Seja $a = p_1^{n_1} \dots p_t^{n_t}$ *a decomposição de um número* $a > 1$ *nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então, o número de divisores positivos de* a *e a soma de todos esses divisores estão dados, respectivamente, por*

$$n(a) = (n_1 + 1)\ (n_2 + 1) \dots (n_t + 1)$$

$$s(a) = \frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_t^{n_t+1}-1}{p_t-1} .$$

DEMONSTRAÇÃO

Do lema 2.6.10, vem que existem tantos divisores positivos de a quantos números da forma

$$d = p_1^{m_1} \dots p_t^{m_t}, \text{ com } 0 \le m_i \le n_i,\ 1 \le i \le t .$$

Note que, conforme esse critério, os divisores positivos de a são todos os termos do desenvolvimento do produto

$$S = (p_1^0 + p_1^1 + \dots + p_1^{n_1}) \cdot (p_2^0 + p_2^1 + \dots + p_2^{n_2}) \dots (p_t^0 + p_t^1 + \dots + p_t^{n_t}) .$$

Como cada parêntese contém $n_i + 1$ parcelas, $1 \le i \le t$, temos que o número total de termos no desenvolvimento é

$$n(a) = (n_1 + 1)\ (n_2 + 1) \dots (n_t + 1) .$$

Ainda, uma vez desenvolvido, o número S acima é a soma de todos os divisores de a, isto é, $S = s(a)$. Agora, usando a fórmula que dá a soma dos termos de uma progressão geométrica (veja o exercício 5 de 1.1.3), temos que

$$p_i^0 + p_i^1 + \ldots + p_i^{n_i} = \frac{p_i^{n_i+1}-1}{p_i-1}\ ,\ 1 \le i \le t\ .$$

Logo,

$$s(a) = \frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_t^{n_t+1}-1}{p_t-1}\ . \qquad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS

5. Seja $n \ge 2$. Provar que, se $2^n - 1$ é primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito.

6. Determinar todos os inteiros a e b tais que a tem 21 divisores positivos, b tem 10 divisores positivos e $mdc\ (a,b) = 18$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

7. Sejam a e b inteiros tais que $mdc\ (a,b) = p$, um inteiro primo. Calcular $mdc\ (a^2,b)$ e $mdc\ (a^2,b^2)$.

8. Provar que $4k + 3$ e $5k + 4$ são relativamente primos, para todo inteiro k.

9. Mostrar que três ímpares positivos consecutivos não podem ser todos primos, com exceção de 3, 5, 7.

10. Sejam p, q primos tais que $p \ge q \ge 5$. Provar que $24 \mid (p^2 - q^2)$.

11. Seja n um inteiro positivo. Provar que:

    (i) Se $n > 4$ não é primo, então $n \mid (n-1)!$.
    (ii) Nenhum inteiro da forma $8^n + 1$ é primo.
    (iii) Se o inteiro $2^n - 1$ é primo, então n é primo.
    (iv) Todo inteiro da forma $n^4 + 4$, com n > 1, é composto.
    (v) Todo inteiro $n > 11$ pode ser escrito como soma de dois números compostos positivos.
    (vi) Todo primo da forma $3n + 1$ é também da forma $6m + 1$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.
    (vii) Todo inteiro da forma $3n + 2$ tem um fator primo dessa forma.

    (viii) O único primo da forma $n^3 - 1$ é 7.
    (ix) O único primo n tal que $3n + 1$ seja um quadrado perfeito é 5.

12. Provar que

    (i) Se p é um primo maior que 3, $p^2 + 2$ é composto.
    (ii) Se p é um primo ímpar diferente de 5, então 10 é divisor de $p^2 + 1$ ou de $p^2 + 1$.

13. Determinar a maior potência de 14 que divide 100!.

14. Determinar todos os primos que dividem 50!.

15. Sejam m e n inteiros tais que mdc $(m,n) = 1$. Provar que se mn é quadrado perfeito, então m e n são quadrados perfeitos.

16. Um inteiro diz-se *livre de quadrados* se não é divisível pelo quadrado de nenhum inteiro maior que 1.
    Provar que:

    (i) Um inteiro é livre de quadrados se e somente se pode ser fatorado em um produto de primos distintos.
    (ii) Todo inteiro é produto de um inteiro livre de quadrados por um quadrado perfeito.

17. Mostrar que, dados um inteiro n e um primo p, n pode ser escrito na forma $n = p^k m$, em que $k \ge 0$ e m é um inteiro não divisível por p.

2.7 A DISTRIBUIÇÃO DOS PRIMOS

As questões tratadas na seção anterior destacam o papel que os números primos desempenham na Teoria dos Números. Mas, dado um inteiro positivo em particular, como decidir se ele é um número primo?

Utilizando ingenuamente a definição, um método possível seria testar se ele é, ou não, divisível por algum dos inteiros positivos menores que ele próprio (excetuando-se, é claro, o 1).

Notamos inicialmente que se $d > 0$ é um divisor próprio de um inteiro positivo a, temos que $a = dc$, em que $c > 1$. Se acontecesse $d > \sqrt{a}$ e $c > \sqrt{a}$, teríamos que $a = dc > \sqrt{a}\sqrt{a} = a$, uma contradição. Demonstramos, assim, que todo número composto a tem um divisor *primo* menor ou igual a $\sqrt{a}$. Ainda, se d é um divisor de a, e p é um divisor primo de d, temos que $p|a$, logo, todo número composto a tem um divisor menor ou igual a $\sqrt{a}$.

O critério acima simplifica muito a tarefa de determinar se um inteiro é primo. Consideremos, por exemplo, o inteiro $a = 223$. Então, temos que $14 < \sqrt{a} < 15$. Assim, devemos testar se a é, ou não, divisível pelos primos 2, 3, 5, 7, 11, 13. Uma verificação direta mostra que 223 é primo.

Usando essas idéias, Eratósthenes (276 - 194 a.C.), que foi diretor da famosa biblioteca de Alexandria, elaborou um método para determinar todos os primos menores que um certo número dado $N > 0$. Este método é conhecido como o *Crivo de Eratósthenes.*

Primeiro se escrevem todos os inteiros positivos menores ou iguais a N. Depois, suprimimos todos os múltiplos de 2, diferentes do próprio 2 (para isso, basta ir riscando os números escritos, de dois em dois); depois, os múltiplos de 3 diferentes de 3 e assim sucessivamente. O Crivo de Eratósthenes para os números menores que 100 é o seguinte:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Note que, como $\sqrt{100} = 10$, basta riscar múltiplos dos primos 2, 3, 5 e 7.

Uma questão que se apresenta naturalmente é saber se o conjunto dos primos é finito ou se, pelo contrário, a seqüência dos primos é infinita. A resposta também aparece na obra de Euclides, num teorema cuja demonstração é considerada, até hoje, um modelo de raciocínio matemático *.

2.7.1 Teorema

O conjunto dos números primos é infinito.

Demonstração

Suponhamos que o conjunto dos primos positivos seja finito e sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ esses primos. Consideremos, então, o número

$$P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \ .$$

Conforme o lema 2.6.5, P admite um divisor positivo primo p_j. Como p_j é um dos elementos do conjunto acima, p_j divide o produto $p_1 p_2 \cdots p_n$. Então, p_j divide também $1 = P - p_1 p_2 \cdots p_n$, uma contradição. ■

O leitor encontrará outras demonstrações desse resultado sugeridas nos exercícios.

A distribuição dos primos é extremamente irregular e tem sido objeto de estudo de grandes matemáticos. Porém, muitas conjeturas, fáceis de formular numa linguagem acessível mesmo a alguém com conhecimentos rudimentares de matemática, continuam ainda sem solução.

Um exemplo, nesse sentido, é o seguinte: dois números primos dizem-se *primos gêmeos* se a diferença entre ambos é 2. Alguns exemplos de pares de primos gêmeos são: 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 29 e 31, 41 e 43.

Conjeturou-se que o número de pares de primos gêmeos é infinito, mas até hoje não foi possível decidir se essa afirmação é verdadeira ou falsa.

(*) O maior primo conhecido, por ocasião da publicação deste livro, foi descoberto por David Slowinski em 1996. Ele é $p = 2^{1\,257\,787} - 1$.

Por outro lado, é possível demonstrar que existem primos consecutivos "tão afastados quanto se desejar". A expressão "primos consecutivos" é usada no sentido de "consecutivos *na seqüência dos primos*", isto é, todo número compreendido entre ambos é composto. Para isso, precisaremos do seguinte:

2.7.2 LEMA

Dado um inteiro positivo n, é possível determinar n inteiros consecutivos tais que nenhum deles seja primo.

DEMONSTRAÇÃO

Dado n, consideremos a seqüência de inteiros

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \ldots,\ (n+1)!+(n+1)\ .$$

Obviamente, essa seqüência tem n termos e todo número da forma

$(n+1)!+m$, com $2 \le m \le n+1$,

é composto (já que é um múltiplo de m). ■

2.7.3 COROLÁRIO

Dado um inteiro positivo n, existem dois primos consecutivos p_h, p_{h+1} *tais que* $p_{h+1} - p_h > n$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja p_h o maior dos primos que são menores que $(n+1)!+2$. Então, $p_h \le (n+1)!+1$. Do lema anterior, temos ainda que

$$p_{h+1} > (n+1)!+(n+1)\ .$$

Fazendo a diferença entre ambas as desigualdades, temos

$$p_{h+1} - p_h > n\ .$$ ■

Vista a dificuldade de estudar a forma em que os primos se distribuem entre os números inteiros, uma abordagem razoável da

questão é procurar funções $\Psi(n)$ cujos valores percorrem um conjunto de primos, quando n percorre os inteiros positivos.

Na Idade Média, acreditava-se que o polinômio $f(n) = n^2 + n + 41$ só assumia valores primos. Essa afirmação é verdadeira para valores menores ou iguais a 39. Para n = 40, temos

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41,$$

que não é primo (o leitor poderia se perguntar como é possível que na Idade Média se acreditasse nessa afirmação, quando é tão fácil mostrar que ela é falsa. Nota-se, assim, como é importante ter uma boa notação para explicitar os problemas!). Aliás, é fácil provar que não existem polinômios nessas condições.

2.7.4 PROPOSIÇÃO

Não existe nenhum polinômio $f(x)$ *não constante, com coeficientes inteiros, tal que* $f(n)$ *seja primo, para todo inteiro positivo n.*

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ seja tal que $f(n)$ é primo, para todo $n \ge 0$.

Seja então p o primo que se obtém para um valor n_0 fixo, isto é, $p = f(n_0)$. Consideremos então a expressão $f(n_0 + tp)$, com t arbitrário. Temos

$$f(n_0+tp) = a_m (n_0+tp)^m + a_{m-1} (n_0+tp)^{m-1} + \ldots + a_1 (n_0+tp) + a_0$$

Desenvolvendo cada uma das potências pela fórmula do binômio e agrupando os primeiros termos de cada desenvolvimento, obtemos

$$f(n_0+tp) = a_m n_0^m + a_{m-1} n_0^{m-1} + \ldots + a_1 n_0 + a_0 + \psi(t)\ ,$$

em que $\psi(t)$ indica um certo polinômio em t, de grau m (verifique!). Além disso, todos os termos que não foram destacados contêm p como fator, logo, podemos pôr p em evidência na expressão de $\psi(t)$ e escrevê-lo na forma $\psi(t) = pg(t)$, em que $g(t)$ indica um outro polinômio em t, também de grau m. Como

$$a_m n_0^m + a_{m-1} n_0^{m-1} + \ldots + a_1 n_0 + a_0 = p,$$

temos

$$f(n_0+tp) = p + pg(t) = p(1 + g(t)) .$$

A igualdade acima mostra que $p \mid f(n_0+tp)$. Se $f(n_0+tp)$ é primo, devemos ter $f(n_0+tp) = \pm p$, donde $1 + g(t) = \pm 1$, para todo t. Temos assim uma contradição, pois $g(t)$ não é constante. ■

Note que o teorema anterior refere-se a polinômios numa variável. Em 1970, Matiyasevie construiu um polinômio em várias variáveis com coeficientes inteiros, cujos valores percorrem todos os primos positivos e inteiros negativos.

Já sabemos que o conjunto dos números primos é infinito. Muitas tentativas têm sido feitas para avaliar a "velocidade de crescimento" dos primos.

Indicando por $\pi(x)$ o número de primos positivos menores que um dado número real x, pode-se demonstrar que essa função cresce "com a mesma velocidade" que a função

$$\frac{x}{\log x} .$$

Mais precisamente, o chamado *Teorema dos Números Primos* afirma que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1 .$$

Legendre foi o primeiro a avaliar $\pi(x)$ para valores grandes de x, em seu *Essai sur la théorie des nombres*, publicado em 1798. Mas o Teorema dos Números Primos só foi demonstrado, independentemente, em 1896, por Hadamard e de La Vallée Poussin.

Em 1949, Alte Selberg descobriu uma prova desse teorema que não usa métodos de análise, o que se acreditava impossível até aquela data.

Pelo seu trabalho, recebeu a medalha Fields (a maior distinção possível em matemática), no Congresso Internacional de Matemáticos em 1950.

Ainda hoje permanecem sem resposta inúmeros problemas, de formulação elementar, em torno dos números primos.

Vimos no exercício 5 de 2.6 que, se $2^n - 1$ é primo, então o número $2^{n-1}(2^n-1)$ é perfeito; a demonstração desse fato se deve a Euclides. Os primeiros números perfeitos são 6, 28, 496 e 8 128 e são obtidos atribuindo a n os valores 2, 3, 5 e 7. O seguinte número perfeito que se obtém fazendo $n = 13$ ($2^{11}-1$) não é primo; ver o exercício 8(iii) de 3.2 . Como já vimos (exercício 11(iii) de 2.6), se 2^n-1 é primo, então n é primo. Logo, todos os expoentes usados devem ser primos. O sexto e sétimo números perfeitos são $2^{16}(2^{17}-1)$ e $2^{18}(2^{19}-1)$ e foram determinados por Cataldi em 1548.

Note que a fórmula para obter números perfeitos só permite encontrar números pares; Euler demonstrou que todo perfeito par é dessa forma (ver o exercício 11). Outro problema não solucionado é decidir se existem, ou não, números perfeitos ímpares.

Assim, parece natural tentar determinar para que primos p o número 2^p-1 é primo. Tal problema foi considerado por Martin Mersenne (1588-1648), e até hoje os números da forma 2^p-1, com p primo, chamam-se *Números de Mersenne*. Decidir quais números de Mersenne são primos é um problema ainda não totalmente resolvido. Têm-se apenas resultados em casos particulares e recentemente alguns primos de Mersenne foram obtidos através de computadores.

Outro tipo de números relevantes são os da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$. Pode-se demonstrar que o polígono regular com um número primo p de lados é construtível com régua e compasso se e somente se p é dessa forma (ver também o exercício 5). Em 1640, Fermat mostrou que os números F_n são primos para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, e conjeturou que todo número dessa forma é primo. Por causa disso, esses números são conhecidos como *Números de Fermat*. Em 1739, Euler demonstrou que F_5 é divisível por 641, o que prova que essa conjetura é falsa (ver o exemplo 3.2.8). Ainda não se conhece nenhum outro primo de Fermat além dos cinco primeiros; também não se sabe se o número de primos de Fermat é, ou não, infinito.

Outro problema de enunciado elementar envolvendo primos foi formulado por Christian Goldbach, em 1742, numa carta dirigida a Euler, na qual conjetura que todo inteiro positivo par é soma de dois números positivos que são primos ou iguais a 1.

Para os primeiros inteiros pares temos

$2 = 1 + 1$,
$4 = 2 + 2 = 1 + 3$,
$6 = 3 + 3 = 1 + 5$,
$8 = 3 + 5 = 1 + 7$,
$10 = 3 + 7 = 5 + 5$.

A validade da conjetura de Goldbach já foi verificada para todo número par menor que 100 000. Porém, em toda a sua generalidade continua a ser mais um desafio aos matemáticos.

EXERCÍCIOS

1. Decidir se 1009 é primo, testando todos os possíveis divisores primos $p \leq \sqrt{1009}$.

2. Seja n um número natural tal que nenhum primo $p \leq \sqrt[3]{n}$ divida n. Provar que n é um primo ou um produto de dois primos.

3. Demonstrar que existem infinitos primos de forma $4n + 3$, com $n \in \mathbb{Z}$.

4. Demonstrar que existem infinitos primos de forma $3n + 2$, com $n \in \mathbb{Z}$.

5. Provar que, se $2^m + 1$ é primo para algum $m > 0$, então m é uma potência de 2.

6. Seja $p_1 = 2, p_2 = 2, p_3 = 5, p_4, \ldots, p_n, \ldots$ a seqüência dos números primos positivos em sua ordem natural.

   (i) Mostrar que $p_{n+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

   (ii) Demonstrar por indução que $p_n \leq (2)^{2^{n-1}}$, $n \geq 1$.

   (iii) Concluir que existem pelo menos $n + 1$ primos menores que $(2)^{2n}$.

7. Consideramos a seguinte seqüência de inteiros positivos:
   $n_1 = 2, n_2 = n_1 + 1, n_3 = n_1 n_2 + 1 , \ldots , n_k = n_1 n_2 \cdots n_{k-1} + 1, \ldots$

   (i) Provar que, se $i < k$, então $mdc(n_i, n_k) = 1$.
   (ii) Concluir que o conjunto dos números primos é infinito.

8. Seja $\{p_1, \ldots , p_n\}$ um conjunto de primos positivos. Chamemos de A o produto de r quaisquer desses primos e de B o quociente $\frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{A}$.

   (i) Provar que p_k divide ou A ou B, mas não ambos .
   (ii) Provar que $A + B$ tem um divisor primo $p \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   (iii) Concluir que o conjunto dos primos é infinito .

9. Provar que existem infinitos primos, assumindo por absurdo que existe um primo p maior que todos os outros e considerando o inteiro $p! + 1$ para chegar a uma contradição.

10. Para cada inteiro $n \geq 1$, seja p_n o n-ésimo número primo positivo. Provar que o inteiro $p_1 p_1 \cdots p_n + 1$ não é um quadrado perfeito.

11. (i) Sejam a e b inteiros positivos relativamente primos. Provar que $s(ab) = s(a)\ s(b)$ ($s(a)$ = soma dos divisores positivos de a ; ver a proposição 2.6.12) .
    (ii) Seja n um inteiro positivo par. Podemos escrever n na forma $n = 2^{k-1} m$, em que $k \geq 2$ e $mdc(2,m) = 1$. Provar que, se n é perfeito, $(2^k - 1) \mid m$.
    (iii) Sejam n e m como em (ii) e seja $m' = \frac{m}{2^k - 1}$. Provar que $s(m) = m + m'$.
    (iv) Concluir que m é primo .

12. Sejam a e b inteiros relativamente primos e m um inteiro positivo. Provar que, na progressão b, $a + b$, $2a + b$,..., $ka + b$, ... existem infinitos termos relativamente primos com m.

13. Provar que, se $a \neq b$, existem infinitos inteiros positivos n tais que $a + n$ e $b + n$ sejam relativamente primos.

3

CONGRUÊNCIAS

3.1 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Nesta seção consideremos equações da forma

$$aX + bY = c$$

em que a, b e c são números inteiros, e a e b não são ambos nulos. Procuraremos soluções inteiras, isto é, pares de números $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = c$.

O primeiro a considerar problemas desse tipo, isto é, equações indeterminadas que eventualmente admitem infinitas soluções, foi Diophanto de Alexandria (em torno de 250 d.C.); porém, ele procurava soluções racionais. De qualquer forma, esse tipo de equações associa-se tradicionalmente ao seu nome e, por extensão, até hoje o adjetivo "diofantino" é usado para indicar problemas relativos a números inteiros.

Na verdade, seria mais justo associar esses problemas ao nome de Fermat, que foi o primeiro a chamar a atenção sobre as questões

aritméticas estritamente no conjunto dos números inteiros, no preâmbulo de um problema que propôs em 1657.

Naturalmente, muitos problemas da vida diária admitem apenas soluções inteiras. Suponhamos, por exemplo, que se quer adquirir um determinado líquido que é vendido em recipientes de 7 l ou de 15 l e se deseja fazer uma compra de 125 l. Chamando de x e y o número de recipientes de 15 l e 7 l, respectivamente, a resolução do problema acima nos leva à equação diofantina:

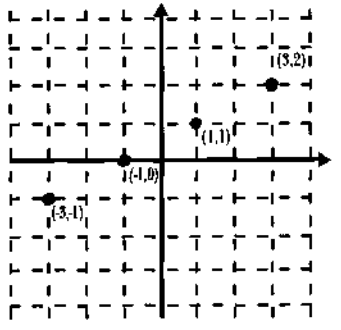
$$15X + 7Y = 125 .$$

No exemplo 3.1.5 estudaremos a resolução deste problema.

De uma perspectiva mais moderna, podemos dar uma interpretação geométrica dessas questões.

O leitor sabe que uma equação do tipo $aX + bY = c$, em que se admitem valores reais para as variáveis X e Y, representa uma reta no plano cartesiano. Assim, podemos interpretar a resolução da equação diofantina como o problema de determinar os pontos da reta que têm ambas as coordenadas inteiras.

Por exemplo, a figura ao lado representa o gráfico da reta $X - 2Y = -1$. Assinalamos alguns pontos dessa reta cujas coordenadas são ambas inteiras.



Algumas equações diofantinas nunca têm solução. Por exemplo, na equação $4X + 6Y = 5$, para qualquer par de inteiros x e y, o primeiro membro é um número par, enquanto o segundo é ímpar. Portanto, essa equação não tem solução.

Começaremos o estudo procurando condições para a existência de soluções.

3.1.1 Proposição

Sejam a, b e c inteiros e $d = mdc(a, b)$. A equação diofantina $aX + bY = c$ tem soluções se e somente se $d \mid c$.

Demonstração

Consideremos o conjunto I de todos os valores que o primeiro membro pode assumir, isto é,

$$I = \{ ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z} \} .$$

Como no Teorema de Bézout (2.3.4), vem que I é um ideal de $\mathbb{Z}$; mais ainda, se $d = mdc(a, b)$ vem também que

$$I = d\mathbb{Z} .$$

Obviamente, a equação tem solução se e somente se $c \in I$, e isso acontece se e somente se $d \mid c$. ■

Veremos agora como resolver uma equação diofantina no caso em que existem soluções.

3.1.2 Teorema

Sejam a, b e c inteiros tais que $d = mdc(a, b)$ divide c. Escrevendo d na forma $d = ra + sb$, com $r, s \in \mathbb{Z}$, temos que $x_0 = r \cdot \frac{c}{d}$, $y_0 = s \cdot \frac{c}{d}$ é uma solução da equação $aX + bY = c$.

Toda outra solução é da forma

$$x = r \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{d} t , \quad y = s \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{d} t , \quad \text{com } t \in \mathbb{Z} .$$

E, reciprocamente, para todo $t \in \mathbb{Z}$ os valores x e y dados pelas fórmulas acima são soluções da equação.

Demonstração

Se $d = ra + sb$, multiplicando ambos os membros por c/d temos que

$$\left(r \frac{c}{d}\right) a + \left(s \frac{c}{d}\right) b = d \cdot \frac{c}{d} = c .$$

Logo, $\left(x_0 = r \cdot \frac{c}{d} , y_0 = s \cdot \frac{c}{d} \right)$ é uma solução.

Devemos provar agora que todo par de inteiros da forma dada no enunciado é solução e, reciprocamente, que toda solução é dessa forma.

De fato, dados $x = x_0 + \frac{b}{d} t$, $y = y_0 - \frac{a}{d} t$, substituindo na equação, temos

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d} t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d} t\right) = ax_0 + \frac{ab}{d} t + by_0 - \frac{ab}{d} t = ax_0 + by_0 = c .$$

Seja agora (x', y') uma solução. Mostraremos que existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x' = x_0 + \frac{b}{d} t$, $y' = y_0 - \frac{a}{d} t$.

Como (x', y') é solução, temos que

$$ax' + by' = c = ax_0 + by_0 ,$$

donde

$$a (x' - x_0) = b (y_0 - y') .$$

Escrevendo $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$, temos que

$$mdc (a_1 , b_1) = mdc \left(\frac{a}{d} , \frac{b}{d} \right) = \frac{d}{d} = 1 .$$

Dividindo a expressão acima por d, vem que:

3.1.3 $a_1 (x' - x_0) = b_1 (y_0 - y')$.

Em particular, $b_1 \mid a_1 (x' - x_0)$ (pois b_1 divide o segundo membro); como $mdc (a_1 , b_1) = 1$, do Teorema de Euclides (2.3.7) temos que $b_1 \mid (x' - x_0)$ e existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x' - x_0 = b_1 t$, isto é,

$$x' = x_0 + \frac{b}{d} t .$$

Ainda, substituindo $x' - x_0$ por $b_1 t$ na relação 3.1.3, temos $a_1 b_1 t = b_1 (y_0 - y')$, donde

$$y' = y_0 - a_1 t = y_0 - \frac{a}{d} t \qquad \blacksquare$$

3.1.4 Exemplo

Vamos determinar as soluções de $56X + 72Y = 40$.

Temos que $mdc (56, 72) = 8$. Como $8 \mid 40$, a equação tem, de fato, soluções.

Calculando r e s tais que $r\,56 + s\,72 = 8$, temos que $r = 4$ e $s = -3$ (para isso, pode-se usar o Algoritmo de Euclides; ver 2.4.2).

Multiplicando por $\frac{40}{8} = 5$, temos uma solução particular: $x_0 = 20$ e $y_0 = -15$.

Calculando $\frac{56}{8} = 7$ e $\frac{72}{8} = 9$, temos que toda outra solução é da forma

$$x = 20 + 9t , \quad y = -15 - 7t , \quad t \in \mathbb{Z} .$$

3.1.5 Exemplo

Consideremos a equação correspondente ao problema de que falamos no começo da seção:

$$15X + 7Y = 125 .$$

Temos que $mdc (15, 7) = 1$. Como $(1) \cdot 15 + (-2) \cdot 7 = 1$, vem que uma solução particular é

$$x_0 = 1 \cdot 125 = 125$$
$$y_0 = -2 \cdot 125 = -250$$

e as outras soluções são da forma

$$x = 125 + 7t$$
$$y = -250 - 15t , \text{ com } t \in \mathbb{Z} .$$

Considerando o problema que levou a essa equação, vemos que só interessam respostas não-negativas; assim, devemos ter

$$125 + 7t \geq 0 , \text{ isto é, } t \geq -17$$
$$-250 - 15t \geq 0 , \text{ isto é, } t \leq -17 .$$

A única resposta não-negativa se obtém, portanto, para $t = -17$ e, nesse caso, temos

$$x = 6 \quad \text{e} \quad y = 5 \ .$$

EXERCÍCIOS

1. Resolver as seguintes equações diofantinas:

   (i) $2X + 3Y = 9$.

   (ii) $3X + 5Y = 47$.

   (iii) $8X + 7Y = 3$.

   (iv) $47X + 29Y = 999$.

2. Determinar todas as soluções nos inteiros positivos das equações:

   (i) $54X + 21Y = 906$.

   (ii) $123X + 360Y = 99$.

   (iii) $30X + 17Y = 300$.

3. Seja k um inteiro primo. Provar que a equação $X^4 + 4Y^4 = k$ tem solução inteira se e somente se $k = 5$. Nesse caso, determinar suas soluções.

4. Determinar todos os múltiplos positivos de 11 e de 9 cuja soma seja 270.

5. Determinar todos os naturais menores que 1000 que têm como restos 9, na divisão por 37, e 15, na divisão por 52.

6. Determinar o menor inteiro positivo que tem como restos 16 e 27, quando dividido, respectivamente, por 39 e 56.

7. Expressar o número 100 como a soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo, por 11.

8. Prove que, se x e y são inteiros tais que $2x + 3y$ seja múltiplo de 17, então $9x + 5y$ também é múltiplo de 17.

9. Certo senhor, ao descontar um cheque em seu banco, recebeu, sem notar, o número de reais trocados pelo número de centavos e vice-versa. Em seguida, gastou 68 centavos e observou, surpreso, que tinha o dobro da quantia original do cheque. Determinar o menor valor possível no qual o cheque foi preenchido.

10. Somando-se um certo múltiplo $6x$ de 6 com um certo múltiplo $9y$ de 9, obtém-se 126. Se x e y são trocados, a nova soma é 114. Determinar x e y .

11. Sejam $a, b > 0$ relativamente primos. Provar que a equação diofantina $ax - by = c$ tem infinitas soluções nos inteiros positivos.

12. (i) Provar que a equação diofantina $aX + bY + cZ = d$ tem solução se e somente se $mdc\ (a, b, c)$ divide d .

    (ii) Determinar todas as soluções inteiras de $15X + 12Y + 30Z = 24$.

13. Um pescador tenta pescar um cardume jogando diversas redes na água. Se cair exatamente um peixe em cada rede, salvam-se ainda n peixes. Se caírem n peixes em cada rede, sobram n redes vazias. Quantas são as redes? Quantos são os peixes?

3.2 CONGRUÊNCIAS

Como mencionamos no final de 2.7, problemas sobre números perfeitos levam a estudar números da forma $2^n - 1$ e a procurar seus divisores. Mais geralmente, podemos pensar em estudar os números da forma $a^n - 1$, com $a \in \mathbb{Z}$.

Numa carta de 1640 dirigida a Bernhard Frénicle de Bessy, Fermat anunciava um resultado surpreendente: se p é um primo e a um inteiro que não é divisível por p, então p divide $a^{p-1}-1$. Na mesma carta, comentava: "Eu lhe enviaria a demonstração se não temesse que ela é demasiado comprida".

A primeira demonstração desse resultado, conhecido como "Pequeno Teorema de Fermat" (para distingui-lo do Grande Teorema de Fermat, mencionado em 2.3), foi publicada em 1736, quase um século depois, por Euler. Posteriormente, Euler deu outras demonstrações do mesmo resultado. Numa delas, ele utiliza freqüentemente os "restos de divisões por p", que deram origem à Teoria das Congruências. Esse método de trabalho também foi usado por Lagrange e Legendre, mas só se tornou explícito nas *Disquisitiones* de Gauss, na qual aparecem a definição precisa e o simbolismo que se usa até hoje.

Veremos nos exemplos como a introdução dessa notação sintética simplifica o estudo de muitas questões de divisibilidade.

3.2.1 Definição

Seja $m \neq 0$ um inteiro fixo. Dois inteiros a e b dizem-se *congruentes módulos m* se m divide a diferença $a - b$.

Nesse caso, escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$. Para indicar que a e b não são congruentes módulos m, escreveremos $a \not\equiv b \pmod{m}$. (Gauss escreve nas *Disquisitiones* que foi induzido a utilizar o símbolo ≡ devido à grande analogia com a igualdade algébrica.)

Com a nossa definição, $a \equiv b \pmod{m}$ se e somente se $m \mid (a-b)$, ou, equivalentemente, se existe um inteiro q tal que $a = b + mq$.

Como $m \mid (a - b)$ se e somente se $|m| \mid (a - b)$, limitar-nos-emos a considerar o caso em que $m > 0$.

Por exemplo, $5 \equiv 9 \pmod{2}$ e também $5 \equiv 9 \pmod{4}$. Aliás, é fácil verificar que dois números são congruentes módulo 2 se e somente se eles são ambos pares ou ambos ímpares.

Podemos dar outra caracterização da noção de congruência.

3.2.2 Proposição

Seja m um inteiro fixo. Dois inteiros a e b são congruentes módulo m se e somente se eles têm como resto o mesmo inteiro quando dividimos por m.

Demonstração

Sejam

$$\begin{cases} a = mq_1 + r_1, & \text{com } 0 \le r_1 < m \\ b = mq_2 + r_2, & \text{com } 0 \le r_2 < m \end{cases}.$$

Então,

$$a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2),$$

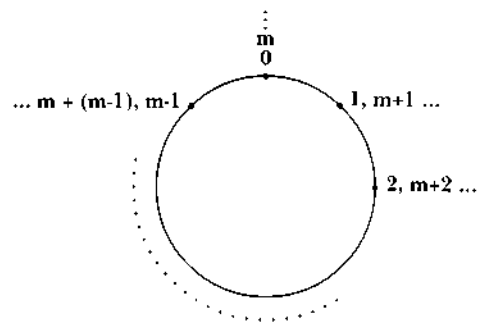
logo,

$m \mid (a - b)$ se e somente se $m \mid (r_1 - r_2)$.

Ainda, como $0 \le |r_1 - r_2| < m$, temos que $m \mid (r_1 - r_2)$ se e somente se $r_1 - r_2 = 0$.

Conseqüentemente, $a \equiv b \pmod{m}$ se e somente se $r_1 = r_2$ ■

Utilizando uma circunferência dividida em m partes, podemos obter uma representação pictórica da congruência módulo m. Para isso, fazemos corresponder a cada ponto assinalado um dos números $0, 1, \ldots, m-1$, como na figura abaixo. Como dois quaisquer desses inteiros não são congruentes módulos m (prove!) e todo inteiro é congruente a um e apenas um desses números, podemos associar cada inteiro a um único ponto assinalado.



Com essa correspondência, dois inteiros são congruentes módulos m se e somente se estiverem representados pelo mesmo ponto da circunferência.

Uma coleção de m inteiros $\{ a_1, \ldots, a_m \}$ diz-se um *sistema completo de resíduos módulos m* se cada inteiro é congruente módulo m a um único a_i. Obviamente, o sistema completo de resíduos mais simples que podemos obter é $\{ 0, 1, \ldots, m-1 \}$. Mas não é o único possível. O leitor poderá verificar facilmente que, escolhendo-se um inteiro qualquer para cada um dos pontos indicados na circunferência, obtemos um conjunto de m inteiros que formam um sistema completo de resíduos. Por exemplo, os seguintes são sistemas completos de resíduos módulo 5:

$\{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$,
$\{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$,
$\{ 12, 24, 35, -4, 18 \}$.

Vamos verificar que, tal como Gauss afirmara, existe uma grande semelhança entre as propriedades da congruência e da igualdade.

3.2.3 Proposição

Sejam $m > 0$ um inteiro fixo, e a, b, c, d inteiros arbitrários. Então, valem as seguintes propriedades:

(i) $a \equiv a \pmod m$.
(ii) *Se* $a \equiv b \pmod m$, *então* $b \equiv a \pmod m$.
(iii) *Se* $a \equiv b \pmod m$ *e* $b \equiv c \pmod m$, *então* $a \equiv c \pmod m$.
(iv) *Se* $a \equiv b \pmod m$ *e* $c \equiv d \pmod m$, *então* $a + c \equiv b + d \pmod m$.
(v) *Se* $a \equiv b \pmod m$, *então* $a + c \equiv b + c \pmod m$.
(vi) *Se* $a \equiv b \pmod m$ *e* $c \equiv d \pmod m$, *então* $ac \equiv bd \pmod m$.
(vii) Se $a \equiv b \pmod m$, *então* $a^n \equiv b^n \pmod m$, *para todo inteiro positivo n*.
(viii) *Se* $a + c \equiv b + c \pmod m$, *então* $a \equiv b \pmod m$.

Demonstração

As propriedades (i) e (ii) são de demonstração imediata e ficam a cargo do leitor.

Para provar (iii), observamos que, se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, temos que $m \mid (a - b)$ e $m \mid (b - c)$. Conseqüentemente, $m \mid ((a - b) + (b - c))$, isto é, $m \mid (a - c)$, logo $a \equiv c \pmod m$.

A demonstração de (iv) é análoga à anterior, e (v) segue de (iv), observando por (i) que $c \equiv c \pmod m$.

Para provar (vi), mudaremos levemente a estratégia. Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, existem inteiros q_1 e q_2 tais que $a = b + q_1 m$ e $c = d + q_2 m$, logo

$$ac = bd + (bq_2 + bq_1 + q_1 q_2 m)\, m,$$

isto é,

$$m \mid (ac - bd), \text{ donde } ac \equiv bd \pmod m.$$

Novamente, (vii) segue de (vi), tomando-se $a = c$, $b = d$ e usando indução em n.

Finalmente, para demonstrar (viii), observamos que, se $a + c \equiv b + c \pmod m$, temos diretamente que $m \mid ((a + c) - (b + c))$ logo, $m \mid (a - b)$, isto é, $a \equiv b \pmod m$. ■

A propriedade (viii) da proposição anterior é análoga à cancelativa da soma. A semelhança com as propriedades da igualdade sugere que também poderia valer a cancelativa do produto, isto é, que, se $c \not\equiv 0 \pmod m$, então $ac \equiv bc \pmod m$ implica $a \equiv b \pmod m$ (ou, em termos de divisibilidade se $m \nmid c$ e $m \mid c(a - b)$, então $m \mid (a - b)$; como já sabemos, isso vale em geral se $mdc(m, c) = 1$). Isto em geral é falso, como mostra o seguinte exemplo: $3 \not\equiv 0 \pmod 6$ e $3 \cdot 3 \equiv 3 \cdot 5 \pmod 6$ mas $3 \not\equiv 5 \pmod 6$.

Mais precisamente, vale:

3.2.4 Proposição

Seja m um inteiro fixo e sejam a, b e c inteiros arbitrários. Se $mdc(c, m) = 1$, então $ac \equiv bc \pmod m$ implica $a \equiv b \pmod m$.

Demonstração

Se $ac \equiv bc \pmod m$, temos que $m \mid (a - b)c$.

Como $mdc(c, m) = 1$, do Teorema de Euclides (2.3.7) vem que $m \mid (a - b)$, donde $a \equiv b \pmod m$. ■

Observamos de passagem que, se $mdc(c, m) = d \neq 1$, sempre

existem inteiros a e b tais que $a \not\equiv b \pmod{m}$, mas $ac \equiv bc \pmod{m}$: se $d = m$, isto é, se $c \equiv 0 \pmod{m}$, então, para inteiros arbitrários a e b, tem-se que $ac \equiv bc \pmod{m}$, independentemente de a e b serem ou não congruentes módulo m; se $d < m$ escrevendo

$$m = k\,d,$$
$$c = k'd,$$

tem-se que

$$k \not\equiv 0 \pmod{m}, \text{ mas } c \cdot k \equiv c \cdot 0 \pmod{m}, \text{ pois } ck = k'dk = k'm.$$

3.2.5 Exemplo

Vamos determinar o resto da divisão de 5^{60} por 26.

Escrevendo $5^{60} = 26q + r$, o problema equivale a determinar o inteiro r tal que $0 \le r \le 25$ e tal que $5^{60} \equiv r \pmod{26}$.

Notamos que $5^2 = 25$, isto é, $5^2 \equiv -1 \pmod{26}$. Usando a parte (vii) da proposição 1.3.3, temos que $5^4 \equiv (-1)^2 \pmod{26}$, isto é, $5^4 \equiv 1 \pmod{26}$.

Finalmente, $5^{60} = (5^4)^{15}$, logo, $5^{60} \equiv (1)^{15} \pmod{26}$, donde o resto da divisão de 5^{60} por 26 é 1.

3.2.6 Exemplo

Vamos determinar o algarismo das unidades de 3^{100}.

Note que, em geral, se $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, então $a \equiv a_0 \pmod{10}$. Devemos então determinar um número x tal que $0 \le x \le 9$ e $3^{100} \equiv x \pmod{10}$.

Agora, $3^2 \equiv -1 \pmod{10}$, logo $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ e, portanto, $3^{100} \equiv (3^4)^{25} \equiv 1 \pmod{10}$.

3.2.7 Exemplo

No exercício 5 de 2.2, o leitor determinou critérios para que um número fosse divisível por 3, 9 e 11, a partir de sua expressão na base 10. Mostraremos aqui como essa discussão se simplifica introduzindo a linguagem de congruências.

Seja

$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, com $0 \le a_i \le 9$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$.

Notamos inicialmente que $10 \equiv 1 \pmod{3}$, conseqüentemente, temos que $10^i \equiv 1 \pmod{3}$, para todo inteiro positivo i, donde, usando a parte (vi) da proposição 3.2, temos que

$$a_i 10^i = a_i \pmod{3}, \text{ para } 1 \le i \le n.$$

Somando ordenadamente todas essas congruências, temos que

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 \equiv$$

$$\equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 \pmod{3},$$

isto é, existe um inteiro k tal que

$$a = (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) + 3k.$$

Conseqüentemente, a é múltiplo de 3 se e somente se a soma de seus algarismos $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$ também o for.

Como temos também que $10 \equiv 1 \pmod{9}$, um raciocínio idêntico ao anterior mostra que a é múltiplo de 9 se e somente se a soma de seus algarismos o for.

Finalmente, como $10 \equiv -1 \pmod{11}$, temos que

$$10^i = -1 \pmod{11}, \text{ se } i \text{ é impar}$$
$$10^i = 1 \pmod{11}, \text{ se } i \text{ é par}.$$

Multiplicando pelos algarismos a_i correspondentes e somando, tal como antes, temos

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 \equiv (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} +$$

$$+ \ldots + (-a_1) + a_0 \pmod{11}$$

isto é,

$$a \equiv (a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots) \pmod{11} .$$

Conseqüentemente, a é múltiplo de 11 se e somente se

$$11 \mid ((a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots)) .$$

3.2.8 EXEMPLO

Dissemos no fim de 2.7 que Fermat conjeturou que todo número da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ é primo, e que provou que isso é verdade para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Porém, a afirmação é falsa para $n = 5$ já que Euler provou que F_5 é divisível por 641. Veremos como isso pode ser feito usando congruências. Temos que

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 .$$

Agora,

$$2^2 = 4,\ 2^4 = 16,\ 2^8 = 16 \cdot 16 = 256,\ 2^{16} = 65\,536 .$$

Dividindo 65 536 por 641, obtemos um resto igual a 154. Podemos, então, escrever que

$$2^{16} \equiv 154 \pmod{641}, \text{ donde } 2^{32} \equiv 154^2 \pmod{641} .$$

Agora, $154^2 = 23\,716$, e dividindo por 641 obtemos que $154^2 \equiv 640 \pmod{641}$.

Logo,

$$2^{32} \equiv 640 \pmod{641} \text{ e } 2^{32} + 1 \equiv 641 \pmod{641},$$

isto é, $641 \mid (2^{32} + 1)$.

EXERCÍCIOS

1. (i) A que número entre 0 e 6 é congruente módulo 7 o produto $11 \cdot 18 \cdot 2\,322 \cdot 13 \cdot 19$?
   (ii) A que número entre 0 e 3 é congruente módulo 4 a soma $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{19}$?

2. Sejam a, b, r inteiros, s um inteiro não-nulo. Provar que $a \equiv b \pmod{r}$ se e somente se $as \equiv bs \pmod{rs}$.

3. Seja a um inteiro. Provar que:
   (i) a^2 é congruente a 0, 1 ou 4 módulo 8 .
   (ii) Se a é um cubo, então a^2 é congruente a 0, 1, 9 ou 28 módulo 36.
   (iii) Se $2 \nmid a$ e $3 \nmid a$, então $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

4. Determinar todos os inteiros positivos m tais que toda solução da congruência $X^2 \equiv 0 \pmod{m}$ também seja solução da congruência $X \equiv 0 \pmod{m}$.

5. Sejam m_1, m_2 inteiros relativamente primos e seja a um inteiro arbitrário. Provar que $a \equiv 0 \pmod{m_1 m_2}$ se e somente se $a \equiv 0 \pmod{m_1}$ e $a \equiv 0 \pmod{m_2}$. Mostrar com um exemplo que a hipótese $mdc\ (m_1, m_2) = 1$ é essencial.

6. Provar que $n^7 \equiv n \pmod{42}$, para todo inteiro n .

7. Determinar o resto das divisões:
   (i) De 2^{50} por 7 .
   (ii) De 41^{65} por 7 .
   (iii) De $1^5 + 2^5 + \ldots + 100^5$ por 4 .

8. Usar congruências para verificar que:
   (i) $89 \mid (2^{44} - 1)$.
   (ii) $97 \mid (2^{48} - 1)$.
   (iii) $23 \mid (2^{11} - 1)$.

9. Seja a um inteiro ímpar. Provar que $a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$, para todo inteiro $n \geq 1$.

10. Seja $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ um sistema completo de resíduos módulo n, e seja a um inteiro tal que $mdc\ (a, n) = 1$. Provar que $\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_n\}$ é um sistema completo de resíduos módulo n.

3.3 RESOLUÇÃO DE CONGRUÊNCIAS LINEARES

Nesta seção estudaremos o problema de resolver equações da forma $aX \equiv b \pmod{m}$, onde a, b e m indicam inteiros dados, com $m > 0$.

Note que, se x é uma solução de uma tal equação, $ax - b$ deve ser múltiplo de m, isto é, deve existir y tal que $ax = b - my$, ou seja, $ax + my = b$. Em outras palavras, se x é solução da equação $aX \equiv b \pmod{m}$, existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que o par (x, y) é solução da equação diofantina $aX + mY = b$.

Reciprocamente, é fácil ver que se (x, y) é uma solução da equação diofantina $aX + mY = b$, então x é solução de $aX \equiv b \pmod{m}$.

Usando então a proposição 3.1.1, podemos afirmar:

3.3.1 TEOREMA

A congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ *tem solução se e somente se* $d = \text{mdc}(a, m)$ *divide* b.

Neste caso sabemos que, se (x_0, y_0) é uma solução particular da equação diofantina, sua solução geral é

$$x = x_0 + \frac{m}{d}t,$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ainda, escrevendo d na forma $d = ra + sm$ e $b = b_1 d$, com $r, s, b_1 \in \mathbb{Z}$, sabemos que uma solução particular da diofantina é dada por $x_0 = rb_1$, $y_0 = sb_1$.

Conseqüentemente, segue que todas as soluções da congruência dada são da forma

3.3.2 $x = rb_1 + \frac{m}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}$.

Atribuindo a t os valores $t = 0, 1, \ldots, d-1$, obtemos as soluções

3.3.3 $\{x_0 = rb_1,\ x_1 = rb_1 + \frac{m}{d},\ x_2 = rb_1 + \frac{2m}{d}, \ldots, x_{d-1} = rb_1 + \frac{d-1}{d}m\}$.

Mostraremos que toda outra solução é congruente a uma dessas módulo m. De fato, se

$$x = rb_1 + \frac{m}{d}t$$

é dada por outro valor de t, dividindo t por d podemos escrever $t = q \cdot d + r'$, onde $0 \le r' \le d-1$. Logo,

$$x = rb_1 + \frac{m}{d}(qd + r') = rb_1 + \frac{r'}{d}m + mq,$$

isto é,

$$x = rb_1 + \frac{r'}{d}m \pmod{m}.$$

Como $0 \le r' \le d-1$, o segundo membro da congruência acima é uma das soluções dadas em 3.3.3.

Provaremos ainda que estas soluções não são congruentes entre si módulo m.

De fato, suponhamos que

$$x_h = rb_1 + \frac{h}{d}m$$

fosse congruente a

$x_k = rb_1 + \frac{k}{d}m$, módulo m,

em que $0 \le k \le h \le d-1$. Teríamos então

$$rb_1 + \frac{k}{d}m \equiv rb_1 + \frac{h}{d}m \pmod{m},$$

isto é,

$$\frac{km}{d} \equiv \frac{hm}{d} \pmod{m},$$

logo,

$$m \mid (h-k)\frac{m}{d}.$$

Como $0 \le h - k < d$, temos que $0 \le (h-k)\frac{m}{d} < d\,\frac{m}{d} = m$.

Mas $m \mid (h-k)\frac{m}{d}$, logo $(h-k) = 0$ e, portanto, $h = k$.

Reunindo as informações obtidas, temos:

3.3.4 Teorema

Sejam a e m inteiros, $d = mdc(a, m)$ e b um múltiplo de d. Escrevendo $d = ra + sm$ com $r, s \in \mathbb{Z}$ e $b = b_1 d$, a congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ tem d soluções não congruentes, duas a duas, módulo m:

$$x_0 = rb_1,\ x_1 = rb_1 + \frac{m}{d},\ x_2 = rb_1 + \frac{2}{d}m,\ \ldots,\ x_{d-1} = rb_1 + \frac{d-1}{d}m.$$

Toda outra solução é congruente a uma dessas, módulo m.

3.3.5 Corolário

Se a e m são inteiros relativamente primos, a congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ tem sempre solução. Escrevendo $1 = ra + sm$, temos que $x = rb$ é uma solução e é única módulo m (isto é, toda outra solução é congruente módulo m a rb).

3.3.6 Exemplo

Consideremos a congruência $-3X \equiv 18 \pmod{15}$. Calculamos $mdc(-3,15) = 3$.

Escrevendo $4(-3) + 1 \cdot 15 = 3$, vem que $r = 4$, e podemos também calcular $b_1 = 6$. Uma solução particular será, então, $x_0 = 24$ e, como $\frac{15}{3} = 5$, temos que

$$x_0 = 24,\ x_1 = 24 + 5 = 29,\ x_2 = 24 + 10 = 34$$

são soluções da congruência dada. Toda outra solução será congruente a uma dessas, módulo 15.

No exemplo anterior, resolvemos uma congruência linear observando que, essencialmente, trata-se apenas de uma equação diofantina levemente disfarçada.

A título de ilustração, mostraremos a seguir como este problema poderia ser resolvido sem referência alguma às equações diofantinas

(faremos isso não só para enriquecer o ponto de vista do leitor, mas também para demonstrar um resultado que nos será útil mais adiante).

Consideremos novamente uma congruência do tipo $aX \equiv b \pmod{m}$ e seja $d \equiv mdc(a, m)$. Se x é uma solução, temos que $m \mid (ax - b)$; logo, $d \mid (ax - b)$ e, como $d \mid a$, devemos ter que $d \mid b$. Descobrimos assim, novamente, que para que a congruência tenha solução é condição necessária que $d \mid b$. Do processo de resolução seguirá que essa condição é também suficiente.

Escrevendo $a = a_1 d$, $b = b_1 d$ e $m = nd$, a congruência toma a forma $a_1 dX \equiv b_1 d \pmod{nd}$.

É fácil verificar que essa congruência é equivalente a

3.3.7 $a_1 X \equiv b_1 \pmod{n}$,

isto é, que os conjuntos de soluções de uma e outra coincidem.

Ainda, escrevendo $d = ra + sm = ra_1 d + snd$, temos que $1 = ra_1 + sn$, logo $ra_1 \equiv 1 \pmod{n}$.

Multiplicando (3.3.7) por r, temos que

$$ra_1 X \equiv rb_1 \pmod{n}.$$

Mas $ra_1 X \equiv X \pmod{n}$, logo, toda solução de (3.3.7) também é solução de

3.3.8 $X \equiv rb_1 \pmod{n}$.

Reciprocamente, se $x \equiv rb_1 \pmod{n}$, então $ra_1 x \equiv rb_1 \pmod{n}$ e, como $mdc(r, n) = 1$, podemos cancelar para obter $a_1 x \equiv b_1 \pmod{n}$, isto é, toda solução de (3.3.8) é solução de (3.3.7).

Provamos acima:

3.3.9 Proposição

Sejam a e m inteiros e b um múltiplo de $d = mdc(a,m)$. Escrevendo $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $m = nd$ e d na forma $d = ra + sm$, temos que a congruência $aX \equiv b \pmod{m}$ é equivalente a $X \equiv rb_1 \pmod{n}$.

A vantagem da proposição anterior é que é muito fácil dar a solução de $X \equiv rb_1 \pmod{n}$. Ela é

$$x = rb_1 + nt,\ t \in \mathbb{Z}\ .$$

Lembrando que $n = \frac{m}{d}$, temos

$$x = rb_1 + \frac{m}{d}\,t,\ \ t \in \mathbb{Z}\ .$$

Temos determinada, assim, a solução geral da congruência dada, que coincide com a que achamos em 3.3.2. Daqui em diante, o estudo da determinação das soluções diferentes módulo m pode ser feito como antes.

3.3.10 Exemplo

Consideremos a congruência $6X \equiv 14 \pmod 4$. Calculando $d = mdc\ (6,4) = 2$ e escrevendo $2 = 1 \cdot 6 + (-1)\,4$, temos que

$$r = 1,\ \ b_1 = \frac{b}{d} = 7 \ \text{ e } n = \frac{m}{d} = 2\,.$$

Conseqüentemente, a equação dada é equivalente a

$$X = 7 \pmod 2\,,$$

cuja solução geral é $x = 7 + 2t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Assim, as soluções diferentes módulo 4 são

$$x_0 = 7 \text{ e } x_1 = 7 + 2 = 9$$

e toda outra solução é congruente a uma dessas, módulo 4.

EXERCÍCIOS

1. Resolva as seguintes congruências lineares:

   (i) $25\,X \equiv 15 \pmod{29}$.

   (ii) $5\,X \equiv 2 \pmod{26}$.

   (iii) $140\,X \equiv 133 \pmod{301}$.

2. Usando congruências, resolva as seguintes equações diofantinas:

   (i) $4X + 51Y = 9$.

   (ii) $12X + 25Y = 331$.

3. Determinar todas as soluções da congruência linear $3X - 7Y \equiv 11 \pmod{13}$.

4. Resolva a congruência linear $17X \equiv 3 \pmod{2.3.5.7}$.

3.4 SISTEMAS DE CONGRUÊNCIAS LINEARES

Aproximadamente no primeiro século a.C., o autor chinês Sun-Tsu, num livro intitulado *Suan-Ching* (*Aritmética*), considerava, num verso chamado *tai-yen* (grande generalização), o seguinte problema: determinar um número tal que dividido por 3, 5 e 7 dê restos 2, 3 e 2, respectivamente.

Seu método de resolução consistia em determinar números auxiliares 70, 21 e 15 e notar que $233 = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15$ é solução. Dividindo esse resultado por $3 \cdot 5 \cdot 7$, obtinha 23 como resto, que é a menor solução positiva do problema (no exemplo 3.4.4 esse método de resolução será justificado).

Esses resultados tornaram-se conhecidos na Europa só a partir de 1852 e, após algumas discussões sobre a validade do método de trabalho, observou-se, em 1874, que essa técnica era essencialmente a mesma contida na *Disquisitiones Arithmeticae*, de K. F. Gauss.

Talvez seja interessante observar que, também por volta do ano 100 a.C., o pitagórico Nichomanus considerou o mesmo problema que Sun-Tsu e achou a solução 23.

Traduzido para a linguagem de congruências, o problema de Sun-Tsu consiste em determinar um inteiro que seja solução simultânea das seguintes equações:

3.4.1 (i) $X \equiv 2 \pmod 3$
(ii) $X \equiv 3 \pmod 5$
(iii) $X \equiv 2 \pmod 7$

Vejamos como esse problema pode ser resolvido. Conforme mostramos na seção anterior, os inteiros que verificam a primeira equação 3.4.1 estão dados pela fórmula

$$x = 2 + 3y \ .$$

Desses, os que forem solução de (ii) deverão verificar também

$2 + 3Y \equiv 3 \pmod 5$, isto é, $3Y \equiv 1 \pmod 5$.

A solução desta última equação está dada por

$$y = 2 + 5Z \ .$$

Substituindo na expressão de x, temos que os números da forma

$$x = 2 + 3\,(2+5Z) = 8 + 15Z$$

são soluções simultâneas de (i) e (ii).

Finalmente, para que sejam soluções de (iii) também, eles devem verificar

$8 + 15Z \equiv 2 \pmod 7$, isto é, $15Z \equiv -6 \pmod 7$,

cujas soluções estão dadas por

$$z = -6 + 7t \ .$$

Substituindo novamente na expressão de x, temos que os inteiros da forma

$$x = 8 + 15\,(-6 + 7t) = -82 + 105t$$

são soluções simultâneas das três equações.

Por exemplo, para $t = 1$, obtemos $x = 23$ que é, de fato, uma resposta para o problema de Sun-Tsu.

Naturalmente, parece razoável tentar discutir o problema de forma mais geral. Consideremos então um sistema da forma:

3.4.2
$$\begin{aligned} a_1X &\equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2X &\equiv b_2 \pmod{m_2} \\ &\cdots \\ a_kX &\equiv b_k \pmod{m_k} \ . \end{aligned}$$

Obviamente, para que o sistema tenha solução, será necessário que cada uma das congruências, considerada individualmente, admita solução. Conforme visto em 3.3.1, chamando $d_i = mdc\,(a_i, m_i)$, a condição necessária será que $d_i \mid b_i$, $1 \le i \le k$.

Nesse caso, conforme a proposição 3.3.9 , cada uma das equações do sistema é equivalente a uma equação da forma $X \equiv c_i \pmod{n_i}$, onde $n_i = m_i / d$ (a proposição 3.3.9 nos dá também o valor de c_i, mas preferimos escrevê-lo assim por enquanto, para não sobrecarregar a notação).

Conseqüentemente, o sistema dado é equivalente ao sistema

3.4.3
$$\begin{aligned} X &\equiv c_1 \pmod{n_1} \\ X &\equiv c_2 \pmod{n_2} \\ &\cdots \\ X &\equiv c_k \pmod{n_k} \end{aligned}$$

e, portanto, saberemos resolver o problema se conseguirmos determinar as soluções dc 3.4.3. Essa questão será resolvida no próximo resultado, cujo nome lembra as origens desse problema. (Introduziremos, porém, uma hipótese adicional sobre os módulos; ver no fim desta seção uma discussão sobre essa hipótese.)

3.4.4 Teorema Chinês do Resto

Sejam n_1 , n_2 , ... , n_k inteiros, relativamente primos dois a dois (isto é, tais que, se $i \neq j$, então $mdc(n_i, n_j) = 1$), e sejam c_1 , c_2 , ... , c_k inteiros arbitrários. Então, o sistema de congruências lineares

$$X \equiv c_1 \pmod{n_1}$$
$$X \equiv c_2 \pmod{n_2}$$
$$\ldots$$
$$X \equiv c_k \pmod{n_k}$$

admite uma solução, que é única módulo $n = n_1 n_2 \ldots n_k$.

DEMONSTRAÇÃO

Imitando a resolução do problema de Sun-Tsu, poderíamos resolver a primeira congruência, depois substituir a solução na segunda e assim sucessivamente. Isso daria lugar a muitos cálculos; seguiremos então um caminho mais simples, exibindo diretamente uma solução.

Consideremos o número $n = n_1 n_2 \ldots n_k$. Para cada índice i definimos então $N_i = \frac{n}{n_i}$. Como N_i é o produto de todos os inteiros $n_1, \ldots, n_k$ — omitido o próprio n_i — e eles são relativamente primos com n_i, segue que $mdc\,(N_i, n_i) = 1$.

Podemos determinar então inteiros r_i, s_i tais que

3.4.5 $$r_i N_i + s_i n_i = 1, \quad 1 \le i \le k .$$

Mostraremos, então, que o número

$$x_0 = c_1 r_1 N_1 + c_2 r_2 N_2 + \ldots + c_k r_k N_k$$

é uma solução do sistema dado.

De fato, observamos inicialmente que se $j \neq i$, então $N_j \equiv 0 \pmod{n_i}$, pois n_i é um dos fatores de N_j, logo, $c_j r_j N_j \equiv 0 \pmod{n_i}$, donde segue que

$$x_0 = c_1 r_1 N_1 + c_2 r_2 N_2 + \ldots + c_k r_k N_k \equiv c_i r_i N_i \pmod{n_i} .$$

Ainda, de 3.4.5 vem que $r_i N_i \equiv 1 \pmod{n_i}$, logo, $x_0 \equiv c_i r_i N_i \equiv c_i \pmod{n_i}$, isto é, x_0 é solução da equação $X \equiv c_i \pmod{n_i}$, para cada i, conseqüentemente, é uma solução do sistema.

Resta unicamente mostrar que toda outra solução é congruente a x_0 módulo n. Isso é fácil.

Se x é outra solução, temos que $x \equiv c_i \pmod{n_i}$, $1 \le i \le k$. Como também $x_0 \equiv c_i \pmod{n_i}$, da transitividade da relação de congruência vem que $x \equiv x_0 \pmod{n_i}$, isto é, $n_i \mid (x - x_0)$, para cada i, $1 \le i \le k$. Ainda, como os inteiros n_i são relativamente primos, temos que $n_1 n_2 \ldots n_k \mid (x - x_0)$, logo, $x \equiv x_0 \pmod{n}$. ■

3.4.6 EXEMPLO

Consideremos o sistema

$$6X \equiv 2 \pmod 4$$
$$2X \equiv 1 \pmod 3$$
$$4X \equiv 2 \pmod 7 .$$

Calculamos

$$d_1 = mdc\,(6, 4) = 2 \qquad (1)6 + (-1)4 = 2$$
$$d_2 = mdc\,(2, 3) = 1 \qquad (-1)2 + (1)3 = 1$$
$$d_3 = mdc\,(4, 7) = 1 \qquad (2)4 + (-1)7 = 1 .$$

Usando a proposição 3.3.9 sabemos que o sistema é equivalente a

$$X \equiv 2 \pmod 2$$
$$X \equiv -1 \pmod 3$$
$$X \equiv 4 \pmod 7 .$$

Consideramos $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ e definimos $N_1 = 21$, $N_2 = 14$, $N_3 = 6$. Escrevemos, então,

$$(1)\ 21 + (-10)\ 2 = 1, \text{ logo, } r_1 = 1 .$$
$$(-1)14 + (5)\ 3 = 1, \text{ logo, } r_2 = -1 .$$
$$(-1)\ 6 + (1)\ 7 = 1, \text{ logo, } r_3 = -1 .$$

Donde

$$x_0 = 2 \cdot 1 \cdot 21 + (-1)\ (-1)\ 14 + 4\ (-1)\ 6 = 32 .$$

Logo, toda outra solução do sistema é da forma

$$x = 32 + 42t\,,\ t \in \mathbb{Z} \text{ (verifique!)}\ .$$

3.4.7 EXEMPLO

Vamos aplicar o método do teorema 3.4.4 ao problema de Sun-Tsu.

O sistema que consideramos é

$$X \equiv 2 \pmod 2$$
$$X \equiv 3 \pmod 5$$
$$X \equiv 2 \pmod 7\ .$$

Determinamos $n = 3{\cdot}5{\cdot}7 = 105$ e $N_1 = 35$, $N_2 = 21$, $N_3 = 15$. Temos:

$$(2)35 + (-23)3 = 1, \text{ logo, } r_1 = 2\ .$$
$$(1)21 + (-4)5 \ = 1, \text{ logo, } r_2 = 1\ .$$
$$(1)15 + (-2)7 \ = 1, \text{ logo, } r_3 = 1\ .$$

Logo, $x_0 = 2{\cdot}(2{\cdot}35) + 3{\cdot}21 + 2{\cdot}15 = 233$ é uma solução. Como 233 dividido por $3{\cdot}5{\cdot}7 = 105$ dá resto 23 , vem que $x_0' = 23$ é também uma solução particular (a menor solução positiva) e podemos expressar a solução geral novamente na forma

$$x = 23 + 105t$$

(note que os números 70, 21 e 15 na expressão de x_0 são os números auxiliares de Sun-Tsu).

Uma observação final: a hipótese do Teorema Chinês do Resto, de que os módulos sejam dois a dois relativamente primos, é necessária para garantir que o sistema tenha solução, quaisquer que sejam os valores dos coeficientes c_1 , c_2 , ... , c_k .

Quando essa hipótese não está verificada, o sistema pode ou não ter soluções e será necessário estudá-lo individualmente, como faremos nos próximos exemplos.

3.4.8 EXEMPLO

Consideremos o sistema

$$X \equiv -1 \pmod 4$$
$$X \equiv 2 \pmod 6\ .$$

Como o sistema não está nas condições do Teorema Chinês do Resto, tentamos a resolução diretamente. As soluções da primeira equação são os inteiros da forma

$$x = -1 + 4Y.$$

Para que sejam soluções também da segunda, deveremos ter

$$-1 + 4Y \equiv 2 \pmod 6\ ,$$

isto é,

$$4Y \equiv 3 \pmod 6\ .$$

Como $2 = mdc\ (4,6)$ não é divisor de 3, essa última equação não tem soluções. Conseqüentemente, não existe nenhum inteiro que seja solução do sistema dado.

3.4.9 EXEMPLO

Consideremos o sistema

$$X \equiv -1 \pmod 4$$
$$X \equiv 3 \pmod 6 .$$

Novamente, as soluções da primeira equação estão dadas por

$$X = -1 + 4Y .$$

Substituindo na segunda, temos

$-1 + 4Y \equiv 3 \pmod 6$, isto é, $4Y \equiv 4 \pmod 6$.

Como $mdc\ (4,6) = 2$, esta equação é equivalente a

$$2Y \equiv 2 \pmod 3 ,$$

cujas soluções são da forma $y = 1 + 3t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Substituindo na expressão de x, temos que todo número da forma $x = -1 + 4(1+3t) = 3 + 12t$, $t \in \mathbb{Z}$, é solução do sistema .

EXERCÍCIOS

1. Resolver os seguintes sistemas de congruências lineares:
   (i) $X \equiv 1 \pmod 3$, $X \equiv 2 \pmod 5$, $X \equiv 3 \pmod 7$.
   (ii) $X \equiv 5 \pmod 6$, $X \equiv 4 \pmod{11}$, $X \equiv 3 \pmod 7$.

2. Determinar o menor inteiro $a > 100$ tal que
   $2 \mid a$, $3 \mid (a+1)$, $4 \mid (a+2)$, $5 \mid (a+3)$, $6 \mid (a+4)$.

3. (i) Determinar três inteiros consecutivos tais que um deles seja divisível por um quadrado perfeito.

   (ii) Determinar três inteiros consecutivos tais que o primeiro seja divisível por um quadrado, o segundo por um cubo e o terceiro por uma quarta potência.

4. (i) Provar que as congruências $X \equiv a \pmod n$ e $X \equiv b \pmod m$ têm uma solução comum se e somente se $mdc\ (m,n) \mid (a - b)$. Provar que a solução é única módulo $mmc\ (m,n)$.

   (ii) Mostrar que o sistema de congruências
   $X \equiv 5 \pmod 6$
   $X \equiv 7 \pmod{15}$
   não tem solução.

5. Um certo inteiro entre 1 e 1 200 tem como restos 1, 2 e 6 quando dividido respectivamente por 9, 11 e 13. Determiná-lo.

6. Se de uma cesta com ovos retiramos duas unidades por vez, sobra um ovo. O mesmo acontece se os ovos são retirados 3 a 3, 4 a 4, 5 a 5 ou 6 a 6 . Mas não resta nenhum ovo se retirarmos 7 unidades por vez. Encontrar o menor número possível de ovos.

7. A Teoria do Biorritmo diz que os estados físico, mental e emocional de uma pessoa oscilam periodicamente, a partir do dia do nascimento, em ciclos de 23 dias, 29 dias e 33 dias, respectiva-

mente. Dado que os dias mais positivos dos ciclos físico, mental e emocional são, respectivamente, o sexto, o sétimo e o oitavo de cada ciclo, nos primeiros dez anos de vida de uma pessoa, quantas vezes os três ciclos estão simultaneamente no ponto máximo?

(Agradecemos ao prof. Fernando Quadros Gouvêa por este problema.)

3.5 OS TEOREMAS DE FERMAT, EULER E WILSON

Dissemos, no começo de 3.2, que Fermat afirmou em 1640 que, se a é um inteiro não divisível por um primo p, então p divide $a^{p-1} - 1$. A seguir daremos uma demonstração desse resultado, formulando-o na linguagem de congruências.

3.5.1 Teorema de Fermat

Sejam p um primo e a um inteiro tal que $p \nmid a$. Então, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Demonstração

Consideremos o conjunto de inteiros

3.5.2 $\{ a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a \}$.

Dados dois elementos quaisquer desse conjunto, eles não são congruentes entre si, módulo p, pois, se $xa \equiv ya \pmod{p}$ com $1 \leq x, y \leq p-1$, como $mdc(a, p) = 1$, cancelando teríamos $x \equiv y \pmod{p}$, o que não acontece, já que os elementos do conjunto

3.5.3 $\{ 1, 2, 3, \ldots, p-1 \}$

não são congruentes entre si, módulo p.

Além disso, nenhum dos elementos de (3.5.2) é congruente a 0 módulo p, já que, se $p \mid xa$, com $1 \leq x \leq p-1$, então $p \mid x$ ou $p \mid a$, o que não acontece.

Segue-se então que os elementos de 3.5.2 são congruentes aos elementos de 3.5.3, numa ordem conveniente.

Temos, então, $p-1$ congruências da forma

$$a \equiv x_1 \pmod{p}$$
$$2a \equiv x_2 \pmod{p}$$
$$\ldots$$
$$(p-1)a \equiv x_{p-1} \pmod{p},$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ são os inteiros $1, 2, \ldots, p-1$, eventualmente em uma outra ordem.

Multiplicando ordenadamente essas congruências, temos

$$a \cdot 2a \cdot \ldots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots (p-1) \pmod{p},$$

ou seja,

$$(p-1)!\, a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Como $mdc((p-1)!, p) = 1$ (verifique!), podemos cancelar e obtemos

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \qquad \blacksquare$$

3.5.4 Corolário

Sejam p um primo e a um inteiro arbitrário. Então, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Demonstração

Se $p \nmid a$, do teorema acima temos que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; multiplicando os membros dessa congruência por a segue que $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Se $p \mid a$, então $p \mid a^p$, e conseqüentemente $p \mid (a^p - a)$; logo, $a^p \equiv a \pmod{p}$. $\blacksquare$

O Teorema de Fermat pode ser usado para provar diversos resultados sobre divisibilidade. Ilustraremos essa afirmação com alguns exemplos.

3.5.5 Exemplo

Seja a um inteiro arbitrário. Provaremos que o algarismo das unidades de a e de a^5 é o mesmo (quando escritos em base 10).

Se r e s indicam esses algarismos, como $a \equiv r \pmod{10}$ e $a^5 \equiv s \pmod{10}$, para concluir a igualdade bastará mostrar que $a^5 \equiv a \pmod{10}$.

Do Teorema de Fermat, temos que $a^5 \equiv a \pmod{5}$, logo, $5 \mid (a^5 - a)$.

Por outro lado, $2 \mid (a^5 - a)$, pois a e a^5 são ambos pares ou ambos ímpares.

Como $mdc\,(2,5) = 1$, temos que $10 \mid (a^5 - a)$, como queríamos demonstrar.

3.5.6 Exemplo

Dados a e b inteiros arbitrários e p um primo, tem-se que

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

De fato, tomando congruências módulo p e usando repetidamente o Teorema de Fermat, temos que

$$(a + b)^p \equiv a + b \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

Em 1747, Euler publicou uma generalização do Teorema de Fermat, que demonstraremos a seguir.

Sugerimos primeiro ao leitor que retorne à demonstração do Teorema de Fermat e se pergunte o que aconteceria se tentássemos refazê-la substituindo o primo p por um inteiro n tal que $mdc\,(n,a) = 1$. Verificará que todos os passos são válidos, exceto o último; se n não é primo, temos que $mdc\,(n,(n-1)!) \neq 1$ e não poderemos cancelar o fator $(n-1)!$ na congruência final!

Porém, pode-se modificar levemente essa prova para obter um resultado igualmente interessante.

Dado n, vamos considerar o conjunto de números compreendidos entre 1 e $(n-1)$ que são relativamente primos com n, que denotamos

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\},$$

isto é, cada x_i é tal que

$$1 \leq x_i \leq n-1 \text{ e } mdc\,(x_i, n) = 1.$$

Por exemplo, se $n = 12$, temos o conjunto

$$A = \{1, 5, 7, 11\},$$

pois todo outro número entre 1 e 11 tem algum fator comum com 12.

Agora, dado outro número a tal que $mdc\,(a,n) = 1$, consideramos o conjunto de números

$$B = \{x_1 a, x_2 a, \ldots, x_t a\}.$$

Como $x_i a$ é relativamente primo com n, o resto da divisão de $x_i a$ por n deve ser um dos elementos de A.

Ainda, como $x_i a \equiv x_j a \pmod{n}$ implica $x_i \equiv x_j \pmod{n}$, já que $mdc\,(a,n) = 1$, temos — como antes — que os elementos de B são respectivamente congruentes aos elementos de A e que elementos diferentes correspondem a elementos diferentes.

Temos novamente as congruências:

$$\begin{aligned} x_1 a &\equiv x_{i_1} \pmod{n} \\ x_2 a &\equiv x_{i_2} \pmod{n} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_t a &\equiv x_{i_t} \pmod{n}, \end{aligned}$$

em que os elementos $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}$ são os de A, eventualmente em outra ordem.

Como antes, multiplicando essas congruências, temos

$$x_1 x_2 \ldots x_t \cdot a^t \equiv x_1 x_2 \ldots x_t \pmod{n}.$$

Como cada x_i , $1 \le i \le t$, é relativamente primo com n , temos que $mdc\ (x_1\ x_2 \ldots\ x_t,\ n) = 1$ e podemos cancelar para obter

$$a^t \equiv 1 \pmod{n} .$$

O leitor deve observar que o número natural t é uma função de n ; mais precisamente:

3.5.7 Definição

Para cada inteiro $n \ge 1$, indicaremos por $\phi(n)$ o número de inteiros positivos, menores ou iguais a n, que são relativamente primos com n . A função assim definida chama-se *função ϕ de Euler*.

Por exemplo, se $n=4$, os inteiros positivos menores ou iguais a 4, relativamente primos com 4, são 1 e 3, assim $\phi(4) = 2$.

Analogamente, temos $\phi(5) = 4$, $\phi(6) = 2$ e, se p é primo, $\phi(p) = p-1$.

Notemos, finalmente, que o conjunto $A = \{x_1 , x_2 , \ldots , x_t\}$ das considerações anteriores está formado precisamente pelos inteiros positivos, menores ou iguais a n, relativamente primos com n ; logo, $t = \phi(n)$.

Com essa notação, provamos o seguinte:

3.5.8 Teorema de Euler

Sejam a e n inteiros com $n \ge 1$, tais que $mdc(a,n) = 1$. Então,

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n} .$$

Note que, se p é primo, $\phi(p) = p-1$; assim, o Teorema de Fermat segue como um caso particular do Teorema de Euler.

Em 1770, um matemático inglês chamado Edward Waring publicou um tratado sobre Teoria dos Números, chamado *Meditationes Algebricae*, no qual incluía um resultado que lhe fora comunicado por um de seus alunos, John Wilson, segundo o qual todo primo p divide o número $(p-1)!+1$. Na época não passava de uma conjetura, que Lagrange demonstrou em 1771.

A seguir, daremos uma prova simples, usando mais uma vez a noção de congruências.

Começamos com um lema.

3.5.9 Lema

Seja $p > 0$ um inteiro primo. Consideremos o conjunto $C = \{1, 2, \ldots , p-1\}$. Para cada elemento $a \in C$ existe um número $b \in C$ tal que $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

Demonstração

Basta observar que isso é um conseqüência imediata do corolário 3.3.5 (verifique!). ■

Como ilustração do lema acima, consideremos o caso em que $p = 11$.

Por exemplo, se $a = 2$, resolvendo a congruência obtemos

$$6 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{p} .$$

De forma análoga, temos:

$1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{11}$.

$2 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{11}$.

$3 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{11}$.

$4 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}$.

$5 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{11}$.

$6 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{11}$.

$7 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{11}$.

$8 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{11}$.

$9 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{11}$.

$10 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{11}$.

Observamos, na tabela anterior, que os únicos elementos que verificam $a^2 \equiv 1 \pmod{11}$ (isto é, tais que $b=a$ no lema anterior) são $a=1$ e $a=10$. Mostraremos que isso é um fato geral.

3.5.10 LEMA

Seja p um inteiro primo. Os únicos elementos do conjunto $C = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ que verificam a equação $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ são 1 e $p-1$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $a \in C$ é tal que $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$, temos que $p \mid (a^2-1)$, isto é, $p \mid (a-1)(a+1)$.

Como p é primo, devemos ter que $p \mid (a-1)$ ou $p \mid (a+1)$.

No primeiro caso, como $1 \leq a \leq p-1$, temos que $2 \leq a+1 \leq p$ e que a única possibilidade é $a+1 = p$, logo $a = p-1$.

De forma análoga, se $p \mid (a-1)$, conclui-se facilmente que a única possibilidade é $a = 1$. ■

3.5.11 TEOREMA DE WILSON

Seja p um inteiro primo. Então

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

DEMONSTRAÇÃO

Se $p = 2$ ou $p = 3$ o enunciado é verdadeiro. Suponhamos $p > 3$.

Conforme os dois lemas anteriores, podemos agrupar os números da seqüência

$$2, 3, \ldots, (p-2)$$

em pares a, a' tais que $a \neq a'$ e $aa' \equiv 1 \pmod{p}$.

Conseqüentemente, fazendo o produto dos elementos dessa seqüência, temos

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots (p-2) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Multiplicando a congruência acima pela congruência $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$, obtemos

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

logo,

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$ ■

EXERCÍCIOS

1. Seja a um inteiro. Provar que:
   (a) $a^{21} \equiv a \pmod{15}$, $a^7 \equiv a \pmod{42}$.
   (b) Se $mdc(a, 35) = 1$, então $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$.
   (c) Se $mdc(a, 42) = 1$, então $3 \cdot 7 \cdot 8 \mid (a^6 - 1)$.

2. (i) Sejam a e b inteiros e p um primo tal que $mdc(a,p) = 1$. Verificar que uma solução da congruência $ax \equiv b \pmod{p}$ é dada por $x = a^{p-2} b$.
   (ii) Resolver as congruências $2x \equiv 1 \pmod{31}$, $6x \equiv 5 \pmod{11}$ e $3x \equiv 17 \pmod{29}$.

3. Sejam p um inteiro e a e b inteiros arbitrários. Provar que, se $a^p \equiv b^p \pmod{p}$, então $a \equiv b \pmod{p}$.

4. Seja $p > 2$ um primo. Provar que $1^p + 2^p + \ldots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$.

5. Seja p um primo.
   (i) Mostre que $x^2 \equiv (p-x)^2 \pmod{p}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.
   (ii) Mostre que estes são os únicos números congruentes módulo p, na seqüência $1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$.

6. Demonstrar o Teorema de Fermat por indução.

7. (a) Mostrar que $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$, $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ (conseqüentemente, dados um inteiro a e um primo p que não divide a, $(p-1)$ não é, em geral, o menor inteiro positivo tal que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Compare com o Teorema de Fermat).

Sejam p um primo e a um inteiro tal que $p \nmid a$. Provar que:

(b) Se $p > 2$, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

(c) O menor inteiro positivo e tal que $a^e \equiv 1 \pmod{p}$ é divisor de $(p-1)$.

(d) Se e é o inteiro acima, então todo inteiro x tal que $a^x \equiv 1 \pmod{p}$ é múltiplo de e.

8. Sejam p, q primos distintos e ímpares tais que $(p-1) \mid (q-1)$. Se $mdc(a, pq) = 1$, provar que $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

9. Seja a um inteiro. Provar que

(i) $a^{37} \equiv a \pmod{1\,729}$.

(ii) $a^{79} \equiv a \pmod{158}$.

10. Sejam a, n inteiros tais que $mdc(a,n) = mdc(a-1, n) = 1$. Provar que $1 + a + \ldots + a^{\phi(n)-1} \equiv 0 \pmod{n}$.

11. Sejam m, n inteiros relativamente primos. Provar que $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$.

12. Seja p um primo distinto de 2 e 5. Provar que p divide infinitos inteiros da seqüência: 1, 11, 111, 1 111, ...

13. Determinar o inteiro r tal que $a = bq + r$, com $0 \le r \le b$, quando

(i) $a = 15!$ e $b = 17$.

(ii) $a = 2(26!)$ e $b = 29$.

14. Reunir os inteiros 2, 3, ... , 21 em pares a, b tais que $ab \equiv 1 \pmod{23}$.

15. Mostrar que $18! \equiv -1 \pmod{437}$.

16. Seja p um inteiro primo. Provar que:

(i) $(p-1)! \equiv (p-1) \bmod (1 + 2 + \ldots + (p-1))$.

(ii) Para todo inteiro a,
$p \mid (a^p + (p-1)!\, a)$ e $p \mid ((p-1)!\, a^p + a)$.

(iii) Se p é ímpar, então $1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

3.6 INTEIROS MÓDULO m

Na sua *Theory of Numbers*, G. B. Matheus escreveu: "A invenção do símbolo ≡ por Gauss nos dá um exemplo impressionante das vantagens que podem derivar-se da notação apropriada, e marca uma época no desenvolvimento da ciência da aritmética".

Como dissemos no início de 3.2, Gauss a introduz por causa da semelhança entre as propriedades da congruência e da igualdade, semelhança que se tornará mais clara no que se segue.

Nesta seção consideraremos as congruências sob um novo ponto de vista que permitirá reinterpretar e talvez compreender melhor os resultados das seções anteriores. Para isso, introduziremos inicialmente um conceito que será fundamental.

Em toda esta seção, m indicará um inteiro maior que 1, dado.

3.6.1 Definição

Seja a um inteiro. Chama-se *classe de congruência de a módulo m* o conjunto formado por todos os inteiros que são congruentes a a módulo m. Denotaremos esse conjunto por $\bar{a}$. Temos, então,

$$\bar{a} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{m} \}.$$

Como $x \equiv a \pmod{m}$ se e somente se x é da forma $x = a + tm$, para algum $t \in \mathbb{Z}$, também podemos escrever

$$\bar{a} = \{ a + tm \mid t \in \mathbb{Z} \}.$$

Mostraremos a seguir que a relação de congruência entre números se traduz em igualdade no sentido estrito entre classes.

3.6.2 Proposição

Sejam a e b inteiros. Então $a \equiv b \pmod{m}$ se e somente se $\bar{a} = \bar{b}$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que $a \equiv b \pmod m$; queremos provar que $\bar{a} = \bar{b}$, isto é, uma igualdade entre conjuntos.

Dado $x \in \bar{a}$, temos, por definição, que $x \equiv a \pmod m$. Da propriedade transitiva de congruência (proposição 3.2.3 parte (iii)) e da hipótese, segue imediatamente que $x \in \bar{b}$. Logo, $\bar{a} \subset \bar{b}$. A inclusão de sentido contrário segue de forma análoga.

Reciprocamente, se $\bar{a} = \bar{b}$, como $a \in \bar{a}$, temos também que $a \in \bar{b}$, logo, $a \equiv b \pmod m$. ■

3.6.3 COROLÁRIO

Sejam a e b inteiros. Se $\bar{a} \neq \bar{b}$, então $\bar{a} \cap \bar{b} = \phi$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \phi$, consideremos um inteiro c que pertença a ambas as classes. Como $c \in \bar{a}$, temos que $c \equiv a \pmod m$ e, de forma análoga, $c \equiv b \pmod m$. Portanto, $a \equiv b \pmod m$ e, da proposição acima, $\bar{a} = \bar{b}$. ■

Note que, por exemplo, para as classes módulo 6, temos que $\bar{0} = \bar{6} = \overline{12} = \overline{-6} = \ldots$ ou $\bar{4} = \overline{10} = \overline{-2}$ etc.

Mais precisamente, dada uma classe $\bar{a}$, para qualquer inteiro x tal que $x \in \bar{a}$, temos que $\bar{x} = \bar{a}$. Por causa disso, cada inteiro pertencente a uma dada classe diz-se um *representante* da classe. Por exemplo, 10 e -2 são representantes da classe $\bar{4}$ módulo 6.

Consideremos um sistema completo de resíduos módulo m, por exemplo, os inteiros $0, 1, \ldots, m-1$ e respectivas classes:

$$\bar{0} = \{0, \pm m, \pm 2m, \ldots\}$$
$$\bar{1} = \{1, 1 \pm m, 1 \pm 2m, \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{m-1} = \{m-1, m-1 \pm m, m-1 \pm 2m, \ldots\}.$$

Conforme as considerações de 3.2 e o corolário anterior, cada inteiro pertence a uma e apenas uma das m classes (do ponto de vista da representação pictórica da congruência da página 105, estamos reu-

nindo em cada classe os inteiros que correspondem a um mesmo ponto de circunferência).

Por exemplo, se $m = 6$, todas as classes possíveis, módulo 6, são as seguintes:

$$\bar{0} = \{0, 6, -6, 12, -12, \ldots\}$$
$$\bar{1} = \{1, 7, -5, 13, -11, \ldots\}$$
$$\bar{2} = \{2, 8, -4, 14, -10, \ldots\}$$
$$\bar{3} = \{3, 9, -3, 15, -9, \ldots\}$$
$$\bar{4} = \{4, 10, -2, 16, -8, \ldots\}$$
$$\bar{5} = \{5, 11, -1, 17, -7, \ldots\}.$$

Denotaremos pelo símbolo $\mathbb{Z}_m$ o conjunto das classes de congruências módulo m e chamá-lo-emos conjunto dos *inteiros módulo m*.

Assim, $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

Note que, por exemplo, $\bar{0} = \bar{6}$, $\bar{1} = \bar{7}$, $\bar{2} = \overline{14}$, $\bar{3} = \overline{-3}$, $\bar{4} = \overline{-2}$, $\bar{5} = \overline{-1}$ e também podemos escrever

$$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{6}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{-3}, \overline{-2}, \overline{-1}\}.$$

Em geral, se $a_1, a_2, \ldots, a_m$ é um sistema completo de resíduos módulo m, temos que

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m\}.$$

Tomando o sistema de resíduos mais simples, podemos escrever

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

Note que, conforme as observações acima, o conjunto $\mathbb{Z}_m$ tem precisamente m elementos.

Agora gostaríamos de introduzir operações de soma e produto em $\mathbb{Z}_m$ e estudar suas propriedades. Existe uma forma natural de fazê-lo. Por exemplo, para somar e multiplicar $\bar{3}$ e $\bar{5}$ em $\mathbb{Z}_6$,

faríamos

$$\bar{3} + \bar{5} = \bar{8} = \bar{2},$$
$$\bar{3} \times \bar{5} = \overline{15} = \bar{3}.$$

Mais explicitamente, definimos soma e produto em $\mathbb{Z}_m$ por

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b},$$
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}.$$

Quer dizer, para efetuar a soma de duas classes módulo m, tomamos representantes (quaisquer) a e b dessas classes, fazemos a soma $a+b$ em $\mathbb{Z}$ e consideramos como resultado da soma a classe de $a+b$ módulo m. A operação de produto se faz de forma análoga.

Surge agora uma pergunta natural: será que o resultado das operações não depende dos representantes escolhidos? Voltando ao exemplo de $\mathbb{Z}_6$, para somar $\bar{3} + \bar{5}$, poderíamos tomar 63 como um representante de $\bar{3}$ e 23 como representante de $\bar{5}$. Será que $\overline{63} + \overline{23} = \overline{86}$ é o mesmo resultado que aquele obtido acima, $\bar{3} + \bar{5} = \bar{2}$?

Como $86 \equiv 2 (\text{mod } 6)$, felizmente o resultado é o mesmo. O lema abaixo mostra que isso não é uma coincidência.

3.6.4 Lema

Sejam a, a', b e b' inteiros tais que $\bar{a} = \overline{a'}$ e $\bar{b} = \overline{b'}$. Então, $\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$ e $\overline{ab} = \overline{a'b'}$.

Demonstração

É uma conseqüência imediata das partes (iv) e (vi) da proposição 3.2.3 e da proposição 3.6.2. ■

EXERCÍCIO

1. Construir as tabelas de soma e produto de $\mathbb{Z}_5$ e $\mathbb{Z}_6$.

Temos construído, até aqui, um conjunto finito — $\mathbb{Z}_m$ — e nele definimos duas operações. Cabe agora nos perguntarmos se elas gozam de propriedades semelhantes àquelas da soma e do produto entre números inteiros. Como veremos, a resposta será afirmativa na maioria dos casos, embora com notáveis exceções. Começaremos com as propriedades da soma.

3.6.5 Proposição

Em $\mathbb{Z}_m$ valem as seguintes propriedades:

P.1 Propriedade Associativa: *Para toda terna $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ de inteiros módulo m, tem-se que*

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$

P.2 Existência do Neutro: *Existe um único elemento em $\mathbb{Z}_m$, que é precisamente $\bar{0}$, a classe do elemento 0, tal que*

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \text{ para todo } \bar{a} \in \mathbb{Z}_m.$$

P.3 Existência do Oposto: *Para cada inteiro módulo m, $\bar{a}$, existe um único elemento em $\mathbb{Z}_m$, que chamaremos oposto de $\bar{a}$ e indicaremos por $-\bar{a}$, tal que*

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}.$$

P.4 Propriedade Comutativa: *Para todo par $\bar{a}$, $\bar{b}$ de elementos de $\mathbb{Z}_m$, tem-se que*

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

Demonstração

As demonstrações são feitas apoiando-se nos axiomas para as operações com números inteiros. A título de ilustração, provaremos P.1 e P.3.

Usando repetidamente a definição de soma em $\mathbb{Z}_m$, temos

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{(b+c)} = \overline{a + (b+c)} \ .$$

Agora, como vale a associativa da soma entre números inteiros (axioma A.1), temos que

$$a + (b + c) = (a + b) + c \ ,$$

logo,

$$\overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c} \ ,$$

donde,

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} \ .$$

Na última seqüência de igualdades usamos, novamente, apenas a definição de soma em $\mathbb{Z}_m$.

Para demonstrar P.3, dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, basta tomar a classe de $-a$ e verificar que

$$\bar{a} + (\overline{-a}) = \overline{a + (-a)} = \bar{0} \ .$$

Para provar a unicidade, suponhamos que $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ também verifica $\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ ou, usando da comutatividade, $\bar{b} + \bar{a} = \bar{0}$. Temos, então,

$$\bar{b} = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b} + (\bar{a} + (\overline{-a})) = (\bar{b} + \bar{a}) + (\overline{-a}) = \bar{0} + (\overline{-a}) = (\overline{-a}). \ \blacksquare$$

A verificação de P.2 é imediata. Note, porém, que a classe do elemento neutro é formada também pelos múltiplos de m. Temos, assim, que $\bar{0} = \overline{m}$.

Da demonstração de P.3 vem que o oposto de $\bar{a}$ em $\mathbb{Z}_m$ é a classe de $-a$. Em símbolos, $\overline{-a} = (\overline{-a})$. É claro que, se explicitamos $\mathbb{Z}_m$ na forma $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ e a é um dos representantes utilizados, então $-a$ não é um deles; para obter o menor representante positivo da classe de $-a$, fazemos $\overline{-a} = \bar{0} - \bar{a} = \overline{m} - \bar{a} = \overline{m - a}$. Por exemplo, em $\mathbb{Z}_5$ temos que $-\bar{2} = (\overline{5 - 2}) = \bar{3}$ (de fato, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} = \bar{0}$).

Listamos na próxima proposição as propriedades do produto e a propriedade distributiva, que relaciona ambas operações.

3.6.6 PROPOSIÇÃO

Em $\mathbb{Z}_m$ valem as seguintes propriedades:

P.5 Propriedade Associativa: *Para toda terna $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ de inteiros módulo m, tem-se que*

$$\bar{a}\,(\bar{b}\,\bar{c}) = (\bar{a}\,\bar{b})\,\bar{c} \ .$$

P.6 Existência do Neutro: *Existe um único elemento em $\mathbb{Z}_m$, que é precisamente* 1, *tal que*

$$\bar{a} \,.\, \bar{1} = \bar{a} \ .$$

P.8 Propriedade Comutativa: *Para todo par $\bar{a}, \bar{b}$ de elementos em $\mathbb{Z}_m$, tem-se que*

$$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a} \ .$$

P.9 Propriedade Distributiva: *Para toda terna $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ de elementos de $\mathbb{Z}_m$, tem-se que*

$$\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c} \ .$$

DEMONSTRAÇÃO

Tal como na proposição anterior, as demonstrações — que deixamos como exercício ao leitor — são feitas reduzindo-as ao caso dos inteiros. ■

O leitor deve ter notado que não listamos uma propriedade P.7 que, no paralelismo que estamos fazendo com as propriedades das operações nos inteiros, corresponderia à propriedade cancelativa. Isso

ocorreu porque ela não é válida em geral. Com efeito, em $\mathbb{Z}_6$ temos que $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$, $\bar{3} \cdot \bar{4} = \overline{12} = \bar{0}$, logo, $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{3} \cdot \bar{4}$, porém $\bar{2} \neq \bar{4}$.

No contra-exemplo que exibimos acima temos dois elementos não-nulos de $\mathbb{Z}_6$ cujo produto é zero, situação que demonstramos não acontecer em $\mathbb{Z}$ (veja a proposição 1.2.3). Para estudar melhor a propriedade cancelativa, começaremos formalizando esse conceito.

3.6.7 Definição

Um elemento não-nulo $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ diz-se um *divisor de zero* se existe $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, também não-nulo, tal que $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{0}$.

Agora, determinaremos quais são os divisores de zero em $\mathbb{Z}_m$.

3.6.8 Lema

Um elemento não-nulo $\bar{a}$ de $\mathbb{Z}_m$ é divisor de zero se e somente se $mdc\,(a, m) \neq 1$.

Demonstração

Seja $\bar{a}$ um divisor de zero e $\bar{b} \neq \bar{0}$ um elemento de $\mathbb{Z}_m$ tal que $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{0}$. Como $\bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab} = \bar{0}$, temos que $ab \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m)$, isto é, $m \mid ab$. Supondo por absurdo que $mdc\,(a, m) = 1$, pelo Teorema de Euclides (2.3.7) vem que $m \mid b$, logo, $\bar{b} = \bar{0}$, uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que $mdc\,(a, m) = d > 1$. Vamos determinar um elemento $\bar{b} \neq \bar{0}$ em $\mathbb{Z}_m$ tal que $\bar{a}\bar{b} = 0$.

Podemos escrever $a = a_1 \cdot d$ e $m = m_1 \cdot d$, em que $0 < m_1 < m$ (já que $d > 1$), logo, $\overline{m_1} \neq \bar{0}$.

Agora, temos que

$$a \cdot m_1 = a \cdot d \cdot m_1 = a_1 \cdot m \ .$$

Logo, em $\mathbb{Z}_m$ temos

$$\overline{am_1} = \overline{a_1 \cdot m} = \bar{0}\,.$$

Assim, basta tomar $b = m_1$. ■

Como conseqüência imediata desse lema temos:

3.6.9 Corolário

Seja $p > 1$ um inteiro primo. Então, $\mathbb{Z}_p$ não contém divisores de zero.

Na verdade, vale também a recíproca.

3.6.10 Lema

Se $\mathbb{Z}_m$ não contém divisores de zero, então m é um inteiro primo.

Demonstração

Suponhamos, por absurdo, que m seja composto, isto é, da forma $m = r \cdot s$ com $1 < r < m$, $1 < s < m$. Temos, então, que

$$\bar{0} = \overline{m} = \bar{r} \cdot \bar{s}\,,$$

em que $\bar{r} \neq 0$ e $\bar{s} \neq 0$, uma contradição. ■

O leitor pode tentar uma demonstração direta do lema acima, usando a caracterização de números primos dada no teorema 2.6.4.

EXERCÍCIO

2. Em $\mathbb{Z}_{20}$, determinar:
   (i) Os menores representantes positivos de $(\overline{-10})$ e $(\overline{-6})$.
   (ii) Todos os divisores de zero.

3.6.11 Proposição

A propriedade cancelativa do produto vale em $\mathbb{Z}_m$ se e somente se m é primo.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos inicialmente que m seja primo, e sejam $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ elementos de $\mathbb{Z}_m$, com $\bar{a} \neq 0$, tais que

$$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{a}\,\bar{c}\ .$$

Então $\bar{a}\,(\bar{b} - \bar{c}) = 0$.

Como $\bar{a} \neq 0$ e $\mathbb{Z}_m$ não tem divisores de zero, deve ser $\bar{b} - \bar{c} = 0$, donde $\bar{b} = \bar{c}$.

Suponhamos que vale a propriedade cancelativa; mostraremos que nesse caso $\mathbb{Z}_m$ não contém divisores de zero. A tese seguirá então do lema anterior.

Sejam $\bar{a}, \bar{b}$ de $\mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$. Se $\bar{a} \neq \bar{0}$, escrevemos $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\,\bar{0}$ e, como podemos cancelar, temos que $\bar{b} = 0$. ■

Das propriedades até aqui estudadas, temos ainda a seguinte informação sobre as operações de $\mathbb{Z}_m$: todas as propriedade de $\mathbb{Z}$ que foram demonstradas a partir dos axiomas A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.8, A.9 valem, com as devidas adaptações, em $\mathbb{Z}_m$. Por exemplo, o leitor poderá demonstrar como exercício a propriedade cancelativa da adição, a regra dos sinais etc.

Para continuar nosso estudo comparativo de $\mathbb{Z}_m$ com $\mathbb{Z}$, introduzimos ainda outro conceito.

3.6.12 DEFINIÇÃO

Um elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ diz-se inversível se existe $\overline{a'} \in \mathbb{Z}_m$ tal que $\bar{a}\,\overline{a'} = \bar{1}$. Um elemento $\overline{a'}$ nessas condições diz-se um *inverso* de $\bar{a}$.

No exercício 7 de 1.2, observamos que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.

Obviamente, $\bar{1}$ e $(\overline{-1})$ são sempre inversíveis em $\mathbb{Z}_m$. Porém, há outros exemplos.

Em $\mathbb{Z}_5$ temos que $\bar{2} \cdot \bar{3} = \overline{6} = \bar{1}$ e $\bar{4} \cdot \bar{4} = \overline{16} = \bar{1}$, logo, $\bar{2}, \bar{3}$ e $\bar{4}$ são também inversíveis de $\mathbb{Z}_5$; $\bar{2}$ é o inverso de $\bar{3}$ e, reciprocamente, $\bar{4}$ é o seu próprio inverso.

Em $\mathbb{Z}_6$ temos que $\bar{5} \cdot \bar{5} = \overline{25} = \bar{1}$; logo, $\bar{5}$ é um inversível de $\mathbb{Z}_6$.

Por outro lado, é claro que $\bar{0}$ não é inversível em $\mathbb{Z}_m$, para nenhum valor de m. De fato, para qualquer $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ temos que $\bar{0} \cdot \bar{a} = \bar{0} \neq \bar{1}$.

EXERCÍCIOS

3. Provar que, se $\bar{a}$ é inversível em $\mathbb{Z}_m$, então seu inverso é único.

4. Determinar os elementos inversíveis de $\mathbb{Z}_8$ e seus inversos.

É fácil determinar quais são os elementos inversíveis de $\mathbb{Z}_m$, em geral:

3.6.13 PROPOSIÇÃO

Seja $\bar{a}$ um elemento não-nulo de $\mathbb{Z}_m$. Então, $\bar{a}$ é inversível se e somente se $mdc\,(a, m) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que $mdc\,(a, m) = 1$. Pelo Teorema de Bézout (2.3.4), temos que existem inteiros r e s tais que $ar + ms = 1$.

Tomando classes temos que

$$\bar{1} = \overline{ar + ms} = \overline{ar} + \overline{ms} = \bar{a}\,\bar{r} + \bar{m}\,\bar{s} = \bar{a}\,\bar{r} + \bar{0}\,\bar{s} = \bar{a} \cdot \bar{r}\ .$$

Logo, $\bar{r}$ é o inverso de $\bar{a}$.

Reciprocamente, se $mdc\,(a, m) \neq 1$, então $\bar{a}$ é divisor de zero e existe $\bar{b} \neq 0$ tal que $\bar{a}\bar{b} = 0$. Mostraremos que, nesse caso, $\bar{a}$ não pode ser inversível. Com efeito, suponhamos que existe $\overline{a'}$ tal que $\overline{aa'} = \bar{1}$. Teríamos, então,

$$\bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{1} = \bar{b}\,(\overline{aa'}) = (\bar{a}\,\bar{b})\,\overline{a'} = \bar{0} \cdot \overline{a'} = \bar{0}\ ,$$

uma contradição. ■

A demonstração da proposição anterior também sugere um método para determinar o inverso de um dado elemento, como ficará claro no exemplo abaixo.

3.6.14 Exemplo

Vamos calcular o inverso de $\bar{4}$ em $\mathbb{Z}_{37}$. Pelo Algoritmo de Euclides, determinamos os inteiros de que fala o Teorema de Bézout:

$$-9 \cdot (4) + 1 \cdot (37) = 1 .$$

Logo, em $\mathbb{Z}_{37}$ temos que $(-\bar{9}) \cdot \bar{4} = \bar{1}$; isto é, o inverso de $\bar{4}$ é $-\bar{9} = \overline{28}$.

Uma conseqüência imediata da proposição anterior é a seguinte:

3.6.15 Corolário

Seja $p > 0$ um inteiro primo. Então, todo elemento não-nulo de $\mathbb{Z}_p$ é inversível.

EXERCÍCIOS

5 Determinar os divisores de zero e os elementos inversíveis de $\mathbb{Z}_{24}$. Para cada elemento $\bar{a}$ que é divisor de zero, determinar outro $\bar{b} \neq \bar{0}$ tal que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$; para cada elemento inversível determinar seu inverso.

6. Provar que o número de elementos inversíveis de $\mathbb{Z}_m$ é $\phi(m)$, em que ϕ indica a função de Euler.

7. Seja $\bar{a}$ um elemento não-nulo de $\mathbb{Z}_m$. Provar que $\bar{a}$ é um divisor de zero ou um elemento inversível.

Para concluir reinterpretaremos, na linguagem $\mathbb{Z}_m$, alguns resultados das seções anteriores. Por exemplo, o corolário 3.3.5 pode-se enunciar agora na forma:

3.6.16 Teorema

Seja a um inteiro tal que $mdc\,(a,m) = 1$, e seja b um outro inteiro. Então, a equação $\bar{a}X = \bar{b}$ tem uma única solução em $\mathbb{Z}_m$.

Demonstração

É claro que basta interpretar o resultado de 14.5. Daremos, porém, uma prova independente para ilustrar como podem ser usados os resultados desta seção.

Como $mdc\,(a,m) = 1$, existe a' tal que $\bar{a}\,\overline{a'} = \bar{1}$. Então, $\bar{x} = \overline{a'}\bar{b}$ é solução, pois substituindo na equação temos:

$$\bar{a}\,\bar{x} = \bar{a}\,\overline{a'}\bar{b} = \bar{1}\bar{b} = \bar{b} .$$

Ainda, se $\bar{y}$ é outra solução, temos

$$\bar{a}\,\bar{y} = \bar{b}$$

e, multiplicando ambos os membros por $\overline{a'}$, vem

$$\overline{a'}\,\bar{a}\,\bar{y} = \overline{a'}\,\bar{b} ,$$

isto é,

$$\bar{y} = \overline{a'}\,\bar{b} = \bar{x} .$$ ■

Nessa linha, podemos enunciar, reinterpretando:

3.6.17 Teorema de Fermat

Sejam p um primo positivo e a um inteiro tal que $\bar{a} \neq \bar{0}$ e $\mathbb{Z}_p$. Então $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$.

3.6.18 Teorema de Euler

Se $\bar{a}$ não é um divisor de zero em $\mathbb{Z}_m$, então $\bar{a}^{\phi(m)} = \bar{1}$.

Note que esse resultado afirma, em particular, que o inverso de $\bar{a}$ pode ser obtido como uma potência de $\bar{a}$, já que $\bar{a} \cdot \bar{a}^{\phi(m)-1} = \bar{1}$, donde $\bar{a}^{\phi(m)-1}$ é o inverso de $\bar{a}$.

Finalmente, gostaríamos de observar que não é possível introduzir em $\mathbb{Z}_m$ uma relação de ordem total compatível com as operações, isto é, uma relação que verifique axiomas análogos aos A.10, A.11, A.12, A.13, A.14, e A.15. Veja a respeito os exercícios 13 e 14.

EXERCÍCIOS

8. Sejam $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ elementos de $\mathbb{Z}_m$, com $mdc(c, m) = 1$. Provar que, se $\bar{a}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}$, então $\bar{a} = \bar{b}$.

9. Sejam p um primo positivo e $\bar{a}$ um elemento de $\mathbb{Z}_p$. Provar que $\bar{a}^p = \bar{a}$.

10. Sejam p um primo positivo e $\bar{a}, \bar{b}$ elementos de $\mathbb{Z}_p$. Provar que $(\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a}^p + \bar{a}^p$.

11. Seja p um primo positivo. Determinar as soluções da equação $X^2 = \bar{1}$ em $\mathbb{Z}_p$.

12. Seja p um primo positivo. Provar que, em $\mathbb{Z}_p$, tem-se $(\overline{p-1})! = \overline{-1}$.

13. Suponhamos que exista em $\mathbb{Z}_m$ uma relação $\leq$ verificando os axiomas A.10, A.11, A.12, A.13, A.14, e A.15. Provar que, se $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ são elementos de $\mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{a} < \bar{b}$, então $\bar{a} + \bar{c} < \bar{b} + \bar{c}$.

14. Mostrar que não existe uma relação em $\mathbb{Z}_m$ verificando axiomas análogos aos A.10, A.11, A.12, A.13, A.14 e A.15 (sugestão: supor que existe uma relação nessas condições. Então, $\bar{0} < \bar{1}$ ou $\bar{1} < \bar{0}$. Mostrar que ambas as afirmações levam a uma contradição.)

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

15. Determinar os divisores de zero e os elementos inversíveis de $\mathbb{Z}_{26}$ e $\mathbb{Z}_{19}$.

16. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{Z}_m$:

    (i) $\bar{3}X + \bar{2} = \bar{6}X + \bar{7}$, $m = 8$.
    (ii) $(\bar{2}X + \bar{3})^5 + (\bar{3}X + \bar{2})^5 + \bar{5}X = \bar{0}$, $m = 5$.
    (iii) $\bar{4}X - \bar{7} + \bar{6}X + \bar{2} = \bar{3}X + \bar{5}X$, $m = 12$.

17. Resolver o sistema de equações abaixo em $\mathbb{Z}_{14}$:

    $\bar{2}X - \bar{3}Y = \bar{2}$
    $\bar{3}X + \bar{2}Y = \bar{3}$.

18. Se $\overline{3\,640}$ for inversível em $\mathbb{Z}_{7\,297}$, determinar seu inverso.

19. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{Z}_m$:

    (i) $X^{21} - X = \bar{0}$, $m = 5$.
    (ii) $X^{12} - \bar{1} = \bar{0}$, $m = 5$.
    (iii) $X^7 - X = \bar{0}$, $m = 4$.

20. Seja p um primo positivo. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{Z}_p$:

    (i) $X^p = \bar{4}$.
    (ii) $X^{2p} - X^p = \bar{6}$.
    (iii) $X^{4p-4} - X^{2p-2} = \bar{5}$.

4

NÚMEROS RACIONAIS

4.1 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

No decorrer destas notas, temos estudado diversas relações binárias entre números inteiros, tais como *menor ou igual, divide* e *congruente módulo m*.

Relações desse estilo aparecem muito freqüentemente na matemática e inclusive fora dela. As relações *é filho de* ou *é irmão de* são exemplos de relações entre entes não-matemáticos.

Para trabalhar formalmente, dado um conjunto arbitrário A, indicaremos por R uma relação em A e, para indicar que dois elementos $a, b \in A$ estão R-relacionados, escreveremos aRb.

Uma relação R tal que, para todo $a \in A$ vale aRa, diz-se *reflexiva*. As três relações mencionadas acima são exemplos de relações reflexivas. Já *menor que* não é uma relação reflexiva.

Uma relação R diz-se uma *relação simétrica* se, para todo par de elementos a, b de A, tem-se que: se aRb, então também vale bRa. O leitor pode verificar que as relações *menor ou igual* e *divide* não são simétricas, enquanto a *congruência módulo m* o é.

Finalmente, uma relação R diz-se *transitiva* se, para toda terna de elementos a, b, c de A, tem-se que: se aRb e bRc, então, aRc.

Um caso particularmente importante em matemática é o daquelas relações que verificam simultaneamente as três propriedades anteriores.

4.1.1 Definição

Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma *relação de equivalência* se ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Utilizando – como é freqüentemente – o símbolo $\equiv$ para indicar uma relação de equivalência, podemos refrasear a definição anterior da seguinte forma:

Uma relação binária num conjunto A, que indicaremos por $\equiv$ diz-se uma *relação de equivalência* se, para quaisquer a, b, c em A, tem-se que:

(i) $a \equiv a$.
(ii) $a \equiv b$ implica $b \equiv a$.
(ii) $a \equiv b$ e $b \equiv c$ implica $a \equiv c$.

Damos a seguir uma lista de exemplos que ilustram essa noção em diversos contextos.

4.1.2 Exemplo

No conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, definimos a seguinte relação: dados a, b em $\mathbb{Z}$, diremos que $a \sim b$ se a soma $a + b$ é um número par.

Vamos verificar explicitamente que essa relação é de equivalência.

(i) Para todo inteiro a, temos que $a + a = 2a$ é um inteiro par, logo, $a \sim a$.
(ii) Se $a \sim b$, isto é, se $a + b$ é par, então $b + a = a + b$ também é par, portanto, $b \sim a$.

(iii) Se $a \sim b$ e $b \sim c$, temos que $a + b$ e $b + c$ são números pares, isto é, $a + b = 2k$, $b + c = 2l$, logo
$(a + b) + (b + c) = 2k + 2l$,
donde $a + c = 2k + 2l - 2b$ é um número par,
portanto, $a \sim c$.

4.1.3 Exemplo

No conjunto $\mathbb{Z}$, a relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência. As três propriedades foram demonstradas em (i), (ii) e (iii) da proposição 3.2.3.

Como exercício, o leitor pode provar que, dados a, b em $\mathbb{Z}$, então $a \sim b$, como foi definido no exemplo anterior, se e somente se $a \equiv b \pmod 2$, o que dá outra demonstração de que $\sim$ é relação de equivalência.

4.1.4 Exemplo

No conjunto dos pontos de um plano π, fixamos um ponto 0. Dados dois pontos p, q de π, dizemos que $p \equiv q$ se e somente se distância $\overline{op}$ é igual à distância $\overline{oq}$. Isso define uma relação de equivalência em π (verifique!) .

4.1.5 Exemplo

Consideremos o conjunto T de todas as retas de um plano π. Dadas R e S em R, definimos $R \parallel S$ se e somente se $R = S$ ou $R \cap S = \phi$ (essa é a definição de paralelismo usual). Verifique que essa relação é de equivalência em T .

4.1.6 Exemplo

Num plano π fixamos uma reta R. Dados dois pontos p, q de π, indicamos por $R(p, q)$ a reta que passa por p e q. No conjunto dos pontos de π, definimos $p \sim q$ se e somente se $R(p, q) \parallel R$. Isso define uma relação de equivalência em π (verifique!).

Existem muitíssimas outras relações de equivalência que o leitor

irá encontrando à medida que progredir no seu estudo da matemática.

Por causa da propriedade transitiva, dada uma relação de equivalência $\equiv$ num conjunto A, todos os elementos equivalentes a um dado elemento $a \in A$ são equivalentes entre si. Por isso, é razoável tentar agrupá-los em subconjuntos.

4.1.7 Definição

Sejam A um conjunto e $\equiv$ uma relação de equivalência em A. Para cada elemento $a \in A$, chama-se *classe de equivalência* de a o conjunto

$$C(a) = \{x \in A \mid x \equiv a\}.$$

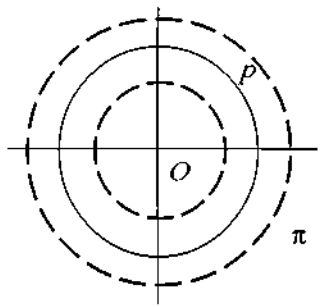
Vejamos rapidamente quais são as classes de equivalência nos exemplos citados.

No exemplo 4.1.2, se um número é par, todos os equivalentes a ele são pares; da mesma forma, se é ímpar, todos os equivalentes a ele são ímpares. Assim, só existem duas classes, uma formada por todos os números pares e outra por todos os ímpares.

No exemplo 4.1.3, as classes de equivalência são as classes de congruência $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., $\overline{m-1}$, estudadas na seção anterior (3.6).

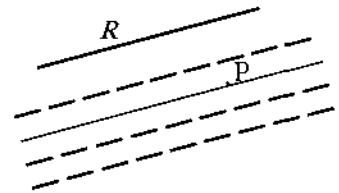
Os próximos exemplos são levemente mais interessantes, pois, sendo de natureza geométrica, é possível visualizar as classes.

Em 4.1.4 os pontos equivalentes a um dado ponto p são todos os pontos da circunferência com centro O que passa por p. Assim, nesse caso, existem infinitas classes de equivalência em π: todas as circunferências com centro O.



Em 4.1.5 vemos que cada classe está formada por todas as retas paralelas a uma dada. Em certo sentido, poderíamos dizer que há tantas classes em T quantas são as "direções" possíveis.

Finalmente, em 4.1.6, fixado um ponto p, os pontos de π equivalentes a p são todos os pontos da reta que passa por p e é paralela a R.



Assim, novamente existem infinitas classes de equivalência em π: todas as retas de π paralelas a R.

É claro que, dados $a, b \in A$, temos que $C(a) = C(b)$ se e somente se $a \equiv b$. Por outro lado, é fácil ver que, se $a \not\equiv b$, então $C(a) \cap C(b) = \phi$ (basta imitar as demonstrações da proposição 3.6.2 e do corolário 3.6.3 adaptando-as a esta situação).

Por causa disso, cada elemento b de $C(a)$ diz-se um *representante* da classe $C(a)$ (isto é, b é um representante de $C(a)$ se e somente se $b \equiv a$; note que já usamos esta terminologia para as classes de congruência).

Enunciaremos essas observações sob a forma de um pequeno teorema.

4.1.8 Teorema

As diferentes classes de equivalência de uma relação de equivalência num conjunto A fornecem uma decomposição de A em subconjuntos mutuamente disjuntos, não-vazios, cuja união é o conjunto A todo.

Reciprocamente, dada uma decomposição de A como união de subconjuntos mutuamente disjuntos, não-vazios, podemos definir uma relação de equivalência em A cujas classes sejam, precisamente, os subconjuntos dados.

Demonstração

A primeira parte segue diretamente das observações anteriores. Para demonstrar a recíproca, basta definir uma relação de equivalência em A da seguinte forma: dados a, b em A, dizemos que $a \equiv b$ se e somente se a e b pertencem a um mesmo subconjunto.

Deixamos a cargo do leitor mostrar que essa relação é de equivalência e está nas condições do enunciado. ■

Chamamos *conjunto quociente* de A por $\equiv$ o conjunto formado por todas as classes de equivalência determinadas pela relação $\equiv$ no conjunto A. Em símbolos,

$$A/\equiv = \{ C(a) \mid a \in A \}.$$

Por exemplo, $\mathbb{Z}_m$ é o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de *congruência módulo* m.

EXERCÍCIOS

1. Sejam A, B conjuntos e $f: A \to B$ uma função. Definimos uma relação em A da seguinte forma: dados a, a' em A, dizemos que aRa' se e somente se $f(a) = f(a')$. Provar que R é uma relação de equivalência.

2. Seja R uma relação em um conjunto M, verificando:

   (i) Se aRb, então bRa.
   (ii) Se aRb e bRc, então aRc.
   (iii) Para todo $a \in M$, existe $b \in M$ tal que aRb.

   Provar que R é uma relação de equivalência.

4.2 CONSTRUÇÃO DE Q

No Capítulo 2, observamos que, se a e b são números inteiros com $b \neq 0$ a equação $bX = a$ nem sempre tem solução em $\mathbb{Z}$; isso acontece se e somente se $b \mid a$.

Essa é uma limitação importante do conjunto dos números inteiros e, neste capítulo, dedicar-nos-emos à construção de um novo conjunto de números em que toda equação da forma acima tenha solução.

A necessidade de novos números foi sentida desde muito cedo na história da matemática, sugerida naturalmente por problemas práticos.

Os egípcios já empregavam frações, embora possuíssem apenas notações para aquelas que têm numerador 1. As outras eram expressas como soma de frações dessa forma. Assim, por exemplo, no papiro *Rhind**, achamos as frações 2/5 e 2/13 expressas a partir das seguintes decomposições:

$$2/5 = 1/3 + 1/15,$$
$$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104.$$

Entre os babilônios, que já sabiam resolver equações de primeiro e segundo grau, também era comum o uso de frações e, em tabuletas de argila provenientes do período babilônico antigo (1900 a 1600 a.C.), achamos tabelas de números incluindo frações.

Entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares desde as épocas dos pitagóricos e, no livro V dos *Elementos* de Euclides, achamos a Teoria das Proporções de Eudoxo de Cnido (aprox. 408 a 355 a.C.) que não-somente sugere a definição atual de igualdade de frações ($a/b = c/d$ se e somente se $ad = bc$), como é muito próxima às definições de número real surgidas no século passado.

O leitor sabe, dos tempos do curso secundário, que a solução de equação do tipo $bX=a$, com $b \neq 0$, indica-se pela fração a/b, e um número dessa forma chama-se um número racional. Nosso intuito nesta seção é definir cuidadosamente essa noção a partir da noção de inteiro.

Lembramos que uma mesma fração pode-se escrever de diversas formas. Assim, por exemplo, sabemos que $3/6 = 5/10 = 1/2$, quer dizer, um mesmo racional pode ser representado por diversos pares de números. No caso do exemplo, diríamos que os pares (3, 6), (5, 10) e (1, 2) são todos representantes do mesmo racional.

Isso sugere que podemos nos apoiar na noção de relação de equivalência, introduzida na seção anterior 4.1, para elaborar nossa teoria.

(*) Uma das melhores fontes de nosso conhecimento atual sobre a matemática egípcia. Comprado em 1848 à beira do Nilo por Henry Rhind, de quem leva o nome, trata-se de um documento feito em 1650 a.C. por um escriba de nome Ahmes, que afirma tê-lo copiado de um original de aproximadamente 2000 a.C. (por essa razão também é conhecido como papiro Ahmes).

Indicaremos por $\mathbb{Z}^*$ o conjunto de todos os inteiros exceto o número 0 e começaremos por considerar o conjunto

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\},$$

isto é, o conjunto de todos os pares ordenados de números inteiros com segunda componente não-nula.

Neste conjunto introduzimos uma relação, que indicaremos por $\equiv$, do seguinte modo:

4.2.1 Definição

Dados dois elementos (a, b) e (c, d) do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, diremos que $(a, b) \equiv (c, d)$ se e somente se $ad = bc$.

Por exemplo, notamos que $(3, 6) \equiv (5, 10)$, pois $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$ e, da mesma forma, $(5, 10) \equiv (1, 2)$, já que $5 \cdot 2 = 10 \cdot 1$.

4.2.2 Proposição

A relação definida acima é uma relação de equivalência.

Demonstração

Precisamos demonstrar que a nossa relação verifica as três condições da definição 4.1.1:

(i) Para todo par $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que $(a, b) \equiv (a, b)$, já que $ab = ba$.

(ii) Sejam agora (a,b), (c, d) pares tais que $(a, b) \equiv (c, d)$. Temos, então, que $ad = bc$, donde também $cb = da$ (seria interessante, como exercício para o leitor, identificar quais os axiomas de $\mathbb{Z}$ que justificam essa passagem). Da última igualdade e da definição acima, vem que $(c, d) \equiv (a, b)$.

(iii) Sejam agora (a, b), (c, d) e (e, f) pares tais que $(a, b) \equiv (c, d)$ e $(c, d) \equiv (e, f)$. Então, temos que $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando a primeira igualdade por f e a segunda por b obtemos:

$$adf = bcf,$$
$$bcf = bde,$$

donde

$$abf = bde.$$

Como $d \neq 0$ (pois é a segunda componente de um par), podemos cancelar e obter $af = de$, o que implica que $(a, b) \equiv (e, f)$, como queríamos demonstrar. ■

Podemos agora considerar o conjunto quociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\equiv$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência. Para representar a classe do par (a, b), utilizaremos o símbolo a/b. Temos, assim,

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \equiv (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid xb = ya\}$$

O símbolo $\frac{a}{b}$ chama-se uma *fração de numerador* a e *denominador* b.

Como vimos em 4.1, qualquer elemento da classe a/b diz-se um *representante* da mesma. Assim, como (3, 6), (5, 10), (4, 8) são todos elementos que pertencem à classe do par (1, 2), podemos dizer que todos esses pares representam a classe $1/2$.

Lembramos que a classe de um par (a, b) é a mesma que a de outro par (c, d) se e somente se esses pares são equivalentes. Temos, então, que $a/b = c/d$ se e somente se $ad = bc$.

4.2.3 Definição

Indicaremos por $\mathbb{Q}$ o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\equiv$ e chamaremos *números racionais* os elementos de $\mathbb{Q}$.

Naturalmente, para que o conjunto construído acima seja útil para nossos propósitos, precisamos definir operações de soma e produto nele. Faremos isso apoiando-nos nas operações de $\mathbb{Z}$, na forma que já deve ser familiar ao leitor desde o curso secundário.

4.2.4 Definição

Sejam α e β elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos a soma de α e β

da seguinte forma: escrevendo $\alpha = a/b$ para algum par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e $\beta = c/d$ para algum par $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definimos $\alpha + \beta$ como sendo o racional

$$\alpha + \beta = \frac{ad + bc}{bd} .$$

Por exemplo, dado $\alpha = 4/3$ e $\beta = 5/6$, temos que

$$\alpha + \beta = \frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 6 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{39}{18} .$$

Note que, em princípio, a definição de soma parece depender dos representantes escolhidos para α e β. Assim, por exemplo, na situação acima também podemos representar α e β como

$$\alpha = \frac{68}{51} \text{ e } \beta = \frac{15}{18} .$$

Dessa forma, ao efetuar a soma teríamos

$$\alpha + \beta = \frac{68}{51} + \frac{15}{18} = \frac{68 \cdot 18 + 51 \cdot 15}{51 \cdot 18} = \frac{1\,989}{918} .$$

Obtivemos por caminhos diferentes resultados aparentemente diferentes. Para que a definição pretendida seja correta, deveremos ter que

$$\frac{39}{18} = \frac{1\,989}{918} .$$

Isso felizmente acontece, já que $39 \cdot 918 = 35\,802 = 18 \cdot 1989$.

Para mostrar que no caso geral a definição anterior independe dos representantes, provaremos:

4.2.5 LEMA

Sejam $a/b = a'/b'$ e $c/d = c'/d'$ *números racionais. Então,*

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'} .$$

DEMONSTRAÇÃO

Da hipótese, temos que

$$ab' = ba',$$
$$cd' = dc' .$$

Multiplicando ambos os membros da primeira igualdade por dd' e os da segunda por bb', temos

$$ab'dd' = ba'dd',$$
$$cd'bb' = dc'bb' .$$

Somando, vem

$$ab'dd' + cd'bb' = ba'dd' + dc'bb' ,$$

e fatorando

$$(ad + bc)\, b'd' = (a'd' + c'b')\, bd ,$$

donde

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'} .$$ ■

Na próxima proposição daremos algumas das propriedades da operação de soma em Q (compare com as propriedades da soma em $\mathbb{Z}$ dadas nos axiomas A.1, A.2, A.3 e A.4).

Nesse caso, desde que demos uma definição explícita de soma, poderemos dar uma *demonstração* destas propriedades, apoiando-nos nos axiomas correspondentes em $\mathbb{Z}$.

4.2.6 PROPOSIÇÃO

A soma em Q *tem as seguintes propriedades:*

a.1 Associativa: Para toda terna α, β, γ de números racionais, tem-se que $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$.

a.2 Existência do Neutro: Existe um único elemento que, chamaremos *neutro aditivo* ou *zero* e indicaremos por 0, tal que

$$\alpha + 0 = \alpha$$

para todo racional α.

a.3 Existência do Oposto: Para cada racional α existe um único elemento, que chamaremos *oposto* de α e indicaremos por $-\alpha$, tal que

$$\alpha + (-\alpha) = 0 .$$

A.4 Comutativa: Para todo par α, β de números racionais, tem-se que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha .$$

DEMONSTRAÇÃO

A título de ilustração, demonstraremos a propriedade associativa da soma. As demais são deixadas como exercício para o leitor.

Sejam $\alpha = a/b$, $\beta = c/d$ e $\gamma = e/f$. Então, calculamos:

$$\alpha+(\beta+\gamma) = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} + (\frac{cf + de}{df}) = \frac{a(df) + b(cf + de)}{b(df)}$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = (\frac{ad + bc}{bd}) + \frac{e}{f} = \frac{(ad+bc)f + (bd)e}{(bd)f}$$

Agora, usando as propriedades das operações em $\mathbb{Z}$, é fácil ver que os resultados em ambos os casos coincidem.

Para demonstrar A.2, basta tomar $0 = \frac{0}{m}$, com m arbitrário em $\mathbb{Z}$ (já que $\frac{0}{m} = \frac{0}{m'}$, $\forall\ m, m' \in \mathbb{Z}^*$).

Para demonstrar A.3, dado $\alpha = a/b$, tomamos $-\alpha$ como sendo o elemento $-\alpha = (-a)/b$. Segue então facilmente que $\alpha + (-\alpha) = 0$. ■

Como não haverá perigo de confusão, daqui por diante utilizaremos o símbolo 0 para indicar tanto o zero de $\mathbb{Z}$ como o zero de $\mathbb{Q}$.

EXERCÍCIO

1. (i) Seja n um elemento de $\mathbb{Q}$ tal que $n+\alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$. Provar que $n = 0$.
   (ii) Demonstrar que o oposto de um racional α é único.

4.2.7 DEFINIÇÃO

Sejam α e β elementos de $\mathbb{Q}$. O *produto* de α por β será o racional $\alpha\beta$ obtido da seguinte forma: escrevendo $\alpha = a/b$ e $\beta = c/d$, definimos

$$\alpha\beta = \frac{ac}{bd} .$$

Novamente, a primeira coisa a fazer seria verificar que a definição acima independe dos representantes. Isso é uma conseqüência do lema que enunciaremos a seguir, cuja demonstração pode ser feita imitando a do lema 4.2.5.

4.2.8 LEMA

Sejam $a/b = a'/b'$ e $c/d = c'/d'$ *números racionais. Então,*

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'} .$$

4.2.9 PROPOSIÇÃO

Em $\mathbb{Q}$, *são válidas as seguintes propriedades:*

a.5 Associativa: Para toda terna α, β, γ de números racionais, tem-se que

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma .$$

a.6 Existência de Neutro: Existe um único elemento, que chamaremos *neutro multiplicativo* ou *unidade* e indicaremos por 1, tal que

$1 \cdot \alpha = \alpha$, para todo α em Q.

a.7 Existência de Inverso: Para cada racional α diferente de 0 existe um único elemento que chamaremos *inverso* de α e denotaremos por α^{-1} tal que
$\alpha\alpha^{-1} = 1$.

a.8 Comutativa: Para todo par α, β de racionais, tem-se que

$\alpha\beta = \beta\alpha$.

DEMONSTRAÇÃO

As demonstrações de a.5, a.6 e a.8 são deixadas como exercício. Provaremos apenas a.7.

Dado $\alpha = a/b \neq 0$, temos que $a \neq 0$ (por quê?), logo, b/a também é um número racional. Mostraremos que $\alpha^{-1} = b/a$. Como efeito, temos

$$b/a \cdot a/b = ba/ab = ab/ab = 1 .$$

Demonstraremos agora a unicidade do inverso de α. Seja α' um elemento de Q tal que $\alpha\alpha' = 1$. Temos

$$\alpha' = \alpha' \cdot 1 = \alpha' \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \qquad \blacksquare$$

Como não haverá perigo de confusão, daqui por diante usaremos o símbolo 1 para denotar tanto o neutro multiplicativo de $\mathbb{Z}$ como o de Q.

Note que as propriedades a.5, a.6 e a.8 são semelhantes às propriedades do produto em $\mathbb{Z}$ dadas nos axiomas a.5, a.6 e a.8. Porém a propriedade a.7 não tem um análogo em $\mathbb{Z}$, onde os *únicos* elementos inversíveis são 1 e -1 (veja o exercício 7 de 1.2).

Mostraremos a seguir que a.7 implica a propriedade cancelativa, enunciada em a.7 para $\mathbb{Z}$.

4.2.10 PROPOSIÇÃO

Vale a propriedade cancelativa do produto em Q; isto é, dada uma terna de números racionais α, β e γ, com $\alpha \neq 0$, se $\alpha\beta = \alpha\gamma$, então $\beta = \gamma$.

DEMONSTRAÇÃO

Basta multiplicar ambos os membros de $\alpha\beta = \alpha\gamma$ por α^{-1}.

Concluímos o estudo das propriedades das operações em Q considerando a relação entre soma e produto. ■

4.2.11 PROPOSIÇÃO

Vale a propriedade distributiva em Q; isto é, para toda terna de números racionais α, β e γ, tem-se que

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma .$$

DEMONSTRAÇÃO

É um exercício para o leitor. ■

Agora estamos em condições de demonstrar que o nosso objetivo inicial, aquele que nos levou à construção de um novo conjunto de números, foi de fato atingido.

4.2.12 TEOREMA

Toda equação da forma $\beta X = \alpha$, onde α, β são números racionais, $\beta \neq 0$, tem solução em Q. Ainda mais, essa solução é única.

DEMONSTRAÇÃO

Como $\beta \neq 0$ sabemos, da proposição 4.2.9, parte a.7, que existe um inverso de β, isto é, um elemento β^{-1} tal que $\beta\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta = 1$.

Mostraremos que o racional $\gamma = \beta^{-1}\alpha$ é uma solução.

Com efeito, substituindo-o na equação dada vem que

$$\beta\gamma = \beta(\beta^{-1}\alpha) = (\beta\beta^{-1})\alpha = \alpha .$$

Suponhamos agora que $x \in \mathbb{Q}$ é outra solução de equação. Isso significa que $\beta x = \alpha$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por β^{-1} vem

$$\beta^{-1}\beta x = \beta^{-1}\alpha = \gamma .$$

logo,

$$x = \gamma .$$ ■

Temos ainda um problema a tratar. Acabamos de provar que uma equação de forma $\beta X = \alpha$ tem solução em $\mathbb{Q}$ quando α e β são números racionais com $\beta \neq 0$. Porém, nosso problema inicial era construir um conjunto de números onde uma equação de forma $bX = a$ com coeficientes *inteiros* tivesse solução.

Bem, o leitor dirá que o problema já está resolvido, pois $x = a/b$ é solução dessa equação: basta substituir e verificar. De fato, teríamos $b \cdot a/b = a$ e estamos acostumados a aceitar isso como uma igualdade.

Entretanto, se quisermos ser cuidadosos nas nossas definições, deveremos notar que o produto de um racional por um inteiro não foi definido; em princípio, só definimos o produto de um racional por outro racional. Note que, conforme a definição, um racional é uma classe de equivalência constituída por pares ordenados de números inteiros. Assim, num certo sentido, podemos dizer que inteiros e racionais são elementos de "natureza" diferente.

Esse impasse pode ser superado se observarmos que o conjunto $\mathbb{Q}$ contém uma "cópia" de $\mathbb{Z}$.

Com efeito, seja $\overline{\mathbb{Z}} = \{ \frac{a}{1} \mid a \in \mathbb{Z} \}$, que obviamente é subconjunto de $\mathbb{Q}$, e consideremos a função ϕ: definida por

$$a \in \mathbb{Z} \overset{\phi}{\mapsto} \frac{a}{1} \in \overline{\mathbb{Z}} .$$

O leitor verificará sem dificuldades que ϕ é uma função bijetora. Ainda mais, ela "copia" as operações ou, mais precisamente, verifica:

(i) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$,

(ii) $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad \forall \ a, b \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, temos

$$\phi(a) + \phi(b) = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 + 1 \cdot b}{1.1} = \frac{a+b}{1} = \phi(a+b),$$

$$\phi(a) \cdot \phi(b) = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1 \cdot 1} = \frac{ab}{1} = \phi(ab) .$$

Dessa forma, podemos identificar os inteiros como racionais de $\overline{\mathbb{Z}}$ através da função ϕ.

Dada uma equação da forma $bX = a$, interpretando-a como a equação

$$\frac{b}{1} \cdot X = \frac{a}{1} ,$$

faz sentido dizer que sua única solução em $\mathbb{Q}$ é

$$x = \frac{a}{b}.$$

Daqui em diante, quando não houver perigo de confusão, não distinguiremos entre os inteiros m e a sua imagem $m/1$ em $\overline{\mathbb{Z}}$. Assim, por exemplo, símbolos como

$$m \cdot \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a}{b} \ (m)^{-1}$$

indicarão respectivamente

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{a}{b} \text{ e } a/b \cdot (m/1)^{-1} .$$

Agora, introduziremos uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ e mostraremos que tem propriedades semelhantes às estudadas em $\mathbb{Z}$.

Para isso, observamos inicialmente que todo racional α tem algum representante com denominador positivo. Como efeito, dado $\alpha = a/b$, se $b < 0$, temos que α também é representado pelo par $(-a)/(-b)$ (verifique!) e, nesse caso, temos $-b > 0$.

4.2.13 DEFINIÇÃO*

Dados dois números racionais α e β, diremos que α é *menor ou igual* a β, e escrevemos $\alpha \leq \beta$ se, tomando representantes com denominadores positivos a/b e c/d para α e β respectivamente, tivermos $ad \leq bc$.

Equivalentemente, podemos escrever nossa definição na forma

$$a/b \leq c/d \Leftrightarrow ad \leq bc .$$

O leitor deve ter notado imediatamente que, tal como no caso da soma e do produto, a definição acima parece depender dos representantes a/b e c/d escolhidos para α e β, respectivamente.

Para mostrar que nossa definição é consistente, verificaremos que independe dos representantes .

4.2.14 LEMA

Sejam $a/b = a'/b'$ e $c/d = c'/d'$ *números racionais, em que todos os denominadores são positivos. Então, temos que* $ad \leq bc$ *se e somente se* $a'd' \leq b'c'$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que $ad \leq bc$. Como $b'd'$ é um inteiro positivo, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $b'd'$, temos, pelo axioma A.15, que $adb'd' \leq bcb'd'$.

Da hipótese, temos que $ab' = a'b$ e $cd' = dc'$. Substituindo na desigualdade anterior, temos

$$dd'ba' \leq bb'dc'$$

(*) Esta definição pode parecer um pouco artificial. Porém, ela é a única que estende "naturalmente" a ordem de $\mathbb{Z}$ "copiada" da ordem de $\overline{\mathbb{Z}}$. Mostraremos isso com cuidado na nota do final do capítulo.

e, como bd também é positivo, podemos cancelar (veja o exercício 10, parte (ii) de 1.2) e temos

$$a'd' \leq b'c' .$$

A recíproca fica a cargo do leitor, que poderá demonstrá-la invertendo os passos acima. ■

Tal como em $\mathbb{Z}$, usaremos o símbolo $\alpha < \beta$ para indicar que $\alpha \leq \beta$, mas $\alpha \neq \beta$.

4.2.15 PROPOSIÇÃO

(i) Reflexiva: *Para todo racional* α, *tem-se que* $\alpha \leq \alpha$.
(ii) Anti-simétrica: *Dados* $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, *se* $\alpha \leq \beta$ *e* $\beta \leq \alpha$, *então* $\alpha = \beta$.
(iii) Transitiva: *Dados* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, *tem-se que se* $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, *então* $\alpha \leq \gamma$.

DEMONSTRAÇÃO

A título de exemplo, provaremos a parte (iii) e deixaremos a demonstração das outras afirmações como exercício para o leitor.

Sejam $\alpha = a/b$, $\beta = c/d$ e $\gamma = e/f$, em que supomos que todos os denominadores sejam positivos.

Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, temos que $ad \leq bd$ e $cf \leq de$. Multiplicando ambos os membros da primeira desigualdade por f e os da segunda por b, temos

$$adf \leq bcf \quad \text{e} \quad bcf \leq bde .$$

Da transitiva de relação $\leq$ em $\mathbb{Z}$ (axioma A.12), temos que

$$adf \leq bde .$$

Finalmente, como podemos cancelar d (por que?) vem que

$af \leq be$, isto é $\alpha \leq \gamma$. ■

EXERCÍCIO

2. Provar que $a/1 \leq b/1$ (na ordem de $\mathbb{Q}$) se e somente se $a \leq b$ (em $\mathbb{Z}$).

4.2.16 PROPOSIÇÃO

Para toda terna α, β, γ de racionais temos que:

(i) *Se* $\alpha \leq \beta$, *então* $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.
(ii) *Se* $\alpha \leq \beta$ *e* $0 \leq \gamma$, *então* $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

A demonstração é simples e fica a cargo do leitor. Por causa das propriedades (i) e (ii) acima, costuma-se dizer que a ordem definida é *compatível* com as operações de $\mathbb{Q}$.

Se quiséssemos levar adiante o paralelismo entre as propriedades da ordem em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, deveríamos tentar demonstrar agora um análogo do Princípio da Boa Ordem. Essa, porém, é uma diferença marcante entre um e outro caso, como ilustraremos a seguir.

4.2.17 EXEMPLO

Existem em $\mathbb{Q}$ conjuntos de números racionais não-negativos que não contêm elemento mínimo. Com efeito, consideremos o conjunto $A = \{1/a \mid a \in \mathbb{Z},\ a > 0\}$.

É claro que os elementos de A são todos racionais positivos. Mostraremos que A não tem mínimo.

Suponhamos que tivesse. Esse elemento, por pertencer a A, seria da forma $1/m$ para algum $m > 0$ em $\mathbb{Z}$. Mas

$$\frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} \quad \text{(já que } 1 \cdot m < (m+1) \cdot 1\text{)},$$

o que contradiz a minimalidade de $\frac{1}{m}$.

Há ainda outra diferença importante entre as ordens. Na proposição 1.2.7, provamos que não existem inteiros entre 0 e 1, e o leitor deve ter usado um argumento análogo para provar, no exercício 6 da seção 1.2, que não existem inteiros entre a e $a+1$. A situação é radicalmente diferente em $\mathbb{Q}$.

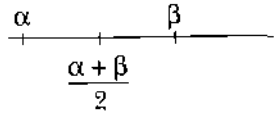
4.2.18 PROPOSIÇÃO (DENSIDADE DE $\mathbb{Q}$)

Sejam α e β racionais tais que $\alpha < \beta$. Então, sempre existe um racional γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $\alpha = a/b$ e $\beta = c/d$, em que b e d são positivos. Mostraremos que o racional $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$

está nas condições da tese (intuitivamente, se representamos α e β numa reta numérica, o racional γ corresponde ao ponto médio do segmento). Com efeito, temos que



$$\gamma = \frac{ad + bc}{2bd}.$$

Com $\alpha < \beta$, temos que $ad < bc$, logo, $2ad < ad + bc$. Portanto, $2adb < (ad+bc)b$ e conseqüentemente

$$a/b < \frac{ad + bc}{2bd}, \text{ isto é, } \alpha < \gamma.$$

De forma análoga, segue que $\gamma < \beta$. ∎

A última propriedade que merecerá nossa atenção é a arquimediana. Mostramos na proposição 1.2.8 que a ordem nos inteiros tem essa propriedade e, para isso, utilizamos o axioma de Boa Ordem. Embora não disponhamos de um análogo desse axioma em $\mathbb{Q}$, será possível dar uma demonstração reduzindo ao caso de $\mathbb{Z}$.

4.2.19 PROPOSIÇÃO (PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA)

Sejam α e β racionais positivos. Então, existe um inteiro positivo n tal que $n\alpha \geq \beta$.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $\alpha = a/b$ e $\beta = c/d$. Como α e β são positivos, podemos assumir que os inteiros a, b, c são todos positivos.

Como vale a propriedade arquimediana em $\mathbb{Z}$, sabemos que existe um n tal que $n(ad) \geq bc$ (veja a proposição 1.2.8).

Isso significa precisamente que

$$\frac{na}{b} \geq \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad n \cdot \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} . \qquad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS

3. (i) Mostrar que todo número racional não-nulo pode ser representado sob a forma a/b, em que $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$. Diz-se, nesse caso, que o racional ab está na forma *irredutível*.

   (ii) Mostrar que dois racionais escritos na forma irredutível a/b e c/d são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$ ou $a = \pm c$ e $b = \pm d$.

4. Seja α um número racional. Provar que existe um único inteiro n tal que $n \leq \alpha < n + 1$.

5. Mostrar com um exemplo que nem todo conjunto não-vazio de números racionais limitado superiormente tem máximo.

6. Dados os racionais α e β, com $\beta \neq 0$, definimos o símbolo:

   $$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1} .$$

   Provar que, se $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$, então

   $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} .$$

7. Definição: Seja a um inteiro não-nulo. Para todo n inteiro negativo, definimos

   $$a^n = \frac{1}{a^{|n|}} .$$

   Provar que continuam válidas as propriedades de potência enunciadas no exercício da seção 1.3.

Nota

Vamos indicar rapidamente como se pode justificar a definição de ordem em $\mathbb{Q}$, que demos em 4.2.13.

Uma forma simples será ver como devemos definir os racionais positivos; depois, poderemos dar a definição geral da seguinte forma: dados α e β em $\mathbb{Q}$, diremos que $\alpha \leq \beta$ se e somente se $\beta - \alpha$ é maior ou igual a zero.

Nossa intenção é introduzir a ordem em todo $\mathbb{Q}$ de forma que estenda a ordem que os inteiros induzem em $\overline{\mathbb{Z}}$; em outras palavras, para racionais da forma

$\frac{a}{1}$ diremos que $\frac{a}{1} \geq 0$ se e somente se $a \geq 0$.

Agora, queremos ver qual deve ser a definição geral. Pretendemos também que a ordem seja compatível com as operações, isto é, que verifique as regras de proposição 4.2.16.

Dado $\alpha = \frac{a}{b}$ com denominador positivo, devemos ter $\frac{b}{1} \geq 0$.

Se também for $\alpha \geq 0$, devemos ter

$\alpha \cdot \frac{b}{1} \geq 0$, isto é, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} \geq 0$, ou seja,

$\frac{a}{1} \geq 0$; logo, deve ser $a \geq 0$.

Assim, a definição razoável seria que um racional $\alpha = \frac{a}{b}$

com denominador positivo é maior ou igual a zero se e somente se o numerador a o é.

Finalmente, dados

$$\alpha = \frac{a}{b} \text{ e } \beta = \frac{c}{d}$$

com denominadores positivos, diremos que $\alpha \leq \beta$ se $0 \leq \beta - \alpha$, isto é,

$$0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

donde

$$0 \leq \frac{bc - ad}{bd} .$$

Como o denominador é positivo, a última desigualdade vale se e somente se $0 \leq bc - ad$ ou, equivalente, se $ad \leq cb$. Chegamos assim à nossa definição original: $\alpha \leq \beta$ se e somente se $ad \leq bc$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

8. Seja a um número inteiro que não é um quadrado perfeito. Mostrar que a equação $X^2 - a = 0$ não tem solução em $\mathbb{Q}$.

9. Para que valores de $n \in \mathbb{Z}$ a representação do racional $\frac{n^2+2n+3}{n^3+3n+5}$ é irredutível?

10. Determinar todos os inteiros n tais que $\frac{n+17}{n-4}$ seja o quadrado de um racional.

11. Sejam os racionais $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d}$ verificando $ba' - ab' = bc$ $ad = 1$.

    (a) Demonstrar que a expressão de cada um deles é irredutível.

    (b) Supondo que os denominadores tenham o mesmo sinal, determinar qual dos racionais dados é o menor.

(c) Nas mesmas hipóteses de (b), que condições devem verificar c e d para que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{a'}{b'}$?

12. Dadas as frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, sejam:

$\alpha = \frac{6a - 13b}{5a\ 17b}$ e $\beta = \frac{17c - 13d}{5c\ 6b}$. Sabe-se que $\beta = \frac{a}{b}$.

(a) Provar que $\alpha = \frac{c}{d}$.

(b) Se d' = $mdc(6a-13b, 5a-17b)$ e $d'' = mdc(17c-13d, 5c-6d)$, expressar c e d em função de a, b e d', e a e b em função de c, d e d''.

5

APÊNDICE

NÚMERO NATURAL

5.1 A AXIOMÁTICA DE G. PEANO

Deus fez os números naturais.
O resto é obra dos homens.
Leopold Kronecker

No decorrer destas notas, mostramos como os inteiros módulo m e os números racionais podem ser construídos a partir dos inteiros. Da mesma forma, pode-se dar uma construção dos números reais a partir dos racionais e dos números complexos a partir dos reais.

Mas, e os números inteiros? Mostraremos neste apêndice que eles próprios podem ser construídos a partir do conjunto, mais simples, dos números naturais (isto é, os números do conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$).

Finalmente, os números naturais podem ser apresentados como um conjunto, cuja existência admitimos, em que vale um reduzido número de axiomas. Isso justifica a citação de Kronecker acima.

O método de Giuseppe Peano que apresentamos aqui se baseia no fato de que os números naturais podem ser ordenados numa seqüência, na qual cada elemento tem um "sucessor" bem definido. Por

causa disso, diz-se uma *teoria ordinal*. Uma outra fundamentação possível seria construir uma *teoria cardinal*, isto é, formalizar a idéia intuitiva – que foi também a primeira a ser concebida – de que o número expressa quantidade. Esse caminho, porém, nos levaria a introduzir conceitos da Teoria dos Conjuntos, estendendo em demais estas notas.

Na sua fundamentação, formulada em 1879 na linguagem da época, Peano admite três conceitos primitivos: *número natural*, *zero* e *sucessor*, relacionados entre si por cinco axiomas. Indicaremos por $\sigma(n)$ o "sucessor" do número n e, como é usual, utilizaremos o símbolo 0 para indicar o zero.

Com essas notações, os axiomas são os seguintes:

(1) 0 é um número natural.
(2) Todo número natural n tem um "sucessor" $\sigma(n)$.
(3) 0 não é "sucessor" de nenhum número.
(4) Se $\sigma(n) = \sigma(m)$, então $n = m$.
(5) Princípio da Indução Completa: Seja S um conjunto de números naturais tal que:
(a) $0 \in S$
(b) Se $n \in S$, então $\sigma(n) \in S$.
Então, S é o conjunto de todos os números naturais.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais.

Hoje em dia estamos acostumados a expressar as idéias matemáticas em termos de conjuntos e funções; vamos "traduzir", então, as idéias de Peano nessa linguagem.

Notamos inicialmente que o conceito primitivo de sucessor nada mais é do que uma função, que a cada número associa outro; o axioma 2 apenas afirma que essa função está definida em todo $\mathbb{N}$.

Admitiremos, então, que existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ verificando:

P.1 Existe um elemento $0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \notin \mathrm{Im}(\sigma)$.
P.2 A função σ é injetora.
P.3 Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:
(i) $0 \in A$.
(ii) Se $n \in A$, então $\sigma(n) \in A$.

Então, $A = \mathbb{N}$.

Indicaremos por $\mathbb{N}^+$ o conjunto de todos os naturais diferentes de zero. Note que $\sigma(0) \in \mathbb{N}^+$ e, conforme o axioma P.2, temos que $0 \neq \sigma(0)$; isso mostra que $\mathbb{N}^+$ é não-vazio.

Ainda, podemos provar que todo natural diferente de zero é sucessor de algum número. Mais formalmente:

5.1.1 Proposição

$\mathrm{Im}(\sigma) = \mathbb{N}^+$.

Demonstração

Basta considerar o conjunto $A = \{0\} \cup \mathrm{Im}(\sigma)$. Obviamente, $0 \in A$ e, se $n \in A$, então $\sigma(n) \in A$ (pois $\sigma(n) \in \mathrm{Im}(\sigma)$) .

Logo, pelo axioma P.3, $A = \mathbb{N}$. Assim, dado um natural $n \in \mathbb{N}$, como $n \in A$ e $n \neq 0$, devemos ter $n \in \mathrm{Im}(\sigma)$. ■

5.1.2 Definição

Dado um natural $n \neq 0$, o número natural m tal que $\sigma(m) = n$ chama-se *o antecessor* de n, e n chama-se o *sucessor* de m.

A vantagem da apresentação que estamos desenvolvendo é que nela admitimos muito pouco. Mostraremos a seguir que se podem *definir* as operações de soma e produto e demonstrar que elas têm as propriedades que admitimos no primeiro capítulo. Em contrapartida, o leitor notará que o maior inconveniente é a quantidade de trabalho necessária para obter resultados que nos parecem intuitivamente óbvios.

Começaremos por definir a soma. Queremos dar um significado ao símbolo $m+n$, para todo par de números $m, n \in \mathbb{N}$. Para isso, procederemos em duas etapas. Primeiro consideraremos um m fixo e indicaremos o que entendemos por $m+n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Depois, verificaremos que a soma está bem definida, para todo par de números naturais.

5.1.3 Definição

Seja $m \in \mathbb{N}$ um número natural dado. Então

(i) $m + 0 = m$.
(ii) $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$.

Note que sabemos somar m com 0 e que a segunda condição nos permite somar m com o sucessor de 0, com o sucessor do sucessor de 0 etc. Temos, então:

5.1.4 Proposição

Seja $m \in \mathbb{N}$ um número natural dado. Então, a soma $m+n$ está definida para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Seja A o conjunto de naturais n para os quais a soma $m+n$ está definida.

Conforme a condição (i) da definição anterior, temos que $0 \in A$, e da condição (ii) temos que, se $m+n$ está definido, então $m + \sigma(n)$ também está definido ou, em símbolos, se $n \in A$, então $\sigma(n) \in A$.

Do axioma de indução temos que $A = \mathbb{N}$ e segue a tese. ■

Notamos agora que, para cada $m \in \mathbb{N}$, sabemos que a soma $m+n$ está definida para todo natural $n \in \mathbb{N}$, o que quer dizer que $m+n$ está definida para todo par de números naturais m, n.

Como o leitor deve estar começando a suspeitar, elaborar toda a teoria a partir dos axiomas de Peano não passa agora de um longo exercício de indução.

Mostraremos, a título de ilustração, como podem ser demonstradas algumas das propriedades, e deixaremos as restantes ao leitor interessado que, temos certeza, não encontrará maiores dificuldades.

5.1.5 Proposição

Para toda terna m, n, p de números naturais, vale

$$m + (n + p) = (m + n) + p \ .$$

Demonstração

Seja S o conjunto dos números naturais p tais que $m + (n + p) = (m + n) + p$, para todo par de naturais m, n. Para demonstrar a proposição, bastará provar que $S = \mathbb{N}$.

Temos que

$$m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0 \ .$$

Logo, $0 \in S$.

Ainda, suponhamos que $p \in S$, isto é, que
$m + (n + p) = (m + n) + p$.

Vamos provar que também $\sigma(p) \in S$. Com efeito,

$$m + (n + \sigma(p)) = m + \sigma(n + p) = \sigma(m + (n + p)) =$$
$$= \sigma((m + n) + p) = (m + n) + \sigma(p) \ .$$

Temos usado aqui, repetidamente, a condição (ii) da definição 5.1.3. ■

5.1.6 Proposição

Para todo número natural m, tem-se que

$$m + 0 = m = 0 + m \ .$$

Demonstração

A primeira igualdade segue da própria definição.

Para provar a segunda, consideramos o conjunto de naturais

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 + m = m\} \ .$$

Obviamente, $0 \in A$.

Ainda, se $0 + m = m$, temos que $0 + \sigma(m) = \sigma(0 + m) = \sigma(m)$, logo, verifica-se também a partir de (ii) do axioma P.3, e temos que $A = \mathbb{N}$. ■

Ainda precisaríamos demonstrar que 0 é o único elemento neutro, pois, *a priori*, nada impede que algum outro natural u verifique $u + m = m + u = m$, para todo m.

5.1.7 Proposição

O neutro aditivo é único.

DEMONSTRAÇÃO

Seja u um elemento neutro, e consideremos a soma $0+u$.
Como u é neutro, por hipótese, temos $0 + u = 0$.
Ainda, como provamos que o 0 é neutro, temos também $0+u = u$.
Logo, $0 = u$.

Para evitar algumas dificuldades na demonstração da propriedade comutativa, introduziremos primeiro o elemento 1.

5.1.8 DEFINIÇÃO

Indicaremos por 1 o número natural que é o sucessor de 0, isto é, $1 = \sigma(0)$.

5.1.9 PROPOSIÇÃO

Para todo natural m, tem-se que $\sigma(m) = 1+m$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $A = \{ m \in \mathbb{N} \mid \sigma(m) = 1 + m \}$.
Obviamente, $0 \in A$, pois $\sigma(0) = 1 + 0 = 1$.
Seja, então, $m \in A$. Mostraremos que $\sigma(m) \in A$.
Com efeito, como $\sigma(m) = 1 + m$, temos que

$\sigma(\sigma(m)) = \sigma(1 + m) = 1 + \sigma(m)$, isto é, $\sigma(m) \in A$.

Do axioma P.3 temos que $A = \mathbb{N}$. ■

5.1.10 PROPOSIÇÃO

Para todo par m, n de números naturais, tem-se que

$m + n = n + m$.

DEMONSTRAÇÃO

Mais uma vez, usaremos uma técnica semelhante àquela das proposições anteriores. Consideremos o conjunto

$A = \{ m \in \mathbb{N} \mid m + n = n + m, \forall n \in \mathbb{N} \}$.

Da proposição 5.1.6 temos que $0 \in A$.
Seja então $m \in A$. Provaremos que também $\sigma(m) \in A$. Com efeito, temos

$n + \sigma(m) = \sigma(n + m) = \sigma(m + n) = 1 + m + n = \sigma(m)+n$.

Assim, do axioma P.3 segue, mais uma vez, que $A = \mathbb{N}$. ■

A definição de produto será feita de forma análoga à soma.

5.1.11 DEFINIÇÃO

Seja $m \in \mathbb{N}$ um natural dado. Então

$m \cdot 0 = 0$
$m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$.

Deixaremos a cargo do leitor provar que o produto $m \cdot n$ está de fato definido para todo par de números naturais e demonstrar as propriedades do produto (veja os exercícios 1, 2 e 3).
Indicaremos a seguir como se pode definir a relação $\leq$ em $\mathbb{N}$.

5.1.12 DEFINIÇÃO

Sejam m e n números naturais. Diremos que m é *menor ou igual* a n se existir um outro número natural r tal que $m + r = n$. Em símbolos,

$m \leq n$ se existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m + r = n$.

Novamente, deixamos a cargo do leitor verificar as propriedades da relação $\leq$ (veja os exercícios 4, 5 e 6).

EXERCÍCIOS

1. Provar que o produto $m \cdot n$ está definido para todo par m, n de números naturais.

2. Provar que

   (i) $1 \cdot m = m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.
   (ii) O neutro multiplicativo é único.

3. Provar que o produto de números naturais definido em 5.1.11 satisfaz as propriedades associativa, comutativa e distributiva.

4. Provar que, para toda terna a, b, c de números naturais, se $a+c = b+c$, então $a = b$ (propriedade cancelativa da soma).

5. Sejam a e b números naturais. Provar que uma das seguintes condições está verificada:

   (i) $a = b$.
   (ii) Existe $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, tal que $a + x = b$.
   (iii) Existe $y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$, tal que $a = b + y$.

6. Verificar que a relação $\leq$ definida em $\mathbb{N}$ satisfaz os axiomas A.13, A.14, A.15, introduzidos na seção 1.2.

7. Verificar que a relação $\leq$, introduzida em 5.1.12 para o conjunto N, satisfaz as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva, introduzidas na seção 1.2.

8. Démonstrar que $\mathbb{N}$, com a relação $\leq$, verifica o Princípio de Boa Ordem.

5.2 A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS

Para construir o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros a partir do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, vamos seguir uma estratégia semelhante à utilizada na construção de Q, apoiando-nos mais uma vez na noção de equivalência.

Consideramos inicialmente o conjunto

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \}$$

de todos os pares ordenados de números naturais. Nesse conjunto introduzimos uma relação, que notaremos por $\equiv$, do seguinte modo:

5.2.1 Definição

Dados dois elementos (a,b) e (c,d) do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, diremos que $(a,b) \equiv (c,d)$ se e somente se $a + d = b + c$.

Por exemplo, notamos que $(4, 6) \equiv (7, 9)$, pois $4 + 9 = 6 + 7$ e, da mesma forma, $(0, 1) \equiv (5, 6)$, já que $0 + 6 = 5 + 1$.

A seguinte proposição, de demonstração muito simples, fica como exercício para o leitor.

5.2.2 Proposição

A relação definida acima é uma relação de equivalência.

Vamos considerar agora o conjunto quociente; isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência definidas por essa relação. Denotaremos a classe do par (a, b) pelo símbolo $\overline{(a,b)}$; assim, temos que

$$\overline{(a, b)} = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y) \equiv (a, b) \}.$$

5.2.3 Definição

Denotaremos por $\mathbb{Z}$ o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \;/\; \equiv$ e chamaremos *números inteiros* os elementos desse conjunto.

O próximo passo será introduzir operações em $\mathbb{Z}$.

5.2.4 DEFINIÇÃO

Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(a, b)}$ elementos de $\mathbb{Z}$. Definimos a *soma* de α e β por

$$\alpha + \beta = \overline{(a + c, b + d)}.$$

A primeira providência será mostrar que essa soma está bem definida; isto é, que ela independe dos representantes escolhidos.

5.2.5 LEMA

Sejam $\overline{(a,b)} = \overline{(a'b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c'd')}$ *números inteiros. Então,*

$$\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a' + c', b' + d')}.$$

DEMONSTRAÇÃO

Da hipótese, temos que

$a + b' = a' + b$
$c + d' = c' + d.$

Logo,

$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d),$

donde $\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a' + c') + (b' + d')}$. ∎

5.2.6 PROPOSIÇÃO

A soma em $\mathbb{Z}$ tem as seguintes propriedades:

(i) *Associativa*: Para toda terna α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, tem-se que $(\alpha+\beta) + \gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$.

(ii) *Existência de Neutro*: Existe um único elemento, que denotaremos por $0 \in \mathbb{Z}$, tal que $\alpha+0 = 0+\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$.

(iii) *Existência de Oposto*: Para cada inteiro α existe um único elemento, que chamaremos seu *oposto* e denotaremos por $-\alpha$ tal que

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0.$$

(iv) *Comutativa*: Para todo par $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tem-se que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

A demonstração é muito simples e, mais uma vez, é deixada como exercício para o leitor. Ela decorre simplesmente de aplicar a definição e se apoiar na propriedade análoga já demonstrada para $\mathbb{N}$.

Gostaríamos de observar que o elemento neutro da soma é $\overline{(0,0)}$, que também pode ser representado como $\overline{(a, a)}$, para qualquer $a \in \mathbb{Z}$. Note ainda que, se $\alpha = \overline{(a, b)}$, então $-\alpha = \overline{(b, a)}$.

5.2.7 DEFINIÇÃO

Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(c, d)}$ *números inteiros*. Definimos o *produto* de α por β por

$$\alpha\beta = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

5.2.8 LEMA

Sejam $\overline{(a,b)} = \overline{(a'b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ *números inteiros. Então,*

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}\,.$$

DEMONSTRAÇÃO

Vamos fazer a demonstração em duas etapas. Afirmamos primeiro que

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}\,.$$

Para provar essa afirmação, notamos que, da hipótese, temos

$$a + b' = b + a'\,.$$

Multiplicando essa equação por c, obtemos

$$ac + b'c = a'c + bc$$

e, multiplicando-a por d e trocando a posição dos membros, obtemos

$$bd + a'd = ad + b'd\,.$$

Somando as duas equações obtidas, resulta

$$ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd,$$

donde

$$\overline{(ac + b'd', a'd' + b'c)} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)},$$

o que prova nossa primeira afirmação.

Afirmamos agora que

$$\overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)} = \overline{(a'c' - b'd', a'd' + b'c')}\,.$$

Novamente, da hipótese, vem que

$$c + d' = c' + d\,.$$

Multiplicando essa equação por b', obtemos

$$b'c + b'd = b'c + b'd$$

e, multiplicando-a por a' e trocando a posição dos membros, obtemos

$$a'c' + a'd = a'c + a'd'.$$

Somando essas equações, resulta

$$a'c' + b'd' + a'd + b'c = b'c' + a'd' + b'd + a'c,$$

donde

$$\overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)},$$

o que prova nossa segunda afirmação.

De ambas as afirmações segue, por transitividade, o resultado que queríamos demonstrar. ■

5.2.9 PROPOSIÇÃO

A multiplicação em $\mathbb{Z}$ *tem as seguintes propriedades:*

(i) *Associativa:* Para toda terna α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ tem-se que

$$(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)\,.$$

(ii) *Existência de Neutro*: Existe um único elemento, que denotaremos por $1 \in \mathbb{Z}$, tal que $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$.

(iii) *Cancelativa*: Para toda terna α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, com $\alpha \neq 0$, se $\alpha\gamma = \alpha\gamma$, então $\beta = \gamma$.

(iv) *Comutativa*: Para todo par α, $\beta \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$\alpha\beta = \beta\alpha$.

(v) *Distributiva*: Para todo terna α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Também nesse caso deixaremos a demonstração como exercício para o leitor. Gostaríamos de observar que $1 = \overline{(1,0)} = \overline{(a+1, a)}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Agora, vamos introduzir uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$.

5.2.10 Definição

Dados os números inteiros $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)}$, diremos que α é *menor ou igual* a β, e escrevemos $\alpha \leq \beta$ se $a + d \leq b + c$.

Agora, resultará muito fácil para o leitor provar a próxima proposição, que mostra que $\leq$ é uma relação de ordem compatível com a operação de $\mathbb{Z}$.

5.2.11 Proposição

(i) *Reflexiva*: Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$, tem-se que $\alpha \leq \alpha$.

(ii) *Simétrica*: Dados α, $\beta \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, então $\alpha = \beta$.

(iii) *Transitiva*: Dados α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, então $\alpha = \beta$.

(iv) *Tricotomia*: Dados α, $\beta \in \mathbb{Z}$, tem-se que ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$ (aqui $\alpha < \beta$ significa que $\alpha \leq \beta$, com $\alpha \neq \beta$).

(v) Dados α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ então $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$.

(vi) Dados α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ e $0 \leq \gamma$, então $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Um inteiro $\alpha = \overline{(a,b)}$ diz-se *positivo* se $\alpha > 0$ e diz-se *negativo* se $\alpha < 0$. Note que α é positivo se e somente se $a > b$ e negativo se e somente se $b > a$. Note ainda que os inteiros positivos podem ser representados na forma $\alpha = \overline{(m, 0)}$, em que $m = a - b$, e os negativos, na forma $\alpha = \overline{(0, m)}$, em que $m = b - a$.

Também é interessante observar que o conjunto de inteiros não-negativos é uma "cópia" de $\mathbb{N}$, no sentido que explicitaremos a seguir.

Seja $\mathbb{Z}^+ = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos inteiros não-negativos. Consideramos a função $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$ definida por

$$a \in \mathbb{N} \xrightarrow{\phi} \overline{(a, 0)} \in \mathbb{Z}^+.$$

Verifica-se facilmente que ϕ é bijetora e que ela "copia" também as operações e a ordem; mais precisamente, para todo par a, $b \in \mathbb{N}$, tem-se que

(i) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.
(ii) $\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(b)$.
(iii) Se $a \leq b$, então $\phi(a) \leq \phi(b)$.

Note que isso significa, em particular, que vale o axioma P.4 para os inteiros não-negativos.

Para mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}$ aqui definido satisfaz todos os axiomas que foram admitidos no Capítulo 1, falta apenas provar que vale o Princípio da Boa Ordem.

5.2.12 PROPOSIÇÃO (PRINCÍPIO DA BOA ORDEM)

Seja $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não-vazio de inteiros não-negativos. Então, A contém um elemento mínimo (isto é, existe um elemento $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a, \forall a \in A$).

DEMONSTRAÇÃO

Veja a resolução do exercício 8 de 5.1.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

NÚMEROS INTEIROS

1.2 UMA FUNDAMENTAÇÃO AXIOMÁTICA

Exercício 7. Sejam $a, a' \in \mathbb{Z}$ tais que $aa' = 1$. Tomando módulos, temos que $|a|\,|a'| = 1$. Como $a \neq 0$, deve ser $|a| > 0$ e, pela proposição 1.2.7, $|a| \geq 1$. Analogamente, $|a'| \geq 1$. Multiplicando essa última igualdade por $|a|$, vem $|a|\,|a'| \geq |a| > 0$. Como $|a|\,|a'| = 1$, temos $0 < |a| \leq 1$. Logo, $|a| = 1$, donde $a = 1$ ou $a = -1$.

Exercício 10 (iv). Se a e b são de sinais contrários, temos, pela regra dos sinais, que $ab \leq 0$. Como $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ e $-ab \geq 0$, temos $a^2 - ab + b^2 \geq 0$.

Suponhamos que a e b sejam de mesmo sinal. Nesse caso, $ab \geq 0$. Temos

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,\ ab \geq 0.$$

Somando, vem $ab^2 - ab + b^2 \geq 0$.

Exercício 10 (viii). Multiplicando $0 \leq a \leq b$ por $c > 0$, temos que $ac \leq bc$ pelo axioma A.15. Se $ac = bc$, com $c \neq 0$, pela propriedade cancelativa devemos ter $a = b$, contra a hipótese. Logo, deve ser $ac < bc$. Analogamente, $bc < bd$. Assim, pela propriedade transitiva e o exercício 4, devemos ter que $ac < bd$.

1.3 O PRINCÍPIO DE INDUÇÃO COMPLETA

Exercício 8 (i). Vamos proceder por indução em n.

Seja $m > 0$, fixo. Temos

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1},$$

por definição de a^{m+1}.

Suponhamos a igualdade verdadeira para $n = k$, isto é,

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}.$$

Multiplicando ambos os lados por a, temos

$$a^m \cdot a^k \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{(m+k)+1},$$

por definição de $a^{(m+k)+1}$. Assim,

$$a^{m+(k+1)} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = a^m \cdot a^{k+1},$$

por definição de a^{k+1}. Logo, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para todos $m, n \geq 0$.

Exercício 11 (i). Vamos supor, por absurdo, que $a < b$ (se $b < a$, a demonstração é análoga).

Demonstraremos que $a < b$ implica que $a^n < b^n$, para todo n ímpar, o que contraria a hipótese. É claro que a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos então que $a^{2k+1} < b^{2k+1}$, para certo $k \geq 0$.

Observamos primeiro que, se $a > 0$, então $a^n > 0$, para todo n. Se $a < 0$ e n é ímpar, então $a^n < 0$ (prove isso por indução). Agora, consideramos três casos: $0 \leq a \leq b$, $a < b \leq 0$ e $a \leq 0 < b$.

Se $0 \leq a < b$, pelo exercício 10(vii) de 1.2, vem que $0 \leq a^2 < b^2$. Da hipótese de indução e da observação acima, temos também que

$$0 \leq a^{2k+1} < b^{2k+1},$$

Logo,

$$0 \leq a^{2(k+1)+1} < b^{2(k+1)-1},$$

de novo pelo exercício 10(vii) de 1.2.

Se $a \leq 0 < b$, obtemos da observação acima que

$$a^{2(k+1)+1} \leq 0 < b^{2(k+1)+1}.$$

Se $a < b \leq 0$, temos que $0 \leq -b < -a$.

Portanto, $0 \leq (-b)^2 < (-a)^2$ ou, ainda, $0 \leq b^2 < a^2$. Da observação e da hipótese de indução, vem nesse caso que

$$a^{2k+1} < b^{2k+1} \leq 0.$$

Logo,

$$0 \leq -b^{2k+1} < -a^{2k+1},\ 0 \leq b^2 < a^2.$$

Multiplicando ordenadamente essas desigualdades, temos

$$-b^{2k+1+2} < -a^{2k+1-2} \text{ ou } a^{2(k+1)+1} < b^{2(k+1)+1},$$

como queríamos demonstrar.

1.4 O TEOREMA DO BINÔMIO

Exercício 4 (a). Vamos proceder por indução em n.

Se $n = 2$, temos: $\binom{2}{2} 1 = \binom{3}{3}$. Suponhamos, então, que

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{3},\ k \geq 2.$$

Somando $\binom{k+1}{2}$ a ambos os membros, temos

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}=\binom{k+1}{3}+\binom{k+1}{2}.$$

Pela Fórmula de Stieffel, temos

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{k-1}{2}=\binom{k+2}{3},$$

que é a fórmula desejada para $n = k + 1$.

Exercício 4 (b). Temos

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=1^2+\left(2\binom{2}{2}+1\right)+\left(2\binom{3}{2}+3\right)+\ldots+\left(2\binom{n}{2}+n\right)=$$

$$=\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}\right]+(1+2+\ldots+n)=2\binom{n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=2\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot 2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2(n+1)n(n-1)+3(n+1)}{3\cdot 2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercício 7. Temos

$$(4x-5y)^{14}=\sum_{i=0}^{14}\binom{14}{i}(4x)^{14-i}(-5y)^i=\sum_{i=0}^{14}\binom{14}{i}4^{14-i}5^i x^{14-i}(-y)^i.$$

Assim, os coeficientes numéricos são

$$\binom{14}{i}4^{14},\ \left(\frac{5}{4}\right)^i,\ i=0,1,\ldots,14.$$

Basta, portanto, determinar para que valor de i o termo

$$A_i=\binom{14}{i}\left(\frac{5}{4}\right)^i \text{ é máximo.}$$

Pelo exercício 1, o maior coeficiente binomial é $\binom{14}{7}$, seguido por $\binom{14}{8}=\binom{14}{6}$.

Por outro lado, da desigualdade $5^i 4^{i-1} > 5^{i-1} 4^i$ (verifique!), temos

$$\left(\frac{5}{4}\right)^i>\left(\frac{5}{4}\right)^{i-1},\ i\geq 1.$$

Portanto,

$$\binom{14}{6}<\binom{14}{7} \text{ e } \left(\frac{5}{4}\right)^6>\left(\frac{5}{4}\right)^7 \text{ implicam } A_6<A_7.$$

Agora, vamos comparar $A_8, A_9, \ldots, A_{14}$ com A_7. Para $i \geq 8$, temos

$$A_i-A_7=\binom{14}{i}\left(\frac{5}{4}\right)^i-\binom{14}{7}\left(\frac{5}{4}\right)^7=\binom{14}{14-i}\left(\frac{5}{4}\right)^i-\binom{14}{7}\left(\frac{5}{4}\right)^7=$$

$$=\frac{14\cdot 13\ldots(i+1)}{(14-i)!}\left(\frac{5}{4}\right)^i-\frac{14\cdot 13\ldots 8}{7!}\left(\frac{5}{4}\right)^7=$$

$$=\frac{14\cdot 13\ldots(i+1)}{(14-i)!}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{i-7}-\frac{(i)(i-1\ldots 8)}{7\cdot 6\ldots(14-i+1)}\right).$$

Como os dois primeiros termos do produto são positivos, vamos verificar para que valores de i o último termo é positivo. Para $i = 8$, temos

$$\frac{5}{4}-\frac{8}{7}=\frac{35-32}{28}>0;\ \text{logo, } A_8>A_7.$$

Comparemos, então, A_i com A_8, $i \geq 9$:

$$A_i - A_8 = A_i - A_7 - (A_8 - A_7) =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^7 \frac{14\cdot13\ldots(i+1)}{(14-i)!}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{i-7} - \frac{i(i-1)\ldots8}{7\cdot6\ldots(14-i+1)}\right] - \left(\frac{5}{4}\right)^7 \frac{14\cdot13\ldots9}{6!}\cdot\frac{3}{28} =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^7 \frac{14\cdot13\ldots(i+1)}{(14-i)!}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{i-7} - \frac{i(i-1)\ldots8}{7\cdot6\ldots(14-i+1)} - \frac{i(i-1)\ldots9\cdot7}{7\cdot6\cdot5\ldots(14-i+1)}\cdot\frac{3}{28}\right] =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^7 \frac{14\cdot13\ldots(i-1)}{(14-i)!}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{i-7} + \frac{i(i-1)\ldots9(-8-7\cdot3/28}{7\cdot6\ldots(14-i-1)}\right] =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^7 \frac{14\cdot13\ldots(i+1)}{(14-i)!}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{i-7} + \frac{i(i-1)\ldots9(-35/4)}{7\cdot6\ldots(14-i+1)}\right].$$

Basta, então, analisar o último fator. Para $i = 9$, tem-se

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{6}\cdot\frac{-35}{4} = \frac{25-2\cdot3\cdot5}{15} < 0 .$$

Logo, $A_9 - A_8 < 0$ e $A_9 < A_8$. Para $i = 10$, tem-se

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{10\cdot9}{7\cdot6\cdot5}\left(\frac{-35}{4}\right) = \frac{5(5^2-3\cdot4^2)}{4^3} < 0 .$$

Logo, $A_{10} - A_8 < 0$ e $A_{10} < A_8$.

Procedendo-se dessa maneira para $i = 11, 12, 13, 14$, obtém-se que o coeficiente numérico de maior valor absoluto é A_8.

2

DIVISIBILIDADE

2.1 ALGORITMO DA DIVISÃO

Exercício 3 (ii). Seja a inteiro. Podemos escrever $a = 3q + r$, com $0 \leq r < 3$. Elevando ao quadrado, vem que $a^2 = 9q^2 + 6qr + r^2$.

Se $r = 0$, temos que $a^2 = 9q^2$ é da forma $3k$. Se $r = 1$, então $a^2 = 9q^2 + 6q + 1$ é da forma $3k+1$. Se $r = 2$, então $a^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1$ é também da forma $3k + 1$.

Exercício 4 (i). Sejam a, $a + 1$, $a + 2$ três inteiros consecutivos. Dividindo a por 3, temos que $a = 3q + r$, com $0 \leq r < 3$. Se $r = 0$, então $3 \mid a$. Se $r = 1$, então $3 \mid (a+2)$, e se $r = 2$, então $3 \mid (a-1)$. Em todos os casos, o produto é múltiplo de 3.

Exercício 4 (ii). Sejam a, $a + 1$, ..., $a + (n-1)$ n inteiros consecutivos. Dividindo a por n, temos $a = nq + r$, com $0 \leq r < n$. Então, n divide o fator $a + (n - r) = nq + r + n - r$; conseqüentemente, divide também o produto dos n fatores.

Exercício 5. Procedemos primeiro à prova direta. Dividindo n por 6, temos

$$n = 6q + r \text{ , com } 0 \le r < 6 .$$

Logo, $n(n+1)(2n+1) = (6q+r)(6q+r+1)(2(6q+r)+1)$. Desenvolvendo o segundo membro, a única parcela na qual não comparece $6q$ é o produto $r(r+1)(2r+1)$, que denotaremos por R.

Se $r = 0$, é claro que $6 \mid 6q(6q+1)(2(6q)+1)$. Se $r = 1$, então $R = 6$, logo, $6 \mid (6q+1)(6q+2)(2(6q+1)+1)$. Analogamente, para $r = 2, 3, 4$ ou 5, sempre se obtém um múltiplo de 6.

Passemos à prova por indução. Para $n = 0$, o resultado é óbvio. Suponhamos então o resultado válido para $n = k$, isto é, que $6 \mid k(k+1)(2k+1)$. Para $n = k+1$, temos

$$\begin{aligned}
&(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1) = \\
&\quad = k(k+1+1)(2(k+1)+1) + (k+2)(2k+3) = \\
&\quad = k(k+1)(2k+3) + k\cdot 1\cdot(2k+3) + (k+2)(2k+3) = \\
&\quad = k(k+1)(2k+1) + k(k+1)\cdot 2 + k(2k+3) + (k+2)(2k+3) = \\
&\quad = k(k+1)(2k+1) + k(k+1)\cdot 2 + (2k+3)(2k+2) = \\
&\quad = k(k+1)(2k+1) + 2(k+1)(3k+3) .
\end{aligned}$$

Como $6 \mid 2(k+1)3(k+1)$, a afirmação está demonstrada para $n \ge 0$. Se $n = -m$, com $m > 0$, basta proceder por indução em m.

Exercício 12 (i). Vamos proceder por indução em n. Se $n = 1$, a afirmação é imediata.

Suponhamos, então, que $7 \mid (2^{3k} - 1)$, para $k \ge 1$, e consideremos o inteiro $2^{3(k+1)} - 1$.

Tem-se

$$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k}\cdot 2^3 - 1 = 2^{3k}\cdot 8 - 1 = 2^{3k}(7+1) - 1 = 2^{3k}\cdot 7 + 2^{3k} - 1.$$

Pela hipótese de indução, vem que $7 \mid (2^{3k} - 1)$. Como ainda $7 \mid 2^{3k}\cdot 7$, segue-se que 7 divide a soma, isto é, $7 \mid (2^{3(k+1)} - 1)$.

Exercício 14 (ii). Temos

$$\begin{aligned}
1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 &= 24 = 5^2 - 1 , \\
2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 &= 120 = 11^2 - 1 .
\end{aligned}$$

Assim, é razoável tentar provar que

$$(n-1)n(n+1)(n+2) = ((n-1)(n+2)+1)^2 - 1 .$$

Partindo do segundo membro, tem-se que

$$\begin{aligned}
&((n-1)(n+2)+1)^2 - 1 = ((n-1)(n+2)+2)((n-1)(n-2)+1-1) = \\
&= (n-1)(n-2)(n^2-n) = (n-1)n(n+1)(n+2) .
\end{aligned}$$

Exercício 15 (i). Da hipótese, a é da forma $a = 2k + 1$. Portanto, $a(a^2-1) = (2k+1)(4k^2+4k) = 4k(2k+1)(k+1)$. Do exercício 5, vem que $6 \mid k(k+1)(2k+1)$, logo, $24 \mid 4k(k+1)(2k+1)$.

Exercício 15 (iv). Temos $360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$, e

$$a^2(a^2-1)(a^2-4) = (a-2)(a-1)aa(a+1)(a+2) .$$

Temos aí cinco inteiros consecutivos. Pelo exercício 4(ii), um deles é múltiplo de 5. Suponhamos, por exemplo, que $a-1$ seja múltiplo de 5 (nos outros casos, a demonstração é análoga). Segue-se que

$$\begin{aligned}
&(a-2)(a-1)aa(a+1)(a+2) = \\
&= (5k-1)\,5k\,(5k+1)^2\,(5k+2)(5k+3) .
\end{aligned}$$

Se $5k+2$ é ímpar, pela parte (i) vem que $24 \mid (5k+1)(5k+2)(5k+3)$. Mostraremos agora que $3 \mid (5k-1)\,k\,(5k+1)$. Seja, então, $k = 3q + r$, com $r = 0$, 1 ou 2.

Se $r = 0$, não há nada a demonstrar. Se $r = 1$, então $5k + 1 = 5(3q + 1) + 1 = 15q + 6$, donde $3 \mid (5k + 1)$.

Se $r = 2$, analogamente mostra-se que $3 \mid (5k - 1)$.

Portanto, de $3 \mid (5k-1)\,k\,(5k+1)$ e $24 \mid (5k+1)\,(5k+2)\,(5k+3)$, concluímos que $3 \cdot 5 \cdot 24 \mid (5k-1)\,5k\,(5k+1)^2\,(5k+2)(5k+3)$.

Suponhamos agora que $(5k - 2)$ é par. Então, k é par e $k(5k + 1)(5k + 2)$ é múltiplo de 24 (verifique!). Observando agora que $(5k - 1)$, $(5k + 1)$ e $(5k + 3)$ são inteiros da forma x, $x + 2$ e $x + 4$, vem pelo exercício 10 que um deles é múltiplo de 3. De $24 \mid k(5k + 1)(5k + 2)$ e $3 \mid (5k - 1)(5k + 1)(5k + 3)$, vem que $3 \cdot 5 \cdot 24 \mid (5k - 1)\,5k\,(5k + 1)^2\,(5k + 2)(5k + 3)$.

2.2 NUMERAÇÃO

Exercício 4. Temos

$$m' = s_{n'}\, b^{n'} + \ldots + s_1\, b + s_0,$$

$$m = r_n\, b^n + \ldots + r_1\, b + r_0, \text{ com } n' > n.$$

Para mostrar que $m < m'$, será suficiente provar que $m < b^{n'-1}$, já que $b^{n'-1} \leq m'$. Mas

$$m = r_0 + r_1 b + \ldots + r_n\, b^n \leq (b-1) + (b-1)\, b + \ldots + (b-1)\, b^n =$$

$$= b + b^2 + \ldots + b^{n+1} - 1 - b - \ldots - b^n = b^{n+1} - 1 < b^{n+1}.$$

O critério para comparar m e m', no caso de termos $n = n'$, é o seguinte: se $r_n < s_n$, então $m < m'$. De novo, será suficiente mostrar que $m < s_n\, b^n$. Mas

$$m = r_0 + r_1\, b + \ldots + r_n\, b^n \leq (b-1) + (b-1)\, b + \ldots +$$

$$+ (b-1)\, b^{n-1} + r_n\, b^n = b - b^2 + \ldots + b^{n-1} + b^n +$$

$$+ r_n\, b^n - 1 - b - \ldots - b^{n-1} = (r_n + 1)\, b^n - 1 \leq s_n\, b^n - 1 < s_n\, b^n.$$

Exercício 5 (ii). Podemos escrever as potências de 10 na forma

$$10^k = (9+1)^k = 9^k + \binom{k}{1} 9^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k-1} 9 + 1.$$

Assim, para todo $k \geq 1$, vem que $10^k = M_k + 1$, em que M_k é múltiplo de 9. Substituindo em b, vem

$$b = r_n\, 10^n + r_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots + r_1\, 10 + r_0 =$$

$$= (r_n\, M_n + r_{n-1}\, M_{n-1} + \ldots + r_1\, M_1) + (r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0).$$

Como $3 \mid (r_n\, M_n + r_{n-1}\, M_{n-1} + \ldots + r_1\, M_1)$, vem que $3 \mid b$ se e somente se $3 \mid (r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0)$.

Analogamente se prova (iv).

Exercício 9 (i). Basta observar que, se $x = 5q + r$, com $r = 0, 1, 2, 3$ ou 4, então $x^2 = 25q^2 + 10qr + r^2 = 5(5q^2 + 2qr) + r^2$, com $r^2 = 0, 1, 4, 9$ ou 16 respectivamente. Em qualquer caso, é fácil ver que o resto da divisão de x^2 por 5 é 0, 1 ou 4.

Exercício 9 (ii). Como $5k$ termina em 0 ou 5, então $5k + 1$ deve terminar em 1 ou 6, e $5k - 1$ deve terminar em 9 ou 4.

Exercício 9 (iii). Sejam a, b, c tais que $a^2 = b^2 + c^2$. É fácil ver que a, b, c não podem ser todos ímpares, já que o quadrado de um número ímpar é ímpar, e a soma ou diferença de dois ímpares é par.

Vamos agora demonstrar que entre eles há um múltiplo de 5. É claro que podemos supor que 5 não divide a. Então, a^2 termina em 1, 4, 6 ou 9. A seguir, estão todas as combinações possíveis dos últimos algarismos de b^2 e c^2, supondo que 5 não divide b e 5 não divide c. É fácil ver que, nesses casos, a equação $a^2 = b^2 + c^2$ nunca é verdadeira.

a^2	b^2	c^2
2	1	1
5	1	4
7	1	6
0	1	9
0	4	6
3	4	9
5	6	9
8	9	9

Exercício 12. Temos: $3 \mid (a+b)$ e $3 \mid (a+b+2x)$. Portanto, $3 \mid 2x$. Como $0 \le x \le 9$, é fácil ver que $3 \mid x$. Assim, $x = 0$, 3, 6 ou 9. Ainda, x é o último algarismo de um quadrado perfeito. Pelo exercício 9(ii), vem que $x = 0$, 6 ou 9. Na tabela abaixo, damos os valores correspondentes de b:

x	b
0	0
6	4
6	6
9	3
9	7

Se $x = 0$ ou 9, então, como $9 \mid 2x$ e $9 \mid (a+b+2x)$, vem que $9 \mid (a+b)$. Assim, $a - b = 9$ ou 18 (já que $a \le 9$, $b \le 9$). Portanto, as possibilidades são

$x = 0$, $b = 0$, $a = 9$, ou $n = 90$,
$x = 0$, $b = 4$, $a = 5$, ou $n = 54$,
$x = 9$, $b = 3$, $a = 6$, ou $n = 63$,
$x = 9$, $b = 7$, $a = 2$, ou $n = 27$.

Fazendo os cálculos, vemos que apenas $n = 63$ satisfaz as condições do problema.

Se $x = 6$, então $b = 4$ ou 6 e $a + b = 6, 9, 12, 15$ ou 18. De qualquer forma, $2 \mid n$, portanto $4 \mid n^2$. Daí, pode-se concluir que $4 \mid (ax)_{10}$ (prove!). Então, $a = 1, 3, 5, 7$ ou 9.

Reunindo essas informações com os valores possíveis de $a+b$, as únicas possibilidades são

$b = 4$, $a = 5$, ou $n = 54$,
$b = 6$, $a = 3$, ou $n = 36$,
$b = 6$, $a = 9$, ou $n = 96$.

Os cálculos mostram que nenhum desses números conduz a uma solução.

Exercício 14. Consideremos primeiro alguns casos particulares. Um objeto de 4g pode ser pesado colocando no outro prato da balança os pesos de 1g e 3g: $4 = 3 + 1$. Um objeto de 5g pode ser pesado colocando-se num dos pratos o objeto e os pesos de 3g e 1g e, no outro prato, o peso de 9g: $5 = 9 - 3 - 1$. Analogamente, $6 = 9 - 3$, $7 = 9 - 3 + 1$, $8 = 9 - 1$ etc. Basta, portanto, provar que, se $a \le 121$, a pode ser escrito como soma dos inteiros: ± 1, ± 3, ± 9, ± 27, ± 81, sendo que cada inteiro comparece na soma no máximo uma vez.

Pelo exercício 9 de 2.1, dado um inteiro $a > 0$, existem q e r, únicos, tais que $n = 3q + r$, com $r = -1$, 0 ou 1.

Usando o mesmo argumento do teorema 6.1, podemos provar que a pode ser escrito de modo único na forma

$$a = r_n 3^n + r_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + r_1 3 + r_0,$$

com $n \ge 0$, $r_n \ne 0$ e $-1 \le r_i \le 1$, para cada índice i, $0 \le i \le n$.

Considerando-se apenas as potências $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$, o maior inteiro que obtemos é $1+3+3^2+3^3+3^4=121$. Com esta observação, o exercício está completo.

2.3 IDEAIS E MÁXIMO DIVISOR COMUM

Exercício 2 (i). Seja $I=\{n\in\mathbb{Z} \mid \exists\, x>0$ tal que $64 \mid n^x\}$. Dados $\alpha\in\mathbb{Z}$ e $n\in I$, temos que existe x tal que $64 \mid n^x$, logo, $64 \mid \alpha^x n^x$ e $64 \mid (\alpha n)^x$; isto é, $\alpha n\in I$. Sejam agora $n, n'\in I$, tais que $64 \mid n^x$ e $64 \mid (n')^y$. Então, $64 \mid (n+n')^{x+y}$. De fato, chamando $k=x+y$, pelo Teorema do Binômio temos

$$(n+n')^k = n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} n' + \ldots + \binom{k}{j} n^{k-j}(n')^j + \ldots + (n')^k.$$

Se fosse $k-i<x$ e $i<y$, para algum i, teríamos $k=(k-i)+i<x+y$, um absurdo. Assim, ou $k-i\geq x$ ou $i\geq y$, para todo i verificando $0\leq i\leq k$. No primeiro caso, $64 \mid n^{k-i}$ e, no segundo, $64 \mid (n')^i$. Assim, como 64 divide cada parcela da soma acima, 64 divide $(n+n')^k$. Portanto, $n+n'\in I$ e I é um ideal.

Só fizemos a demonstração acima para mostrar como é possível provar diretamente que I é um ideal. Na verdade, ela é desnecessária. Note que $64 \mid n^x$ para algum x se e somente se $2 \mid n$ (já que $64=2^6$). Assim, I nada mais é do que o conjunto dos inteiros pares, logo, um ideal. Esse argumento mostra ainda que o inteiro nas condições do teorema 2.3.2 é 2.

Exercício 7. Sejam $a=a_1 d$, $b=b_1 d$. Pela proposição 2.3.6 (ii), vem que $mdc(a_1, b_1)=1$. Seja ainda $c=c_1 a$. Substituindo o valor de a acima nesta igualdade, vem que

$$c=c_1 a_1 d.$$

De $b \mid c$, vem $b_1 d \mid c_1 a_1 d$ e, cancelando, temos $b_1 \mid c_1 a_1$. Como $mdc(b_1, a_1)=1$, pelo Teorema de Euclides vem que $b_1 \mid c_1$, isto é, $c_1=b_1 k$. Substituindo na expressão de c acima, segue-se que $c=b_1 a_1 dk$. Lembrando que $b_1=\frac{b}{d}$, $a_1 d=a$, tem-se

$$c=\frac{ab}{d}k, \text{ isto é, } \frac{ab}{d} \mid c.$$

Exercício 9 (i). Provaremos primeiro que, se $x \mid (a\pm b)$, então $mdc(x,b)=1$. De fato, seja y um inteiro positivo tal que $y \mid x$ e $y \mid b$. Como $x \mid (a\pm b)$, temos que $y \mid (a\pm b)$ e $y \mid b$, logo, $y \mid a$. Portanto, y divide $mdc(a,b)=1$, donde $y=1$.

Seja agora x um inteiro positivo tal que $x \mid (a\pm b)$ e $x \mid ab$. Conforme o que vimos acima, $mdc(x,b)=1$. Pelo Teorema de Euclides, vem que $x \mid a$. Como $x \mid (a\pm b)$, temos que $x \mid b$, logo x divide $mdc(a,b)=1$, donde $x=1$.

Exercício 9 (iv). Observamos primeiro que, como em 9(i), se $x \mid (a+b)$, então $mdc(x,b)=1$.

Seja então $x>0$ tal que $x \mid (a+b)$ e $x \mid (a^2-ab+b^2)$. Então, $x \mid (a+b)^2$, isto é, $x \mid (a^2+2ab+b^2)$ e $x \mid (a^2-ab-b^2)$. Fazendo a diferença, vem que $x \mid 3ab$. Como $mdc(x,b)=1$, do Teorema de Euclides temos que $x \mid 3a$. Agora, dividimos a resolução em duas partes, conforme o $mdc(x,3)$ seja 1 ou 3 (note que essas são as duas únicas possibilidades!).

Seja $mdc(x,3)=1$. De novo, pelo Teorema de Euclides, vem que $x \mid a$ e, como tínhamos que $x \mid (a+b)$, segue-se que $x \mid b$, portanto $x \mid 1$, e, nesse caso, $mdc(a+b,\ a^2-ab+b^2)=1$.

Seja agora $mdc(x,3)=3$. Então, x é da forma $3k$. Como $x \mid 3a$, temos que $3k \mid 3a$, isto é, $k \mid a$. Como $x \mid b$, temos também que $k \mid b$, logo, $k=1$. Provamos assim que os únicos divisores positivos comuns de $a+b$ e a^2-ab+b^2 são 1 e 3. Logo,

$$mdc(a+b, a^2-ab+b^2)=3.$$

Tomando $a = 2$, $b = 3$ e $a = 1$, $b = 2$, vemos que ambas as respostas podem efetivamente ocorrer.

Exercício 11 (iii). Vamos provar que $D(ac, b) = D(c, b)$. Seguirá então que os elementos máximos desses conjuntos coincidem e, portanto, que $mdc(ac, b) = mdc(c, b)$.

Se $x \mid c$ e $x \mid b$, vem que $x \mid ac$ e $x \mid b$, o que prova a inclusão $D(c,b) \subset D(ac,b)$.

Seja agora x um inteiro tal que $x \mid ac$ e $x \mid b$. Como $mdc(a,b) = 1$, do exercício 5(i) vem que $mdc(x,a) = 1$. Pelo Teorema de Euclides, segue-se de $x \mid ac$ que $x \mid c$. Como já tínhamos que $x \mid b$, fica demonstrada a outra inclusão.

Exercício 13. Da hipótese, temos que $a = 2k$ e $b = 2h$, em que k e h ímpares (se, por exemplo, k fosse par, teríamos que $mdc\ (a,4) = 4$). Então, $a+b = 2(k+h)$ e $k+h$ é par. Assim, $4 \mid (a+b)$, portanto, $mdc\ (a+b, 4) = 4$.

Exercício 15 (i). Basta notar que também podemos escrever d na forma

$$d = ra + sb = ra + sb + ab - ab = (r+b)a + (s-a)b\ .$$

Exercício 15 (ii). Primeiro observamos que existem inteiros r, s tais que $c = ra + sb$ se e somente se $c \in I = \{xa+yb \mid x,\ y \in \mathbb{Z}\}$. Ora, conforme a demonstração do Teorema de Bézout 2.3.4, tem-se que $I = d\,\mathbb{Z}$, com $d = mdc\ (a,b)$. Assim, c é da forma $c = ra + sb$ se e somente se c é múltiplo de d.

Exercício 15 (iii). Dividindo a igualdade $d = ra + sb$ por d, vem que $1 = r\,\frac{a}{d} + s\,\frac{b}{d}$. Pelo exercício 4(ii), temos que $mdc(r,s) = 1$.

Exercício 16 (i). Suponhamos que $mdc(a,b) = 1$. Do exercício 5(ii), vem que $mdc(a^2, b) = 1$ e, repetindo o argumento, podemos concluir que $mdc(a^n, b) = 1$, para todo $n \geq 1$. Agora, basta repetir o raciocínio com a^n fixo e potências de b.

Suponhamos agora que $mdc(a^n, b^n) = 1$ e seja $d = mdc(a,b)$. Como $d \mid a$, temos que $d \mid a^n$. Da mesma forma vem que $d \mid b^n$, logo $d \mid mdc(a^n, b^n)$, donde $d = 1$.

Exercício 16 (ii). Se $a \mid b$, é imediato que $a^n \mid b^n$, para todo $n \geq 1$. Suponhamos agora que $a^n \mid b^n$, e sejam $d = mdc(a,b)$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$. Então, de $a^n \mid b^n$ vem que $a_1^n d^n \mid b_1^n d^n$. Cancelando d^n, temos $a_1^n \mid b_1^n$. Portanto, $mdc(a_1^n, b_1^n) = |a_1|^n$. Por outro lado, da parte (i) temos que $mdc(a_1^n, b_1^n) = 1$. Assim, $|a_1|^n = 1$, isto é, $a_1 \mid 1$. Portanto, $a_1 = \pm 1$ e $a = a_1 d = \pm d$; logo, $a \mid b$.

2.4 O ALGORITMO DE EUCLIDES

Exercício 2. Demonstraremos apenas que, se $mdc\ (a, b) = d$, então $mdc\ (ac, bc) = d|c|$. A segunda parte da proposição segue de forma análoga. Multiplicando as divisões sucessivas da página 72 por $|c|$, temos

$$a|c| = bq_1|c| + r_1|c|\ ,\ 0 \leq r_1|c| < |bc|\ ,$$

$$b|c| = r_1 q_2|c| + r_2|c|\ ,\ 0 \leq r_2|c| < r_1|c|\ ,$$

$$\ldots$$

$$r_{n-2}|c| = r_{n-1} q_n|c| + r_n|c|\ ,\ 0 \leq r_n|c| < r_{n-1}|c|\ ,$$

$$r_{n-1}|c| = r_n q_{n+1}|c|\ .$$

Como o mdc de $a|c|$ e $b|c|$ deve ser o último resto não-nulo temos que

$$mdc\ (a|c|, b|c|) = r_n|c| = d|c|\ .$$

2.5 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Exercício 3 (i). Sejam a, b inteiros positivos tais que $ab = 9\,900$ e $mmc(a,b) = 330$. Pelo teorema 2.5.4, sabemos que $mdc(a,b) \cdot mmc(a,b) = ab$, logo, temos que

$$d = mdc(a,b) = \frac{9\,900}{330} = 30 .$$

Sejam $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$.

Então,

$a_1 b_1 = \frac{ab}{d^2} = \frac{9\,900}{330} = 11$ e deve ser

$a_1 = 1$, $b_1 = 11$ ou vice-versa, donde $a = 1 \cdot 30 = 30$ e $b = 11 \cdot 30 = 330$.

Exercício 3 (ii). Sejam a, b inteiros positivos, $d = mdc(a,b)$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$. Pela observação no fim de 2.5, temos

$$\frac{mmc(a,b)}{mdc(a,b)} = \frac{ab}{d^2} = a_1 b_1 = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 ,$$

$$a - b = d(a_1 + b_1) = 7 \cdot 83 .$$

Obviamente, d pode assumir os valores 1, 7, 83 e $7 \cdot 83$, cada um deles conduzindo a um par de equações:

(a) Se $d = 1$, então $a_1 + b_1 = 7 \cdot 83 = 581$, e temos o sistema:

$$a_1 b_1 = 240 ,$$
$$a_1 + b_1 = 581 .$$

(b) Se $d = 7$, tem-se

$$a_1 b_1 = 240 ,$$
$$a_1 + b_1 = 83 .$$

(c) Se $d = 83$, tem-se

$$a_1 b_1 = 240 ,$$
$$a_1 + b_1 = 7 .$$

(d) Se $d = 7 \cdot 83$, teremos que $a_1 + b_1 = 1$ e, portanto, ou $a_1 = 0$ ou $b_1 = 0$, um absurdo, já que a e b são não-nulos.

Resolvendo, vemos que apenas $d = 7$ conduz a soluções inteiras. Tem-se $a_1 = 80$, $b_1 = 3$ e, portanto, $a = 560$, $b = 21$.

Exercício 5 (i). Sejam $d = mdc(a,b) = mmc(a,b)$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$. Pela observação do fim de 2.5, temos:

$$mmc(a,b) = \frac{ab}{d} = \frac{a_1 b_1 d^2}{d} = a_1 b_1 d .$$

Como $mmc(a,b) = d$, temos que $d = a_1 b_1 d$. Cancelando, temos que $a_1 b_1 = 1$, isto é, $|a_1| = |b_1| = 1$. Assim, $|a| = |a_1 d| = |d| = |b_1 d| = |b|$. A recíproca é imediata.

Exercício 5 (ii). Seja $d = mdc(a,b)$. Então, $mdc(ka, kb) = |k| d$ e temos

$$mmc(ka, kb) = \frac{k^2 ab}{|k| d} = |k| \frac{ab}{d} = |k| \, mmc(a,b) .$$

Exercício 5 (iii). Basta imitar a demonstração acima.

Exercício 6. Sejam $d = mdc(a,b)$ e $m = mmc(a,b)$. Observamos primeiro que o conjunto $S = \{b, 2b, \ldots, ab\}$ é constituído de múltiplos de b. Assim, um elemento de S é múltiplo de a se e somente se

também é múltiplo de $mmc(a,b) = m$. Escrevendo m na forma $m = \frac{ab}{d}$, vem que os múltiplos de m contidos em S são:

$$\frac{a}{d}\,b,\ 2\,\frac{a}{d}\,b,\ \ldots,\ d\,\frac{a}{d}\,b\ .$$

Assim, existem d múltiplos de a contidos em S.

2.6 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Exercício 10. Observamos primeiro que $24 \mid (p^2-q^2)$ se e somente se $2^3 \cdot 3 \mid (p+q)\,(p-q)$. Como $mdc\,(2^3,3) = 1$, basta provar que $2^3 \mid (p+q)\,(p-q)$ e $3 \mid (p+q)\,(p-q)$.

Como p e q são ímpares, $p+q$ e $p-q$ são pares, isto é, $p+q = 2l$, $p-q = 2s$, e falta apenas provar que ou l ou s é par. Somando, temos

$$2p = 2(l+s)\ ,\ \text{isto é},\ p = l+s\ .$$

Assim, l e s não podem ser ambos ímpares, caso contrário p seria par. Logo $2^3 \mid (p+q)\,(p-q)$.

Para mostrar que $3 \mid (p^2-q^2)$, observamos que p e q são da forma $p = 3q+r$, $q = 3q'+r'$, com $0 \le r, r' \le 2$. Em qualquer caso, é fácil ver que p^2 e q^2 são da forma

$$p^2 = 3k+1\ ,\ q^2 = 3k'+1\ .$$

Portanto, $3 \mid (p^2-q^2)$.

Exercício 11 (a). Observamos primeiro que n se escreve na forma $n = hk$, com $1 < h,\ k \le n-1$. A menos que n seja da forma $n = p^2$, com p primo, podemos supor $h \ne k$. Então, h e k são fatores de $(n-1)!$, já que $h,\ k \le n-1$.

Resta, então, demonstrar que $n \mid (n-1)!$ quando n é da forma p^2, com p primo. Como $n > 4$, deve ser $p > 2$, logo, $2p < p^2$, isto é, $2p \le p^2-1$, donde se conclui que p e $2p$ são fatores que comparecem em $(p^2-1)!$. Logo, $p^2 \mid (p^2-1)!$.

Exercício 11 (b). Escrevemos 8^n+1 na forma

$$8^n+1 = 2^{3n}+1 = (2^n)^3+1\ .$$

Usando a fatoração $(X^3+1) = (X+1)\ (X^2-X+1)$, vem

$$8^n+1 = (2^n+1)\ (2^{2n}-2^n+1)\ ,$$

e é fácil ver que nenhum desses fatores pode ser igual a 1.

Exercício 11 (c). Suponhamos por absurdo que n possa ser escrito na forma $n = hk$, com $1 \le h,\ k < n$. Então, $2^n-1 = 2^{hk}-1 = (2^h)^k-1$. Agora, é só usar a fatoração

$$X^k-1 = (X-1)\ (X^{k-1}+X^{k-2}+\ldots+X-1)\ ,$$

com $X = 2^h$.

Exercício 11 (d). Basta observar que

$$n^4+4 = (n^2+2)^2-4n^2 = ((n^2+2)-2n)\ ((n^2+2)+2n)\ ,$$

e que nenhum desses fatores pode ser igual a 1.

Exercício 11 (e). Suponhamos primeiro que n é composto, e seja p o menor primo positivo que divide n. Então, $n = 2p + (n-2p)$ e resta apenas provar que $n-2p$ é composto. Como $p \mid (n-2p)$, se $n-2p$ não é composto, deve ser igual a p. Assim, $n-2p = p$, isto é, $n = 3p$.

Portanto, como p é o menor primo positivo que divide n, deve ser $p = 2$ ou $p = 3$ e, conseqüentemente, $n = 6$ ou $n = 9$, o que não é possível, pois $n > 11$.

Suponhamos agora que n seja primo. Escrevemos, então, $n = 9 + (n - 9)$. Como n é ímpar, $n - 9$ é divisível por 2 e não é 2, caso contrário n seria igual a 11; logo, $n - 9$ também é composto.

Exercício 11 (g). Observamos primeiro que, se p é primo, ou $p = 3$ ou p é da forma $3k + 1$ ou p é da forma $3k + 2$. Além disso, é fácil ver que o produto de primos da forma $3k + 1$ é um inteiro da forma $3k - 1$. Como 3 não divide $(3n + 2)$, se todo fator primo de $3n + 2$ fosse da forma $3k + 1$, também $3n + 2$ seria da forma $3l + 1$, um absurdo.

Exercício 13. Temos $(14)^{\alpha} \mid 100!$ se e somente se $2^{\alpha} \mid 100!$ e $7^{\alpha} \mid 100!$. Como $2 < 7$, o número de vezes que 7 comparece como fator de $100!$ é menor que o número de vezes que 2 comparece. Assim, basta determinar qual a potência máxima de 7 que divide $100!$.

Temos $7 \mid 100!$ se e somente se $7 \mid x$, $x \leq 100$. Os valores possíveis para x são então: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98. Os números $49 = 7^2$ e $98 = 1 \cdot 14 = 7 \cdot 7 \cdot 2$, e apenas esses, contribuem com dois fatores iguais a 7. Assim, a maior potência de 14 que divide $100!$ é 16.

2.7 A DISTRIBUIÇÃO DOS PRIMOS

Exercício 3. Dado um primo, ou ele é 2 ou é da forma $4n + 1$ ou é da forma $4n + 3$. Seja

$$S = \{4n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Então, é fácil ver que S é fechado em relação à multiplicação.

Suponhamos agora por absurdo que exista apenas um número finito de primos positivos da forma $4n+3$, e sejam eles $p_1 = 3, p_2, \ldots, p_t$. Consideremos o número

$$N = 4(p_2 \ldots p_t) + 3$$

e vamos ver como são os primos que dividem N. Se $3 \mid N$, vem que $3 \mid 4(p_2 p_3 \ldots p_t)$ e, como $mdc(3, 4) = 1$, segue-se que $3 \mid p_2 p_3 \ldots p_t$, um absurdo, pois nenhum desses primos é 3. Se algum dos p_j divide N, vem que $p_j \mid 3$, também um absurdo.

Assim, todo primo que divide N é da forma $4n + 1$. Como S é fechado em relação à multiplicação, N devia ser da forma $4n + 1$, uma contradição.

Exercício 5. Provaremos que todos os fatores próprios de m são pares. Decorrerá, então, que m é uma potência de 2.

Suponhamos por absurdo que $m = hk$, $1 < k < m$, com k ímpar. Da fatoração

$$X^k - 1 = (X + 1)(X^{k-1} - X^{k-2} + \ldots - X + 1),$$

vem

$$2^m + 1 = (2^h)^k + 1 = (2^k + 1)(2^{h(k-1)} - 2^{h(k-2)} + \ldots - 2^h + 1).$$

Como $2^m + 1$ é ímpar, vem que ou $2^h + 1 = 1$ (um absurdo, pois $2^h + 1 > 1$) ou $2^h + 1 = 2^{hk} - 1$. No segundo caso, temos

$$2^{hk} = 2^h, 2^{hk-h} = 1, 2^{h(k-1)} = 1.$$

Logo, $h(k - 1) = 0$, portanto, $k = 1$, um absurdo.

Exercício 7 (i). Suponhamos por absurdo que exista um primo p tal que $p \mid n_i$ e $p \mid n_k$. Então, como $p \mid n_1 \cdot n_2 \ldots n_i \ldots n_{k-1}$, vem que $p \mid 1$, um absurdo.

Exercício 7 (ii). É trivial, pois os primos que aparecem na decomposição de n_k são diferentes dos que aparecem na decomposição de $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$.

.

Exercício 8 (i). Segue trivialmente das definições de A e B.

Exercício 8 (ii). O inteiro $A+B$, como todo inteiro maior que 1, tem um divisor primo p. Se $p = p_i$, para algum i, então p divide A ou B. Como também divide a soma, p divide ambos os números, o que contradiz a parte (i).

Exercício 8 (iii). Se o conjunto dos primos fosse finito, digamos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, a construção acima permitiria exibir um outro primo que não pertence ao conjunto, uma contradição.

Exercício 10. Suponhamos por absurdo que

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = x^2, \text{ com } x \in \mathbb{Z}.$$

Então,

$$p_1 p_2 \cdots p_n = x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

Como x é ímpar (por quê?), vem que $x+1$ e $x-1$ são ambos pares. Logo, $4 \mid p_1 p_2 \cdots p_n$, o que é absurdo, pois o primo $p_1 = 2$ comparece uma única vez no produto $p_1 p_2 \cdots p_n$.

Exercício 11 (i). Basta aplicar a fórmula da página 88.

Exercício 11 (ii). Temos $s(n) - n = n$,

$$s(2^{k-1} \cdot m) = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot m = 2^k \cdot m.$$

Pela parte (i), vem $s(2^{k-1} \cdot m) = s(2^{k-1})\, s(m)$. Calculando, temos $s(2^{k-1}) = 2^k - 1$. Levando esses dados à primeira equação, vem

$$(2^k - 1)\, s(m) = 2^k m.$$

Isto é, $(2^k - 1) \mid 2^k m$. Como $mdc(2^k - 1, 2^k) = 1$, vem que $(2^k - 1) \mid m$.

Exercício 11 (iii). Da parte anterior, temos

$$s(2^{k-1})\, s(m) = 2^k m,$$

$$s(m) = \frac{2^k m}{2^k - 1} = 2^k m'.$$

Ainda, $(2^k - 1)\, m' = m$, isto é, $2^k = \frac{m}{m'} + 1$. Substituindo, vem

$$s(m) = \left[\frac{m}{m'} + 1\right] m' = m + m'.$$

Exercício 11 (iv). Temos $m = (2^k - 1)\, m'$. Obviamente, tem-se que $1 \mid m$, $m \mid m$, $m' \mid m$. Assim, se $m' \neq 1$, temos $1 + m + m' \leq s(m) = m + m'$, um absurdo. Logo, $m' = 1$, $m = 2^k - 1$ e m é primo, já que tem apenas dois divisores, 1 e m.

Exercício 12. Suponhamos primeiro que todo primo que divide m também divide b. Mostraremos que todo elemento da forma $pa + b$, em que p é um primo que *não* divide m, é relativamente primo com m (note que há infinitas escolhas possíveis para esse primo p).

De fato, se q for um divisor primo comum a m e $pa + b$, por ser divisor de m é divisor também de b. Mas $q \mid (pa + b)$, $q \mid b$ implica $q \mid pa$. Como $q \neq p$, segue-se que $q \mid a$, uma contradição, pois $mdc(m, a) = 1$.

Suponhamos, agora, que existam primos que dividem m e não dividem b. Seja m_1 o produto desses primos. Nesse caso, mostraremos que $mdc\,(m_1^n a + b\,,\ m) = 1$, para qualquer $n \geq 1$.

Com efeito, seja q um divisor comum. Se $q \mid m_1$, segue-se facilmente que $q \mid b$, contra a escolha dos primos de m_1. Se q não divide m_1, como q é um dos primos que dividem m, então q é um dos divisores de b. Logo, $A \mid m_1^n a$. Mas $mdc(q,\ m_1) = 1$, logo, $q \mid a$, uma contradição.

Exercício 13. Basta observar que, se p é um primo positivo tal que $p > a$ e p não divide $(b - a)$ então $a + (p - a)$ e $b + (p - a)$ são relativamente primos. Como existem infinitos primos nessas condições, o problema está resolvido.

3

CONGRUÊNCIAS

3.1 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Exercício 3. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $x^4 + 4y^4 = k$. Somando e subtraindo $4x^2y^2$, vem

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)\ (x^2 + 2y^2 - 2xy) = k\,. \end{aligned}$$

Trabalhando com $|x|$ e $|y|$ em lugar de x e y, podemos supor x e y positivos. Como k é um primo positivo, vem

(a) $x^2 + 2y^2 + 2xy = k$,

(b) $x^2 + 2y^2 - 2xy = 1$.

Somando, vem $2x^2 + 4y^2 = k + 1$. Fazendo $x^2 = z$, $y^2 = w$, podemos resolver a equação diofantina

$$2z + 4w = k + 1 \ .$$

Como $mdc(2,4) = 2$, a equação tem solução se k for ímpar. Resolvendo pelo método usual, tem-se

$$x^2 = z = -\frac{k+1}{2} - 4t \ ,$$

$$y^2 = w = \frac{k+1}{2} + 2t \ .$$

Somando, vem: $x^2 + y^2 = -2t$. Vamos obter agora o valor de $2xy$:

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = -2t - 2xy$, logo, $2xy = -2t - (x-y)^2$.

Substituindo em (b), vem

$$x^2 + y^2 - 2xy + y^2 = -2t + 2t + (x-y)^2 + y^2 = 1 \ ,$$

$$\text{ou } (x-y)^2 + y^2 = 1 \ .$$

Portanto,

$$x - y = 0 \ , \quad y = 1 \quad \text{ou} \quad x - y = 1 \ , \quad y = 0 \ .$$

Isto é, $x = y = 1$ ou $x = 1$, $y = 0$. Substituindo na equação inicial, é fácil ver que a segunda possibilidade conduz a $k = 1$ — um absurdo — e a primeira possibilidade conduz a $k = 5$, como queríamos demonstrar.

Reciprocamente, suponhamos que $k = 5$. Se $|y| > 1$, $x^4 + 4y^2 > 5$, uma contradição. Asssim, devemos ter $|y| = 0$ ou $|y| = 1$. A primeira possibilidade conduz a $x^2 = 5$, um absurdo, e a segunda conduz a $|x| = 1$. Assim, as soluções são: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Exercício 9. Sejam x o número de reais, y o número de centavos recebidos no banco. Equacionando os dados, temos

$$100x + y - 68 = 2(100y + x) \ ,$$

o que conduz à equação diofantina

$$98x - 199y = 6 \ .$$

Resolvendo, temos

$$x = -67 \cdot 68 - 199t \ ,$$
$$y = -33 \cdot 68 - 98t \ .$$

A quantia original do cheque era

$$100y + x = 100(-33)\ (68) - 9\,800t - 67 \cdot 68 - 199t = \\ = 68\ (-3\,367) - 9\,999t \ ,$$

e devemos determinar o valor de t tal que $100y + x$ seja positivo e mínimo. Calculando, vem

$$-9\,999t > 68 \cdot 3\,367 \ ,$$

ou

$$t < \frac{-68 \cdot 3\,367}{9\,999} \ ,$$

ou ainda,

$$t < -22 \ .$$

Tomando $t = -23$, vem $100y + x = 1\,021$. Portanto, o menor valor possível com o qual o cheque foi preenchido é R$ 10,21.

3.2 CONGRUÊNCIAS

Exercício 4. Queremos mostrar que m é livre de quadrados (veja o exercício 16 de 2.6). Suponhamos, por absurdo, que exista um primo p tal que $p^2 \mid m$. Podemos escrever m na forma $m = p^2 m'$. Então, o

inteiro $x = pm'$ é solução da congruência $X^2 \equiv 0 \pmod{m}$ e não é solução de $X \equiv 0 \pmod{m}$, contra a hipótese.

Reciprocamente, seja m um inteiro livre de quadrados, e seja x um inteiro tal que $x^2 \equiv 0 \pmod{m}$. Queremos demonstrar que $x \equiv 0 \pmod{m}$. Pelo exercício 16 de 2.6, m é da forma $m = p_1 p_2 \ldots p_t$, em que os p_i são primos distintos, $1 \leq i \leq t$. De $x^2 \equiv 0 \pmod{m}$, vem $p_1 p_2 \ldots p_t \mid x^2$, e daí é fácil concluir que $p_1 \mid x$, $p_2 \mid x, \ldots, p_t \mid x$. Como os p_i são primos distintos, vem que $p_1 p_2 \ldots p_t \mid x$, isto é, $x \equiv 0 \pmod{m}$.

Exercício 7 (iii). Dado um inteiro x, temos que $x \equiv 0, 1, 2$ ou $3 \pmod 4$ e $x^5 \equiv 0, 1, 0$ ou $3 \pmod 4$, respectivamente.

Assim, na soma $1^5 - 2^5 + \ldots + 100^5$, devemos levar em conta apenas os números ímpares. Desses, os da forma $x = 4k - 1$ são tais que $x^5 \equiv 1 \pmod 4$, e os da forma $x = 4k + 3$ são tais que $x^5 \equiv 3 \pmod 4$. Devemos, então, contar quantos são da forma $4k + 1$ e quantos são da forma $4k + 3$. Tem-se

$$4k - 1 \leq 100 \text{ se e somente se } 4k \leq 99 \text{ se e somente se } k \leq \frac{99}{4} = 24\,\frac{3}{4}.$$

Logo, existem 24 inteiros da forma $4k + 1$, e analogamente se pode verificar que existem 24 inteiros da forma $4k + 3$. Portanto,

$$1^5 + 2^5 + \ldots + 100^5 \equiv 24 \cdot 1 + 24 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 4.$$

Exercício 9. Vamos proceder por indução em n. Se $n = 1$, tem-se $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, o que é verdade, pois $8 \mid (a + 1)(a - 1)$, já que a é ímpar; logo, $a + 1$ e $a - 1$ são pares, e um deles é na verdade múltiplo de 4.

Suponhamos, então, a congruência verdadeira para $n = k$: $a^{2^k} \equiv 1 \pmod{2^{k+2}}$, e vamos prová-la para $n = k + 1$. Temos

$$a^{2^{k+1}} - 1 = \left(a^{2^k}\right)^2 - 1 = \left(a^{2^k} + 1\right)\left(a^{2^k} - 1\right).$$

Da hipótese de indução, $2^{k+2} \mid (a^{2^k} - 1)$. Como a é ímpar, vem que $2 \mid \left(a^{2^k} + 1\right)$. Portanto, $2^{k+3} \mid \left(a^{2^k} + 1\right)\left(a^{2^k} - 1\right)$, ou $a^{2^{k+1}} \equiv 1 \pmod{2^{k+3}}$.

Exercício 10. Primeiro observamos que os inteiros $aa_1, aa_2, \ldots, aa_n$ são congruentes aos inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, em alguma ordem. De fato, pela definição de sistema completo de resíduos, para cada i, $aa_i \equiv a_j \pmod n$, para algum j. Ainda, dois inteiros distintos aa_i e aa_k não podem ser congruentes a um mesmo a_j, pois teríamos

$$aa_i \equiv a_j \pmod n,\ aa_k \equiv a_j \pmod n \Rightarrow aa_i \equiv aa_k \pmod n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i \equiv a_k \pmod n \Rightarrow a_i = a_k, \text{ já que } mdc(a, n) = 1.$$

Agora, dado um inteiro x, tem-se que $x \equiv a_j \pmod n$, para algum j. Como $a_j \equiv aa_i \pmod n$ para algum i, vem $x \equiv aa_i \pmod n$. Além disso, não podem existir dois inteiros aa_i e aa_j tais que $x \equiv aa_i \pmod n \equiv aa_j \pmod n$, pois já vimos que daí decorre $a_i = a_j$. Portanto, $\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_n\}$ é um sistema completo de resíduos módulo n.

3.3 RESOLUÇÃO DE CONGRUÊNCIAS LINEARES

Exercício 3. Resolveremos a congruência

$$3X \equiv 7y + 11 \pmod{13},$$

para todo $y \in \mathbb{Z}$. Temos $mdc(3, 13) = 1$, que divide $7y + 11$, para todo y. Portanto, a congruência tem solução, que é única módulo 13. Como $(-4) \cdot 3 + 13 = 1$, a solução é dada por

$$x = -4(7y + 11) = -28y - 44.$$

Para cada $y \in \mathbb{Z}$, temos um valor de x tal que o par x, y é solução. Fazendo $y = 0, 1, 2, \ldots, 12$, teremos todos os pares de soluções não-congruentes duas a duas módulo 13.

3.4 SISTEMAS DE CONGRUÊNCIAS LINEARES

Exercício 3 (i). É fácil ver que não podemos tomar o mesmo quadrado,como fator de a, $a+1$ e $a+2$. Escolhemos, então, para quadrados, os números 2^2, 3^2 e 5^2 (por quê não 2^2, 3^2 e 4^2?) . Temos

$$\begin{aligned} a &\equiv 0 \pmod 4 , \\ a+1 &\equiv 0 \pmod 9 , \\ a+2 &\equiv 0 \pmod{25} . \end{aligned}$$

Resolvendo, vem $a = 548 + 900t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3 (ii). Basta, por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{aligned} a &\equiv 0 \pmod{5^2} , \\ a+1 &\equiv 0 \pmod{3^3} , \\ a+2 &\equiv 0 \pmod{2^4} . \end{aligned}$$

3.5 OS TEOREMAS DE FERMAT, EULER E WILSON

Exercício 1 (a). Pelo exercício 5 de 3.2 , p.111 , é suficiente provar que $a^{21} - a \equiv 0 \pmod 3$ e $a^{21} - a \equiv 0 \pmod 5$.

Pelo corolário do Teorema de Fermat, tem-se $a^3 \equiv a \pmod 3$. Elevando à sétima potência, vem $(a^3)^7 \equiv a^7 \pmod 3$, $a^{21} \equiv a^7 \pmod 3 \equiv (a^3)^2\, a \pmod 3 \equiv a^2 \cdot a \pmod 3 \equiv a \pmod 3$. Analogamente, tem-se $a^5 \equiv a \pmod 5$, $(a^5)^4 \equiv a^4 \pmod 5$. Multiplicando por a, vem $a^{21} \equiv a^5 \pmod 3 \equiv a \pmod 5$.

Exercício 1 (c). Pelo exercício 5 de 3.2 , é suficiente provar que $a^6 - 1 \equiv 0 \pmod 3$, $a^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7$, $a^6 - 1 \equiv 0 \pmod 8$. Como a é relativamente primo com 3 e 7 tem-se $a^6 \equiv 1 \pmod 7$, $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, pelo Teorema de Fermat . Elevando ao cubo essa última congruência, vem que $a^6 \equiv 1 \pmod 3$.

Resta provar que $8 \mid (a^6 - 1)$. Tem-se

$$a^6 - 1 = (a^3 - 1)\,(a^3 + 1) = (a-1)\,(a^2 + a + 1)\,(a+1)\,(a^2 - a + 1) .$$

Como a é ímpar, $a-1$ e $a+1$ são pares, e um deles é múltiplo de 4. Logo, $8 \mid (a^6 - 1)$.

Exercício 2 (i). Fazendo $x = a^{p-2} b$ em $ax \equiv b \pmod p$ e aplicando o Teorema de Fermat, vem $aa^{p-2} b \equiv a^{p-1} b \pmod p \equiv b \pmod p$.

Exercício 2 (ii). Vamos resolver a congruência $2x \equiv 1 \pmod{31}$. Pelo corolário 3.3.5 , sabemos que essa congruência tem uma única solução módulo 31 . Por (i) basta tomar $x = 2^{29}$.

Exercício 4. Pelo exemplo 3.5.6 , tem-se

$$1^p - 2^p + \ldots + (p-1)^p \equiv (1 + 2 + \ldots + (p-1))^p \pmod p .$$

Como $1 + 2 + \ldots + p - 1 = \dfrac{(p-1)p}{2}$, vem

$$1^p + 2^p + \ldots + (p-1)^p \equiv \frac{(p-1)}{2} \cdot p \equiv 0 \pmod p .$$

Exercício 5 (i). Tem-se $(p-x)^2 = p^2 - 2px + x^2 \equiv x^2 \pmod p$.

Exercício 5 (ii). Sejam i, $j \in \mathbb{Z}$, com $1 \le i, j \le p-1$, satisfazendo $i^2 \equiv j^2 \pmod p$. Tem-se $i^2 - j^2 \equiv 0 \pmod p$, ou seja, $p \mid (i-j)(i+j)$. Como p é primo, ou $p \mid (i-j)$ ou $p \mid (i+j)$. Mas $|i-j| < p$; logo, se $p \mid (i-j)$, deve-se ter $i = j$. Por outro lado, se $p \mid (i+j)$, devemos ter $i + j = p$, já que $1 < i + j < 2p$. Assim, $j = p - i$.

Exercício 6. Vamos provar primeiro que $n^p \equiv n \pmod p$, para todo $n \ge 0$.

Para $n = 0$, a proposição é imediata. Suponhamos, então, esse fato demonstrado para $n = k$, e vamos prová-lo para $n = k + 1$. Tem-se

$$(k+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} k^i .$$

Ainda, como $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$, é fácil concluir que $p \mid \binom{p}{i}$, para $1 \le i \le p-1$. Assim,

$$(k+1)^p \equiv k^p + 1^p \pmod{p} \equiv k + 1 \pmod{p}$$

pela hipótese de indução. Daí, é fácil concluir que $n^p \equiv n \pmod{p}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Agora, seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que p não divida n. De $p \mid n(n^{p-1} - 1)$, vem que $p \mid (n^{p-1} - 1)$. Ou seja, $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, para todo n tal que $mdc(p, n) = 1$.

Exercício 7 (a). Tem-se $2^4 = 16 \equiv -1 \pmod{17}$; logo, $(2^4)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{17}$, ou $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$. Ainda, elevando novamente ao quadrado, vem que $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

Exercício 7 (b). Pelo Teorema de Fermat, vem que $\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1 \pmod{p}$, ou $p \mid \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1$. Logo,

$$p \mid \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right),$$

ou, ainda, $p \mid \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$ ou $p \mid \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$.

Exercício 7 (c). Escrevemos $p - 1 = eq + r$, com $0 \le r < e$. Tem-se

$$a^{p-1} = a^{eq+r} = (a^e)^q \cdot a^r \equiv 1^q \cdot a^r \pmod{p} \equiv a^r \pmod{p} .$$

Por outro lado, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Logo, $a^r \equiv 1 \pmod{p}$. Como $0 \le r < e$, deve ser $r = 0$.

Exercício 7 (d). Basta escrever $x = eq + r$, com $0 \le r < e$, e proceder como acima.

Exercício 9 (i). Como $1\,729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, pelo exercício 5 de 3.2, p. 111, basta provar que

$$a^{37} - a \equiv 0 \pmod{7}, a^{37} - a \equiv 0 \pmod{13}, a^{37} - a \equiv 0 \pmod{19}.$$

Temos $37 = 5 \cdot 7 - 2$ e $a^7 \equiv a \pmod{7}$. Logo, $a^{35} = (a^7)^5 \equiv a^5 \pmod{7}$. Multiplicando por a^2, vem

$$a^{35} \cdot a^2 \equiv a^5 \cdot a^2 \pmod{7}, a^{37} \equiv a^7 \pmod{7} \equiv a \pmod{7} .$$

As outras congruências se provam de forma análoga.

Exercício 10. Tem-se $1 + a - \ldots - a^{\phi(n)-1} = \frac{a^{\phi(n)} - 1}{a - 1}$. Logo,

$$a^{\phi(n)} - 1 = (a-1)(1 + a + \ldots + a^{\phi(n)-1}) .$$

Pelo Teorema de Euler, $n \mid (a^{\phi(n)} - 1)$. Como $mdc(a - 1, n) = 1$, vem que $n \mid (1 + a + \ldots + a^{\phi(n)-1})$.

Exercício 12. Seja a_n o n-ésimo inteiro dessa seqüência. Então, a_n tem a forma

$$a_n = 10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10^{n+1} - 1}{9} .$$

Logo, $10^{n+1} - 1 = 9a_n$.

Seja agora n um natural tal que $(p-1) \mid (n+1)$, isto é, $n+1 = k(p-1)$, para algum k. Pelo Teorema de Fermat, $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Logo, $(10^{p-1})^k \equiv a^k \pmod{p}$, ou ainda, $10^{n+1} \equiv 1 \pmod{p}$. Portanto, $p \mid (10^{n+1} - 1) = 9a_n$. Assim, se $p \neq \pm 3$, $p \mid a_n$.

Provamos, então, que, se $p \neq \pm 3$ e n é qualquer natural tal que $(p-1) \mid (n+1)$, então $p \mid a_n$. Como existem infinitos naturais nestas condições, o exercício está resolvido para $p \neq 3$.

Se $p = 3$, basta usar o critério de divisibilidade por 3 para concluir que todo inteiro da seqüência dada, cujo número de algarismos é múltiplo de 3, é divisível por 3.

Exercício 13 (ii). Pelo Teorema de Wilson, tem-se que $28! \equiv -1 \pmod{29}$. Ainda, $28 \equiv -1 \pmod{29}$ e $27 \equiv -2 \pmod{29}$. Logo,

$$28! \equiv 26! \cdot 27 \cdot 28 \pmod{29} \equiv 26!\,(-2)\,(-1) \pmod{29} \equiv 2 \cdot 26! \pmod{29}.$$

Portanto, $2 \cdot 26! \equiv -1 \pmod{29} \equiv 28 \pmod{29}$, e $r = 28$.

Exercício 15. Como $437 = 23 \cdot 19$, pelo exercício 5 de 3.2, p. 111, basta provar que $18! \equiv -1 \pmod{23}$ e $18! \equiv -1 \pmod{29}$. Para a última dessas congruências, basta aplicar o Teorema de Wilson.

Também por esse teorema, tem-se: $22! \equiv -1 \pmod{23}$. Mas

$$22 \equiv -1 \pmod{23},\ 21 \equiv -2 \pmod{23},$$
$$20 \equiv -3 \pmod{23},\ 19 \equiv -4 \pmod{23}.$$

Logo,

$$19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \equiv (-4)(-3)(-2)(-1) \pmod{23} \equiv 24 \pmod{23} \equiv 1 \pmod{23}.$$

Assim,

$$22! \equiv 18! \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \pmod{23} \equiv 18! \pmod{23}.$$

Como $22! \equiv -1 \pmod{23}$, vem que $18! \equiv -1 \pmod{23}$.

Exercício 16 (i). Se $p = 2$, o resultado é imediato. Seja então $p > 2$. Tem-se

$1 + 2 + \ldots + (p-1) = \frac{p}{2} \cdot (p-1)$ ou $\frac{1}{2}\, p\,(p-1)$. Ainda, $mdc\left(p, \frac{p-1}{2}\right) = 1$. Logo, pelo exercício 5 de 3.2, p. 111, é suficiente provar a congruência dada módulo p e módulo $\frac{p-1}{2}$.

Mas, pelo Teorema de Wilson, tem-se que

$(p-1)! \equiv (p-1) \pmod{p}$. Ainda,

$$(p-1)! - (p-1) = (p-1)((p-2)! - 1).$$

Como $\left(\frac{p-1}{2}\right) \mid (p-1)$, vem que $\left(\frac{p-1}{2}\right) \mid ((p-1)! - (p-1))$,

ou $(p-1)! \equiv (p-1) \pmod{\frac{p-1}{2}}$.

Exercício 16 (ii). Pelo corolário do teorema de Fermat, tem-se $a^p \equiv a \pmod{p}$. Pelo teorema de Wilson, tem-se $(p-1)!\, a \equiv -a \pmod{p}$. Somando essas congruências membro a membro, vem $a^p + (p-1)!\, a \equiv (a-a) \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$.

De forma análoga se prova que $p \mid ((p-1)!\, a^p + a)$.

Exercício 16 (iii). É fácil ver que

$$\{1, 3, 5, \ldots, (p-2)\} \cup \{-1, -3, \ldots, -(p-2)\} \cup \{0\}$$

é um sistema completo de resíduos módulo p. De fato, dado $x \in \mathbb{Z}$, $1 \leq x \leq p-1$, ou x é ímpar — e nesse caso $x \in \{1, 3, \ldots, (p-2)\}$ — ou

$p-x$ é ímpar, e $(p-x) \in \{1,3,\ldots,(p-2)\}$. Mas, nesse último caso, tem-se que

$$-(p-x) \equiv -(-x) \pmod{p} \equiv x \pmod{p},$$

isto é, $x \equiv -(p-x) \pmod{p}$ e $-(p-x) \in \{-1,-3,\ldots,-(p-2)\}$.

Cada um desses conjuntos contém $\frac{p-1}{2}$ elementos e a união é disjunta. Assim, cada um dos inteiros do conjunto $\{1,3,..,(p-2)\} \cup \{-1,-3,\ldots,-(p-2)\}$ é congruente a um e apenas um inteiro do conjunto $\{1,2,\ldots,p-1\}$. Logo,

$$1 \cdot (-1) \cdot (3) \cdot (-3) \cdot 5 \cdot (-5) \ldots (p-2) \cdot (-(p-2)) \equiv$$

$$\equiv 1 \cdot 2 \ldots (p-1) \pmod{p} \equiv (p-1)! \pmod{p} \equiv (-1) \pmod{p}.$$

Reunindo todos os fatores (-1) do primeiro membro, vem

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots (p-2)^2 (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Multiplicando a congruência por $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, vem

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots (p-2)^2 (-1)^{p-1} \equiv (-1)(-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

ou ainda

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

3.6 INTEIROS MÓDULO m

Exercício 19 (i). Seja $\overline{x} \in \mathbb{Z}_5$ tal que $\overline{x}^{21} - \overline{x} = \overline{0}$. Fatorando, temos $\overline{x}(\overline{x}^{20} - \overline{1}) = \overline{0}$. Como $\mathbb{Z}_5$ não tem divisores de zero, deve ser $\overline{x} = \overline{0}$ ou $\overline{x}^{20} = \overline{1}$.

Pelo Teorema de Fermat, se $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{x}^4 = \overline{1}$. Logo, $\overline{x}^{20} = (\overline{x}^4)^5 = \overline{1}^5 = \overline{1}$. Assim, todo $\overline{x} \in \mathbb{Z}_5$ é solução da equação.

Exercício 19 (iii). Seja $\overline{x} \in \mathbb{Z}_4$ tal que $\overline{x}^7 - \overline{x} = \overline{0}$. Fatorando, temos $\overline{x}(\overline{x}^6 - \overline{1}) = \overline{0}$. Assim, $\overline{x} = \overline{0}$ ou $\overline{x}^6 - \overline{1} = 0$ ou $\overline{x}$ é divisor de zero em $\mathbb{Z}_4$.

Se $\overline{x}^6 - \overline{1} = 0$, por tentativa obtemos $\overline{x} = \overline{1}$. Além disso, o único divisor de zero de $\mathbb{Z}_4$ é $\overline{2}$. Mas

$$\overline{x} = \overline{2} \rightarrow \overline{x}^6 - \overline{1} = (\overline{2})^6 - \overline{1} = (\overline{4})^3 - \overline{1} = -\overline{1}.$$

Como $\overline{2} \cdot (-\overline{1}) \neq \overline{0}$, conclui-se que as únicas soluções são $\overline{x} = \overline{0}$ ou $\overline{x} = \overline{1}$.

Exercício 20 (i). Seja $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\overline{x}^p = \overline{4}$. Pelo Teorema de Fermat, $\overline{x}^p = \overline{x}$. Logo, $\overline{x} = \overline{4}$.

Exercício 20 (ii). Seja $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\overline{x}^{2p} - \overline{x}^p = \overline{6}$. Pelo Teorema de Fermat, temos $\overline{x}^2 - \overline{x} = \overline{6}$. Consideramos agora a equação $x^2 - x - 6 = 0$ em $\mathbb{Z}$. Tem-se

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) = 0.$$

Assim, em $\mathbb{Z}_p$, é válida a igualdade

$$\overline{x}^2 - \overline{x} - \overline{6} = (\overline{x}+\overline{2})(\overline{x}-\overline{3}) = \overline{0}.$$

Como $\mathbb{Z}_p$ não contém divisores de zero, deve-se ter $\overline{x} = \overline{2}$ ou $\overline{x} = \overline{3}$.

Exercício 20 (iii). Seja $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\overline{x}^{(4p-4)} - \overline{x}^{(2p-2)} = \overline{5}$. Se $\overline{x} = \overline{0}$, então $\overline{5} = \overline{0}$ e $p = 5$. Se $\overline{x} \neq \overline{0}$, pelo Teorema de Fermat, devemos ter $\overline{x}^{(p-1)} = \overline{1}$ e, portanto,

$$\overline{x}^{(4p-4)} - \overline{x}^{(2p-2)} = (\overline{x}^{(p-1)})^4 - (\overline{x}^{(p-1)})^2 = \overline{1} - \overline{1} = \overline{0} = \overline{5},$$

o que implica $p = 5$ necessariamente.

Assim, se $p = 5$, todo elemento de $\mathbb{Z}_5$ é solução. Se $p \neq 5$, a equação não tem solução em $\mathbb{Z}_p$.

4

NÚMEROS RACIONAIS

4.1 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Exercício 2. De acordo com a definição 4.1.1, basta provar que $\forall\, a \in M$, aRa. Por (iii), dado $a \in M$, existe $b \in M$ tal que aRb. Por (i), conclui-se que bRa, e por (ii), se aRb e bRa, então aRa.

4.2 CONSTRUÇÃO DE Q

Exercício 8. Suponhamos, por absurdo, que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com p, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, é solução de $x^2 - a = 0$. Tem-se

$$\frac{p^2}{q^2} = a, \text{ ou } p^2 = aq^2.$$

Como a não é um quadrado perfeito, existe um primo q_0 que comparece com expoente ímpar na decomposição em fatores primos de a; logo, comparece com expoente ímpar em aq^2. Mas todos os primos da decomposição de p^2 comparecem com expoente par, uma contradição.

Exercício 9. O exercício estará resolvido se determinarmos todos os valores de $n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$mdc\,(n^2+2n+3,\ n^2+3n+5) = 1\ .$$

Procederemos da seguinte forma: suponhamos que exista um primo $p>0$ que divida esse máximo divisor comum. De $p \mid (n^2+2n+5)$ e $p \mid (n^2+2n+3)$, vem, fazendo a diferença, $p \mid (n+2)$. De $p \mid (n+2)n+3$, vem $p \mid 3$. Assim, deve ser $p=3$. De $p \mid (n+2)$, vem

$$(n+2) \equiv 0 \pmod 3\ ,\ \text{ou}\ \ n \equiv 1 \pmod 3\ .$$

Acabamos, portanto, de provar que, se $mdc\,(n^2+2n+3,\ n^2+3n+5) \neq 1$, então $n \equiv 1 \pmod 3$. Reciprocamente, é fácil ver que se $n \equiv 1 \pmod 3$ então $3 \mid mdc\,(n^2+2n+3,\ n^2+3n+5)$. Logo, $mdc\ (n^2+2n+3,\ n^2+3n+5) = 1$ se e somente se $n \equiv 1 \pmod 3$.

Exercício 10. Suponhamos que $\dfrac{n+17}{n-4} = \dfrac{p^2}{q^2}$, com $p,\ q \in \mathbb{Z}$,

$p,\ q > 0,\ \ mdc\,(p,q) = 1$. Logo, $p^2(n-4) = q^2(n+17)$.

Resolvendo em n, vem

$$n = \frac{17q^2+4p^2}{p^2-q^2}\ .$$

Como n é um inteiro, p^2-q^2 deve dividir $17q^2+4p^2$. Ainda, tem-se que $p>q$, já que $n+17 > n-4$. Logo, $p \geq q+1$ e $p^2 \geq q^2+2q+1 > q^2+1$; portanto, $p^2-q^2 > 1$.

Seja, então, $x>0$ um primo que divide p^2-q^2. Como $x \mid (17q^2+4p^2) = (4p^2-4q^2+21q^2)$, vem que $x \mid 21q^2$. Portanto, $x=3$ ou $x=7$ ou $x \mid q^2$. Mas, se $x \mid q^2$, como $x \mid (p^2-q^2)$, vem que $x \mid p^2$, um absurdo.

Acabamos de mostrar que os primos que podem dividir p^2-q^2 são 3 ou 7. Assim, $p^2-q^2 = (p+q)(p-q) = 3^\alpha 7^\beta$, com $\alpha, \beta \geq 0$. Ainda, é fácil ver que $mdc\,(p+q,\ p-q) = 1$. Logo, ou $p+q = 3^\alpha$ e $p-q = 7^\beta$ ou $p+q = 7^\beta$ e $p-q = 3^\alpha$. É fácil concluir que a segunda possibilidade não pode acontecer porque $p>q$.

Da primeira possibilidade decorre que

$$p = \frac{3^\alpha+7^\beta}{2}\ ,\quad q = \frac{3^\alpha-7^\beta}{2}\ ,$$

com $\alpha+\beta>0$, pois $q \neq 0$. Substituindo na expressão de n, vem

$$n = \frac{3^{2\alpha}+7^{2\beta}-26\cdot 3^\alpha\cdot 7^\beta}{4\cdot 3^{\alpha-1}\cdot 7^{\beta-1}}\ .$$

Assim, se $\dfrac{n+17}{n-4}$ é o quadrado de um racional, n tem a forma acima. Reciprocamente, se n tem a forma acima, tem-se

$$\frac{n+17}{n-4} = \frac{3^{2\alpha}+7^{2\beta}+2\cdot 3^\alpha\cdot 7^\beta}{3^{2\alpha}-7^{2\beta}-2\cdot 3^\alpha\cdot 7^\beta} = \left(\frac{3^\alpha+7^\beta}{3^\alpha-7^\beta}\right)^2.$$

Exercício 12 (a). Pelo exercício 3(ii), de

$$\frac{17c-13d}{5c-6d} = \frac{a}{b}$$

decorre que $17c-13d = a$ e $5c-6d = b$, ou $17c-13d = -a$ e $5c-6d = -b$. Se ocorre a primeira possibilidade, tirando o valor de c e d, temos

$$c = \frac{-6a+13b}{37},\ d = \frac{17b-5a}{37}\ .$$

Logo,

$$\frac{c}{d} = \frac{6a-13b}{5a-17b} = \alpha\ .$$

Se ocorre a segunda possibilidade, procede-se de modo análogo.

Exercício 12 (b). Vamos resolver apenas o caso em que ocorre a primeira possibilidade em (a).

Pelo acima, tem-se que $37 \mid (6a-13b)$, $37 \mid (5a-17b)$. Logo,

$$d' = mdc(6a-13b, 5a-17b) = mdc\left[\frac{6a-13b}{37}, \frac{5a-17b}{37}\right] =$$

$$= 37\, mdc(-c, -d) = 37.$$

Assim, $c = -\frac{6a+13b}{d'}$, $d = \frac{17b-5a}{d'}$.

Procede-se analogamente para expressar a e b em função de c, d e d'.

5

NÚMERO NATURAL

5.1 A AXIOMÁTICA DE G. PEANO

Exercício 4. (Lei do Cancelamento para Soma) Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, se $a + c = b + c$, então $a = b$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $A = \{z \in \mathbb{N} \mid \text{se } a + z = b + z \text{ então } a = b\}$. Obviamente $0 \in A$. Seja então $m \in A$. Mostraremos que $\sigma(m) \in A$.

Se $a + \sigma(m) = b + \sigma(m)$, então $\sigma(a + m) = \sigma(b + m)$. Como σ é injetora, vem que $a + m = b + m$. Como $m \in A$, segue-se que $a = b$.

Do axioma P.3, decorre agora que $A = \mathbb{N}$.

Exercício 5. Para todos $a, b \in \mathbb{N}$, verifica-se apenas uma das condições

(i) $a = b$.

(ii) Existe $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, tal que $b = a + x$.

(iii) Existe $y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$, tal que $a = b + y$.

DEMONSTRAÇÃO

Mostraremos primeiro que não podem ocorrer duas condições simultaneamente. De fato, se ocorrem (i) e (ii), segue-se que $a = a + x$, ou $a + 0 = a + x$. Do exercício 4, vem que $x = 0$, uma contradição. Similarmente, não podem ocorrer (i) e (iii).

Suponhamos, então, que ocorrem (ii) e (iii).

Então, $b = a + x = (b + y) + x = b + (y + x)$. Como acima, $y + x = 0$. Como $x \neq 0$, vem que $x = \sigma(x')$, para algum $x' \in \mathbb{N}$. Então, $y + x = y + \sigma(x') = \sigma(y + x') = 0$, e 0 está na imagem de σ, o que contradiz a proposição 5.1.1.

Provemos agora que deve acontecer uma das três condições. Sejam então a um natural dado, e $A = \{z \in \mathbb{N} \mid$ ou $z = a$ ou $z = a + x$, para algum $x \neq 0$, ou $a = z + y$ para algum $y \neq 0\}$.

Obviamente, $0 \in A$, pois ou $0 = a$ ou $0 \neq a$ e, nesse último caso, segue-se que $a = 0 + a$; isto é, 0 verifica a última condição.

Seja então $m \in A$, e mostremos que $\sigma(m) \in A$. Se $m = a$, então $\sigma(m) = \sigma(a) = a + 1$, e verifica-se a segunda condição. Se $m = a + x$, então $\sigma(m) = \sigma(a + x) = a + \sigma(x)$, e novamente se verifica a segunda condição. Suponhamos, então, que $a = m + y$. Como $y \neq 0$, vem que $y = \sigma(y')$, para algum $y' \in \mathbb{N}$. Logo

$$a = m + y = m + \sigma(y') = m + y' + 1 = m + 1 + y' = \sigma(m) + y'.$$

Se $y' = 0$, vale a primeira condição para $\sigma(m)$. Se $y' \neq 0$, vale a terceira condição.

Do axioma P.3, vem que $A = \mathbb{N}$.

Exercício 6. Uma vez que os demais são de demonstração imediata, demonstraremos apenas o axioma A.13 : Dados dois naturais a e b, tem-se que ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$.

Observamos primeiro que, segundo a definição 5.1.12, $a < b$ se e somente se existe $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$, tal que $b = a + r$. Agora, do exercício 5 e da definição 5.1.12 decorre que ou $a = b$, ou $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Exercício 7. Provaremos apenas a propriedade anti-simétrica, uma vez que as outras são de demonstração imediata.

Observamos primeiro que, tendo em vista o exercício 5, pode-se enunciar o axioma A.13 da seguinte forma: dados dois naturais a e b, verifica-se apenas uma das condições

(i) $a = b$,
(ii) $a < b$,
(iii) $b < a$.

Demonstraremos agora a propriedade anti-simétrica: se a, b são naturais tais que $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.

A prova é imediata, pois $a \leq b$ significa $a < b$ ou $a = b$, e $b \leq a$ significa $b < a$ ou $b = a$. Pelo axioma A.13 enunciado na forma acima, deve-se ter $a = b$.

Exercício 8. Demonstraremos primeiro o seguinte lema: Sejam

$x, y \in \mathbb{N}$. Então,

(i) se $x \neq 0$, $x \geq 1$.
(ii) $x < \sigma(y)$ se e somente se $x \leq y$.
(iii) $\sigma(y) \leq x$ se e somente se $y < x$.

DEMONSTRAÇÃO

Para (i), suponhamos por absurdo que $x < 1$. Logo, $1 = x + v$, com $v \in \mathbb{N}$, $v \neq 0$. Como $v \neq 0$, vem que $v = \sigma(v')$, com $v' \in \mathbb{N}$. Substituindo, vem

$$1 = x + v = x + \sigma(v') = x + v' + 1.$$

Da Lei do Cancelamento para a Soma enunciada na solução do exercício 4, vem $x + v' = 0$. Como $x \neq 0$, tem-se que $x = \sigma(x')$, com $x' \in \mathbb{N}$. Então,

$$\sigma(x') + v' = \sigma(x' + v') = 0,$$

e 0 está na imagem de σ, o que contradiz a proposição 5.1.1.

Para (ii), suponhamos primeiro que $x \leq y$, isto é, $x < y$ ou $x = y$. No primeiro caso, vem que $x = y + r$, com $r \in \mathbb{N}$. Logo, $\sigma(y) = \sigma(x+r) = x+\sigma(r)$, e $x < \sigma(y)$. No segundo caso, tem-se que $\sigma(y) = \sigma(x) = x + 1$, e $x < \sigma(y)$.

Reciprocamente, suponhamos que $x < \sigma(y)$. Logo, $\sigma(y) = x+s$, com $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$. Fazendo $s = \sigma(s')$, $s' \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sigma(y) = x + s = x + \sigma(s') = \sigma(x + s')$$

e, conseqüentemente, $y = x + s'$. Portanto, $x \leq y$.

Para (iii), suponhamos primeiro que $y < x$ e que $x < \sigma(y)$. De (ii), vem que $x \leq y$, um absurdo. Suponhamos agora que $\sigma(y) \leq x$ e que $x \leq y$. De (ii), segue-se que $x < \sigma(y)$, novamente uma contradição.

Demonstraremos agora o Princípio da Boa Ordem: Todo conjunto não-vazio de inteiros não negativos contém um elemento mínimo.

Seja $A \subset \mathbb{N}$ um tal conjunto, e suponhamos por absurdo que A não tenha mínimo.

Seja $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < y, \forall\ y \in A\}$. Então, $B \cap A = \phi$. De fato, suponhamos que exista $x \in B \cap A$, então $x < x$, contra o axioma A.13, conforme enunciado no exercício 7.

Provaremos agora que $B = \mathbb{N}$, o que implica $A = \phi$, uma contradição.

De fato, $0 \in B$, pois $0 \leq y$, $\forall\ y \in A$, e se 0 pertencesse a A, seria seu elemento mínimo, contra nossa suposição de absurdo. Logo, $0 < y$, $\forall\ y \in A$.

Suponhamos agora que $x \in B$, e mostremos que $\sigma(x) \in B$. Para todo $y \in A$, tem-se que $x < y$. Logo, pelo lema (iii), $\sigma(x) \leq y$. Se $\sigma(x) \in A$, então $\sigma(x)$ seria o elemento mínimo de A, de novo contra nossa hipótese de absurdo. Logo $\sigma(x) < y$, $\forall\ y \in A$, e $\sigma(x) \in B$. Do axioma P.3, vem que $B = \mathbb{N}$.

SOBRE OS AUTORES

Sônia Pitta Coelho é doutora em matemática pela Universidade de São Paulo e pesquisadora em álgebra.

César Polcino Milies é professor titular do Instituto de Matemática e Estatística da USP, do qual foi vice-diretor. É autor de mais de cinqüenta artigos de pesquisa em álgebra, publicados em revistas especializadas de circulação internacional, e de vários textos de álgebra e história da matemática.

Ambos os autores são também psicólogos, formados pela USP.

ACADÊMICA

1. *Chordata: Manual para um Curso Prático*
   Elizabeth Höfling e outros
2. *O Renascimento*
   Tereza Aline Pereira de Queiroz
3. *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*
   Josif Frenkel
4. *Laboratório de Virologia*
   José Alberto Neves Candeias
5. *Controle Robusto Multivariável*
   José Jaime da Cruz
6. *Jornalismo Econômico*
   Bernardo Kucinski
7. *Introdução à Biologia Vegetal*
   Eurico Cabral de Oliveira
8. *Mecânica Clássica Moderna*
   Walter F. Wreszinski
9. *Introdução à Física Estatística*
   Sílvio R. A. Salinas
10. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*
    Carlos A. B. Dantas
11. *Modelagem e Simulação*
    Claudio Garcia

12. *Cronobiologia*
Nelson Marques e Luiz Menna-Barreto (orgs.)
13. *Estudos de Morbidade*
Maria Lúcia Lebrão
14. *Preparos Cavitários para Amálgama e Resina Composta*
André Luiz Baracchini Centola e outros
15. *A Identidade e a Diferença*
Edward Lopes
16. *Literatura Comparada*
Sandra Nitrini
17. *Eletroquímica: Princípios e Aplicações*
Edson A. Ticianelli e Ernesto R. Gonzalez
18. *Amostragem Probabilística*
Nilza Nunes da Silva
19. *Pensando a Educação nos Tempos Modernos*
Maria Lucia Spedo Hilsdorf
20. *Números: Uma Introdução à Matemática*
César Polcino Milies e Sônia Pitta Coelho
21. *Arquiteturas no Brasil (1900-1990)*
Hugo Segawa
22. *Distribuição de Renda: Medidas de Desigualdade e Pobreza*
Rodolfo Hoffmann
23. *Ondas e Ondaletas: Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*
Pedro A. Morettin
24. *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar*
Walter J. Maciel
25. *Região e Geografia*
Sandra Lencioni
26. *Museus Acolhem Moderno*
Maria Cecília França Lourenço
27. *Energia Elétrica para o Desenvolvimento Sustentável*
Lineu Belico dos Reis & Semira Silveira (orgs.)
28. *Astronomia: Uma Visão Geral do Universo*
Elisabete M. de Golveia Dal Pino, Amâncio C. S. Friaça, Vera Jatenco-Pereira e Laerte Sodré Jr. (orgs.)
29. *Manual Prático de Microbiologia Básica*
Rogério Lacaz-Ruiz
30. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*
Armando de Oliveira Fortuna
31. *Os Significados Urbanos*
Lucrécia d'Alessio Ferrara
32. *Ética em Computação*
Paulo Cesar Masiero
33. *Patologias Cardíacas da Gestação*
Januário de Andrade (org.)
34. *Um Curso de Álgebra Linear*
Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço
35. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*
Tânia Tomé e Mário José de Oliveira
36. *Novos Instrumentos da Gestão Ambiental Urbana*
Heliana Comin Vargas e Helena Ribeiro (orgs.)
37. *Gestão de Serviços de Saúde: Descentralização/Municipalização do SUS*
Márcia Faria Westphal e Eurivaldo Sampaio de Almeida (orgs.)
38. *Avaliação e Classificação de Reservas Minerais*
Jorge Kazuo Yamamoto