AO LIVRO TÉCNICO S.A.
E
EDITÔRA DA UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO

impa

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

LUIZ HENRIQUE JACY MONTEIRO

impa

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

elementos de matemática

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

LUIZ HENRIQUE JACY MONTEIRO

AO LIVRO TÉCNICO S.A.

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

O texto: "Elementos de Álgebra" é um livro claro e sistemático, contendo todo o programa de Álgebra que deve ser ensinado no Bacharelado ou na Licenciatura em Matemática, salvo a Álgebra Linear. Pacientemente, o autor desenvolve os fatos básicos sôbre conjuntos, a teoria dos números naturais e dos números inteiros, dentro do ponto de vista geral das estruturas algébricas. Faz, em seguida, um estudo das noções de anel e corpo e as particulariza para estudar os anéis dos inteiros, o corpo dos números reais e o corpo dos complexos. Desenvolve, a seguir, o estudo dos polinômios de uma ou de diversas variáveis e trata a divisibilidade dentro do âmbito geral da teoria dos anéis fatoriais. O livro conclui com um capítulo sôbre grupos, onde são demonstrados os resultados básicos mais importantes dessa teoria, como os teoremas de Sylow e o teorema de estrutura dos grupos abelianos finitos. O texto é fartamente ilustrado com exemplos e os exercícios, variados e interessantes, ultrapassam a 1.000.

O professor, o estudante de Matemática, e mesmo o aficionado, muito lucrarão com o aparecimento dêste livro.

O autor: O Professor Luiz Henrique Jacy Monteiro é licenciado pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, tendo ali também obtido seu doutoramento, em 1950, sob orientação do Professor Oscar Zariski, da Universidade de Harvard. O Professor Jacy Monteiro, desde sua licenciatura, exerce suas atividades didáticas na Universidade de São Paulo. É especialista em Álgebra, assunto sôbre o qual escreveu vários livros que o tornaram bastante conhecido em todo o Brasil.

Composto na Gráfica A. OSHIRO — PUBLICAÇÕES, rua Oratório, 2.695 / S. PAULO, S.P., sob orientação e revisão do autor.

Impresso por SEDEGRA Sociedade Editôra e Gráfica Ltda., Rua Matipó, 101/115 — Rio — GB

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

COLEÇÃO / ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

- ELEMENTOS DE ÁLGEBRA, POR LUIZ HENRIQUE JACY MONTEIRO
- ELEMENTOS DE TOPOLOGIA GERAL, POR ELON LAGES LIMA, EM IMPRESSÃO
- OUTROS TÍTULOS EM PREPARAÇÃO

Obra publicada
com a colaboração da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

L. H. Jacy Monteiro

AO LIVRO TÉCNICO S. A.
RIO DE JANEIRO / GUANABARA 1969

IMPRESSO NO BRASIL / PRINTED IN BRAZIL

CAPA / ALDEMAR A. PEREIRA

AO LIVRO TÉCNICO S.A.
Av. Rio Branco, 81 / 12.º andar • ZC-21 • C.P. 3655 / RIO - GB

APRESENTAÇÃO

Nos dias atuais, ninguém desconhece a importância das ciências básicas, sem as quais não se pode obter uma tecnologia independente nem resolver os problemas fundamentais com vistas ao bem-estar humano. Muito menos se ignora que o cultivo dessas ciências e o estímulo às vocações jovens se faz através da difusão adequada das idéias avançadas.

A criação de uma literatura científica brasileira é, portanto, uma tarefa de primeira importância.

O Instituto de Matemática Pura e Aplicada, ao iniciar a presente coleção, procura cumprir com entusiasmo a parte que lhe compete nessa tarefa.

Estas publicações são possíveis graças ao apoio recebido da Divisão do Ensino Superior do M.E.C., do Conselho Nacional de Pesquisas, aos esforços do meu antecessor na direção do I.M.P.A., Dr. Lindolpho de Carvalho Dias, e ao espírito empreendedor dos diretores de "AO LIVRO TÉCNICO S.A.", a quem são devidos agradecimentos especiais.

ELON LAGES LIMA
Diretor do I.M.P.A.

PREFÁCIO

O livro que ora apresentamos tem por objetivo a uniformização do ensino da Álgebra nas Faculdades de Filosofia através de uma unificação da linguagem e de uma sistematização dos conceitos que usualmente são desenvolvidos no estudo da Álgebra Moderna.

Foi planejado para atender às exigências de um curso de dois anos de duração; caberá ao professor a tarefa de escolher as partes mais importantes de cada capítulo de acôrdo com o tempo que terá para ministrar a parte de Álgebra.

No Capítulo I expomos a teoria dos conjuntos sob um ponto de vista intuitivo.

No Capítulo II construímos o conjunto dos números naturais de maneira axiomática. É recomendável, num primeiro curso de Álgebra, que se admitam conhecidos o conjunto dos números naturais e as propriedades mais importantes dêstes números, como, por exemplo, o princípio de indução finita; neste caso convém citar explìcitamente tôdas as propriedades enunciadas no parágrafo 2.4 e desenvolver o princípio de definição por recorrência e as diversas formas de demonstração por indução finita.

No Capítulo III construímos o conjunto dos números inteiros, a partir do conjunto dos números naturais, e desenvolvemos a parte elementar da Teoria dos Números.

No Capítulo IV introduzimos as estruturas de anel e corpo; destacamos a construção do corpo de frações de um anel de integridade (§ 2) e em particular do corpo dos números racionais. Terminamos êste capítulo com o estudo dos anéis e corpos ordenados.

O Capítulo V expõe a construção do corpo dos números reais, por intermédio das sucessões fundamentais de números racionais, e a construção do corpo dos números complexos.

Estudamos no Capítulo VI os anéis de polinômios com uma indeterminada, as funções polinomiais e os anéis de polinômios com um número finito de indeterminadas.

No Capítulo VII estudamos os anéis fatoriais e iniciamos no parágrafo 5 o estudo da teoria dos números algébricos, expondo as propriedades mais importantes dos corpos quadráticos e dos anéis quadráticos; no Apêndice dêste Capítulo apresentamos uma demonstração do Teorema Fundamental da Algebra.

No Capítulo VIII desenvolvemos de modo sistemático a teoria elementar dos grupos.

Os agradecimentos que se seguem não são de praxe, são o profundo e sincero reconhecimento pela colaboração obtida: à Professôra Elza Furtado Gomide, por ter lido os originais e ter apresentado diversas sugestões que foram por nós utilizadas; ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, órgão que tornou possível a publicação dêste livro; a Ao Livro Técnico S.A. pelo trabalho de impressão e divulgação.

Ao meu amigo Antonio Oshiro, prematuramente falecido, a cuja dedicação devo a composição tipográfica desta obra, o meu preito de saudade e a minha sentida homenagem.

Agôsto de 1969 L.H.J.M.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

TEORIA ELEMENTAR DOS CONJUNTOS

Estudaremos, neste capítulo, diversas noções da teoria dos conjuntos sob um ponto de vista intuitivo; exporemos, simplesmente, o que se pode chamar de «teoria ingênua dos conjuntos». Na parte relativa aos exemplos e exercícios adotaremos um ponto de vista informal pois utilizaremos diversos conceitos e conjuntos que serão definidos precisamente em outros capítulos dêste livro. As noções de conjunto finito ou infinito, assim como a noção de número de elementos de um conjunto finito, não serão definidas rigorosamente; no entanto, êstes conceitos serão utilizados freqüentemente no desenvolvimento dêste capítulo.

No §1 daremos os principais conceitos primitivos e alguns dos axiomas desta teoria; introduziremos também a noção de subconjunto e as operações de intersecção, reunião e complementação. Após introduzir as noções de par ordenado e de produto cartesiano (§2) veremos as propriedades mais importantes das relações de equivalência e de ordem. Finalmente, no §3, consideraremos o conceito fundamental de aplicação.

§1 - CONJUNTOS

1.1 - RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

As seguintes noções serão admitidas como conceitos primitivos e, portanto, não serão definidas:

relação de igualdade
elemento (ou objeto)
conjunto
relação de pertinência.

Procuremos, no entanto, explicar em têrmos intuitivos o significado destas noções. Se dois símbolos a e b representam o mesmo elemento, escrevemos

$$a = b$$

e dizemos «a é igual a b»; o símbolo $=$ é denominado *sinal de igualdade*. A negação de $a = b$ será indicada por $a \neq b$ (leia-se: a é diferente de b); com isto queremos dizer que os símbolos a e b não representam o mesmo elemento. Admitiremos que a relação de igualdade seja reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, quaisquer que sejam os símbolos a, b e c, temos

1) $a = a$ (propriedade reflexiva);
2) se $a = b$, então $b = a$ (propriedade simétrica);
3) se $a = b$ e se $b = c$, então $a = c$ (propriedade transitiva).

Intuitivamente imagina-se um conjunto como sendo formado ou constituído por diversos elementos ou seja como uma coleção de elementos; aqui não estamos pretendendo definir o conceito de conjunto pois substituímos, simplesmente, a palavra «conjunto» pelo sinônimo «coleção». Em geral, quando se considera um objeto matemático como sendo um conjunto, êle é representado por uma letra latina maiúscula e seus elementos por letras latinas minúsculas; evidentemente, esta regra não deve ser aceita num sentido rígido.

Para indicar que um elemento x faz parte de um conjunto X usaremos a notação

$$x \in X,$$

que deverá ser lida «x é elemento do conjunto X» ou «x pertence a X». A negação de $x \in X$ será representada por $x \notin X$ (leia-se: x não é elemento do conjunto X ou x não pertence a X).

Admitiremos que dois conjuntos A e B são iguais se, e sòmente se, todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A. Podemos dizer, abreviadamente, que $A = B$ se, e sòmente se, as relações

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B$$

são equivalentes.

Êstes enunciados nos mostram que um conjunto fica determinado pelos seus elementos e ao mesmo tempo nos dão uma regra sôbre o uso do símbolo $\in$. É evidente que a relação de igualdade entre conjuntos é reflexiva, simétrica e transitiva.

1.2 - SUBCONJUNTOS

DEFINIÇÃO 1 - Sejam A e B dois conjuntos; diz-se que A é *subconjunto* de B se, e sòmente se, todo elemento de A também é elemento de B.

Usaremos a notação $A \subset B$
para indicar que A é subconjunto de B; neste caso também diremos que A *é uma parte de* B, ou, que A *está contido em* B, ou ainda, que B *contém* A. Se $A \subset B$ também escreveremos $B \supset A$ (leia-se: B contém A). O símbolo $\subset$ é denominado *sinal de inclusão*. Se $A \subset B$ e se $A \neq B$, diremos que A *é um subconjunto próprio de* B, ou, que A *é uma parte própria de* B, ou ainda, que A *está contido pròpriamente em* B. Notemos que A é uma parte própria de B se, e sòmente se, todo elemento de A é elemento de B e existe um elemento de B que não pertence a A.

Uma vez introduzido o sinal de inclusão $\subset$, a noção de igualdade entre conjuntos pode ser posta sob a forma

$A = B$ se, e sòmente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

É fácil verificar que a relação de inclusão é reflexiva e transitiva, isto é, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, tem-se

1) $A \subset A$ (propriedade reflexiva);
2) se $A \subset B$ e se $B \subset C$, então, $A \subset C$ (propriedade transitiva).

A negação de $A \subset B$ será indicada por $A \not\subset B$ (leia-se: A não está contido em B, ou, A não é subconjunto de B, ou ainda, A não é parte de B). Notemos que $A \not\subset B$ significa que existe um elemento a tal que $a \in A$ e $a \notin B$. Portanto, as relações $A \subset B$ e $B \not\subset A$ significam que A é parte própria de B.

EXEMPLO 1 - Indiquemos por $\boldsymbol{N}$ o conjunto de todos os números naturais $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$
e por $\boldsymbol{Z}$ o conjunto de todos os números inteiros

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

Temos $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, o que traduz a afirmação: todo número natural é um número inteiro. Observemos que $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{Z}$, pois, por exemplo, $-1 \in \boldsymbol{Z}$ e $-1 \notin \boldsymbol{N}$; portanto, $\boldsymbol{N}$ é uma parte própria de $\boldsymbol{Z}$.

EXEMPLO 2 - Indiquemos por $\boldsymbol{Q}$ o conjunto de todos os números racionais, isto é, o conjunto de todos os números da forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Temos $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, pois, todo número inteiro a pode ser representado sob a forma $\frac{a}{1}$.

Além disso, $\boldsymbol{Z}$ é parte própria de $\boldsymbol{Q}$, pois, por exemplo, $\frac{1}{2}\in\boldsymbol{Q}$ e $\frac{1}{2}\notin\boldsymbol{Z}$. Em outras palavras podemos dizer que todo número inteiro é um número racional e que existem números racionais que não são números inteiros; isto traduz, simplesmente, a afirmação: $\boldsymbol{Z}$ é parte própria de $\boldsymbol{Q}$. No exemplo anterior tínhamos observado que $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$ e como $\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$ teremos, conforme a propriedade transitiva da inclusão, $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Q}$ e isto significa que todo número natural também é um número racional.

EXEMPLO 3 - Indiquemos por $\boldsymbol{R}$ o conjunto de todos os números reais; já é do conhecimento do leitor que $\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$, isto é, todo número racional é um número real. Além disso, $\boldsymbol{Q}\neq\boldsymbol{R}$, ou seja, $\boldsymbol{Q}$ é uma parte própria de $\boldsymbol{R}$; para chegar a êste resultado demonstra-se, por exemplo, que o número real $\sqrt{2}$ não é racional (ver capítulo III, exercício 117). De acôrdo com o que vimos acima temos as seguintes inclusões próprias

$$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}.$$

Um conjunto é freqüentemente definido como sendo formado por todos os elementos que satisfazem uma dada propriedade P; assim, a notação

$$\{x \mid x \text{ satisfaz } P\}$$

indica o conjunto de todos os elementos x que satisfazem a propriedade P. No caso particular em que todos os elementos x pertençam a um dado conjunto E, indicaremos o subconjunto de E formado por todos os elementos que satisfazem a propriedade P por $\{x\in E \mid x \text{ satisfaz } P\}$.
Em cada caso a barra vertical $\mid$ deve ser lida «tal que».

EXEMPLO 4 - O conjunto de todos os números naturais que satisfazem a propriedade «n é divisível por 2», ou seja, o conjunto de todos os números naturais pares é indicado por

$$\{n\in\boldsymbol{N} \mid n \text{ é divisível por } 2\}$$

ou

$$\{n\in\boldsymbol{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

EXEMPLO 5 - Consideremos o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais e a propriedade «$x\in\boldsymbol{R}$ e x não é racional». Obtém-se assim um subconjunto A de $\boldsymbol{R}$ que pode ser indicado por

$$A=\{x\in\boldsymbol{R} \mid x \text{ é irracional}\};$$

diz-se, neste caso, que A é o conjunto dos números irracionais.

1.3 - COMPLEMENTAR

Seja A uma parte de um conjunto E e seja A' o subconjunto, de E, formado por todos os elementos x tais que $x\notin A$:

$$A'=\{x\in E \mid x\notin A\}.$$

O conjunto A' é denominado *complementar de A em E* ou *complemento de A em E* e será indicado por

$$\mathbf{C}_E A.$$

Quando o conjunto E está fixado diremos, simplesmente, que $\mathbf{C}_E A$ é o *complementar de A* ou o *complemento de A* e, neste caso, simplifica-se a notação escrevendo-se $\mathbf{C}A$.

EXEMPLO 6 - Indicando-se por A o conjunto de todos os números naturais pares (exemplo 4), seu complementar em $\boldsymbol{N}$ é o conjunto dos números naturais ímpares

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{N}} A=\{x\in\boldsymbol{N} \mid x \text{ é ímpar}\}.$$

EXEMPLO 7 - Com as notações do exemplo 5, o conjunto dos números irracionais é o complementar em $\boldsymbol{R}$ do conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais.

TEOREMA 1 - Se A e B são duas partes quaisquer de um conjunto E, temos

a) se $A\subset B$, então, $\mathbf{C}B\subset\mathbf{C}A$;
b) $\mathbf{C}(\mathbf{C}A)=A$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Seja x um elemento qualquer de E e suponhamos que $x\in\mathbf{C}B$; conforme a definição de complementar, temos $x\notin B$. Ora, por hipótese, $A\subset B$ e como $x\notin B$ também temos $x\notin A$, logo,

$$x\in E \text{ e } x\notin A,$$

de onde vem $x\in\mathbf{C}A$ e portanto $\mathbf{C}B\subset\mathbf{C}A$.

b) Para simplificar as notações coloquemos $\mathbf{C}A=A'$. Seja x um elemento qualquer de E e suponhamos que $x\in\mathbf{C}A'$; temos

$$x\in E \text{ e } x\notin A' \qquad (1).$$

Ora, A' é o complementar de A, portanto, de (1) resulta que

$$x\in E \text{ e } x\in A,$$

logo,

$$\mathbf{C}A'\subset A \qquad (2).$$

Por outro lado, seja x um elemento qualquer de E e suponhamos que $x\in A$; como A' é o complementar de A, temos $x\notin A'$ e como $x\in E$, teremos $x\in\mathbf{C}A'$; portanto,

$$A\subset\mathbf{C}A' \qquad (3).$$

As inclusões (2) e (3) nos mostram que $\complement A' = A$, ou seja

$$\complement(\complement A) = A. \qquad \blacksquare$$

Já sabemos que uma das partes de um conjunto E é o próprio conjunto E, portanto, também está definido o complementar de E em E, que será indicado por $\emptyset$ (letra O do alfabeto norueguês). Temos assim

$$\emptyset = \complement_E E = \{x \in E \mid x \notin E\} \qquad (4).$$

Notemos que a definição acima nos mostra que o conjunto $\emptyset$ não possui nenhum elemento e por causa disso êle é denominado *conjunto vazio*. Podemos ver que a definição (4) não depende do conjunto E e que

$$\emptyset \subset X$$

para todo conjunto X. Esta última propriedade caracteriza o conjunto vazio, pois, se um conjunto A é tal que $A \subset X$ para todo conjunto X, tem-se, em particular, $A \subset \emptyset$ e como $\emptyset \subset A$, teremos $A = \emptyset$. Em resumo, existe um único conjunto vazio e êle está contido em qualquer outro conjunto.

O conjunto vazio também pode ser definido por qualquer propriedade contraditória; por exemplo,

$$\emptyset = \{x \in E \mid x \neq x\}.$$

Observemos ainda que em virtude da parte a) do teorema 1, temos $\complement_E \emptyset = E$.

Seja E um conjunto não vazio e seja a um elemento de E; o subconjunto $\{x \in E \mid x = a\}$ é indicado por $\{a\}$ e é denominado *conjunto unitário determinado pelo elemento* a ou simplesmente *conjunto unitário*. Notemos que $\{x\} \subset E$ para todo elemento x de E.

1.4 - CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

Para todo conjunto E admitiremos que exista um outro conjunto, denotado por $\mathcal{P}(E)$, cujos elementos são as partes de E. Em outros têrmos, dizer que $X \in \mathcal{P}(E)$ é equivalente a dizer $X \subset E$. Diremos que $\mathcal{P}(E)$ é o *conjunto das partes de* E.

Por exemplo, se $E = \emptyset$, então, $\mathcal{P}(E)$ é um conjunto unitário cujo único elemento é o conjunto vazio, isto é,

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Notemos que $E \in \mathcal{P}(E)$ para todo conjunto E, logo, todo conjunto também pode ser considerado como elemento de um outro conjunto e isto nos mostra que a regra de notação dada no §1.1 não podia ser mesmo tomada num sentido rígido.

1.5 - INTERSECÇÃO E REUNIÃO

Neste número suporemos que todos os conjuntos considerados sejam partes de um mesmo conjunto U, denominado *conjunto-universo*.

DEFINIÇÃO 2 - Chama-se *intersecção* de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos x, de U, tais que $x \in A$ e $x \in B$.

Indicaremos a intersecção de A e B por

$$A \cap B,$$

símbolo êste que deve ser lido «A intersecção B», ou, abreviadamente, «A inter B»; portanto,

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

EXEMPLO 8 - Tomemos $U = \boldsymbol{N}$ e sejam

$$A = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 2\}$$

e

$$B = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}.$$

Observando-se que um número natural x é múltiplo de 2 e de 3 se, e sòmente se, x é múltiplo de 6, temos

$$A \cap B = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 6\}.$$

É imediato que

$$A \cap B \subset A \quad \text{e} \quad A \cap B \subset B,$$

quaisquer que sejam as partes A e B de U. Recìprocamente, se X é uma parte de U e se $X \subset A$ e $X \subset B$, então, $X \subset A \cap B$. Por causa disso se diz que $A \cap B$ é a *maior* parte de U que está simultâneamente contida em A e em B.

Se $A \cap B = \emptyset$, isto é, se os conjuntos A e B não têm elementos comuns, diremos que A e B são *disjuntos*.

EXEMPLO 9 - Para tôda parte A de U, A e $\complement A$ são disjuntos.

EXEMPLO 10 - Tomemos $U = \boldsymbol{N}$ e sejam

$$A = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ é primo}\}$$

e

$$B = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ é quadrado perfeito}\};$$

é imediato que A e B são disjuntos.

DEFINIÇÃO 3 - Chama-se *reunião* de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos x, de U, tais que $x \in A$ ou $x \in B$.

Indicaremos a reunião de A e B por

$$A \cup B$$

símbolo êste que deve ser lido «A reunião B», ou, abreviadamente, «A u B»; portanto,

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Convém observar que a palavra *ou* empregada na propriedade que define $A \cup B$ não tem o sentido de exclusão usado na linguagem comum, pois pode acontecer que um elemento x de $A \cup B$ pertença simultâneamente a A e a B.

É imediato que

$$A \subset A \cup B \quad \text{e} \quad B \subset A \cup B$$

quaisquer que sejam as partes A e B de U. Reciprocamente, se X é uma parte de U e se $A \subset X$ e $B \subset X$, então $A \cup B \subset X$. Por causa disso se diz que $A \cup B$ é a *menor* parte de U que contém simultâneamente A e B.

Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 2)$ são partes de U, indicaremos por

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

o conjunto de todos os elementos x, de U, que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A_i $(1 \leq i \leq n)$ e diremos que êste conjunto é a reunião das partes $A_1, A_2, \cdots, A_n$. No caso particular em que cada A_i é um conjunto unitário $\{a_i\}$, com $a_i \in U$, indicaremos sua reunião

$$\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_n\}$$

por

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

e diremos que esta parte é formada pelos elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Notemos que êstes elementos não são necessàriamente distintos dois a dois. Se os elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são distintos dois a dois, diremos que a parte $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ tem n elementos ou que n é o número de elementos de A e usaremos a notação $n = |A|$. Observemos, portanto, que se $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, com $b_i \in U$ para $i = 1, 2, \cdots, m$, então, $|B| \leq m$.

Sejam A e B duas partes quaisquer de U; o subconjunto

$$\{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

é denominado *diferença entre A e B* e será indicado por A-B (leia-se: A menos B). É imediato que

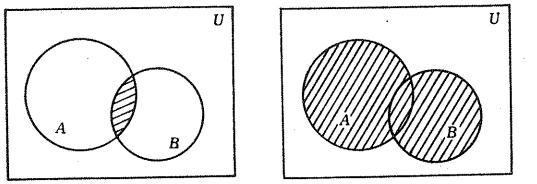
$$A - B = A \cap \complement_U B,$$

logo, se $B \subset A$, temos

$$A - B = \complement_A B,$$

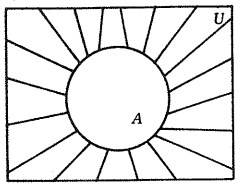
portanto, neste caso, a diferença entre A e B coincide com o conceito de complementar de B em A.

As definições acima podem ser visualizadas pelos diagramas de Venn (fal. 1923). Representa-se o conjunto-universo U por um retângulo e as partes consideradas por círculos contidos neste retângulo; obtêm-se, então, os gráficos seguintes correspondentes às definições de intersecção, reunião, complementar e diferença.

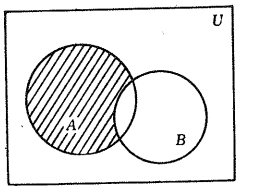


$A \cap B$

$A \cup B$



$\complement_U A$



$A - B$

Fig. 1

TEOREMA 2 - Quaisquer que sejam as partes A, B e C de U, tem-se

a) $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$;

b) $A \cap B = B \cap A$ e
$A \cup B = B \cup A$ (propriedades comutativas);

c) $A \cap U = A$ e $A \cup \emptyset = A$;

d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (propriedades associativas);

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$ e
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (propriedades distributivas).

DEMONSTRAÇÃO - As verificações de a), b) e c) são imediatas. Verificaremos sòmente a primeira parte de e) e deixaremos as outras a cargo do leitor. Seja x um elemento qualquer de U e suponhamos que $x \in A \cap (B \cup C)$, logo,

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B \cup C.$$

De $x \in B \cup C$ resulta $x \in B$ ou $x \in C$ e suponhamos que $x \in B$ (se $x \in C$ a demonstracão é completamente análoga a que de-

senvolveremos abaixo); portanto, temos

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B,$$

logo,

$$x \in A \cap B$$

e como $A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ teremos

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Fica assim demonstrado que

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (5).$$

Por outro lado, seja x um elemento qualquer de U e suponhamos que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$; de acôrdo com a definição 3, temos $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$ e suporemos, por exemplo, que $x \in A \cap B$ (se $x \in A \cap C$, a verificação é completamente análoga a que desenvolveremos abaixo). Daqui resulta

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B$$

e como $B \subset B \cup C$ teremos

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B \cup C,$$

logo,

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

Fica assim demonstrado que

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \qquad (6).$$

As inclusões (5) e (6) nos mostram que de fato vale a primeira igualdade da parte d). ∎

TEOREMA 3 - Quaisquer que sejam as partes A e B de U, têm-se

a) $A \cup \complement A = U$ e $A \cap \complement A = \emptyset$;

b) leis de dualidade:

$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ e $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

DEMONSTRAÇÃO - A verificação de a) é imediata; mostremos, então, que é verdadeira a primeira parte de b). Seja x um elemento qualquer de U e suponhamos que $x \in \complement(A \cup B)$; daqui resulta $x \notin A \cup B$, logo,

$$x \notin A \quad \text{e} \quad x \notin B$$

e como $x \in U$, temos

$$x \in \complement A \quad \text{e} \quad x \in \complement B,$$

portanto,

$$x \in \complement A \cap \complement B.$$

Fica assim demontrado que

$$\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B \qquad (7).$$

Por outro lado, seja x um elemento qualquer de U e suponhamos que $x \in \complement A \cap \complement B$; daqui resulta

$$x \in \complement A \quad \text{e} \quad x \in \complement B,$$

logo,

$$x \notin A \quad \text{e} \quad x \notin B,$$

de onde vem,

$$x \notin A \cup B$$

e como $x \in U$ teremos

$$x \in \complement(A \cup B).$$

Fica assim demonstrado que

$$\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B) \qquad (8).$$

As inclusões (7) e (8) nos mostram que de fato vale a primeira lei de dualidade. A outra lei de dualidade pode ser obtida desta e do teorema 1. Com efeito, pondo-se $\complement A = A'$ e $\complement B = B'$ teremos, em virtude do teorema 1, a):

$$\complement A' = A \quad \text{e} \quad \complement B' = B.$$

Ora, de acôrdo com o que vimos acima, temos

$$\complement(A' \cup B') = \complement A' \cap \complement B' = A \cap B;$$

portanto, em virtude do teorema 1, a), concluímos que

$$\complement(A \cap B) = A' \cup B' = \complement A \cup \complement B,$$

o que completa a demonstração do teorema 3. ∎

EXERCÍCIOS

Nos problemas que daremos abaixo os conjuntos considerados serão partes de um mesmo conjunto-universo U.

1. Sejam A, B e C três conjuntos.

a) Mostrar que se A é uma parte de B e se B é uma parte própria de C, então A é parte própria de C.

b) Mostrar que se A é uma parte própria de B e se B é uma parte de C, então A é parte própria de C.

2. Verificar a propriedade: se $A \subset B$, então $A \cup C \subset B \cup C$ e $A \cap C \subset B \cap C$.

3. Mostrar que as seguintes condições são equivalentes entre si: a) $A \subset B$; b) $A \cap B = A$; c) $A \cup B = B$; d) $A \cap \complement B = \emptyset$; e) $\complement B \subset \complement A$.

4. Verificar as partes a), b), c) e d) do teorema 2. Verificar a segunda igualdade da parte e) do mesmo teorema.

5. a) Verificar as igualdades $A \cup (B \cap A) = A$ e $A \cap (B \cup A) = A$.

b) Mostrar que se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$, então $B = C$.

6. Mostrar que $B = \complement A$ se, e sòmente se, $A \cup B = U$ e $A \cap B = \emptyset$.

7. Mostrar que se $A \subset C$, então $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

8. Verificar as seguintes igualdades:

a) $A \cup (\complement A \cap B) = A \cup B$;

b) $A \cap (\complement A \cup B) = A \cap B$;

c) $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$;

d) $((A \cap B) \cup (B \cap C)) \cup (C \cap A) = ((A \cup B) \cap (B \cup C)) \cap (C \cup A)$.

9. Utilizar os diagramas de Venn para verificar as igualdades:

a) $A\cap(B\cup(C\cup D)) = (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$;

b) $\complement(A\cup(B\cap C)) = \complement A\cup(\complement B\cup\complement C)$;

c) $(A\cap B)\cup(A-B)\cup(B-A) = A\cup B$.

10. Mostrar que são verdadeiras as seguintes propriedades da diferença entre conjuntos (§ 1.5):

a) $(A-B)\cap(A-C) = A-(B\cup C)$;

b) $(A-C)\cap(B-C) = (A\cap B)-C$;

c) $(A-B)-C = A-(A\cap C)$;

d) $A-(B-C) = (A-B)\cup(A\cap C)$;

e) $A-(B-A) = A$;

f) $A-(A-B) = A\cap B$.

11. Coloquemos por definição $A*B = \complement A\cap\complement B$, quaisquer que sejam as partes A e B de U.

a) Fazer o diagrama de Venn correspondente a $A*B$.

b) Verificar as seguintes igualdades:

1) $A*A = \complement A$; 2) $(A*A)*(B*B) = A\cap B$; 3) $(A*B)*(A*B) = A\cup B$.

12. Se A e B são duas partes quaisquer de U, o conjunto

$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$$

é denominado *diferença simétrica* entre A e B. Representar $A\Delta B$ por meio dos diagramas de Venn. Verificar as seguintes igualdades:

a) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$;

b) $A\Delta B = B\Delta A$;

c) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

d) $A\Delta A = \emptyset$ e $A\Delta\emptyset = A$.

13. Determinar todos os elementos dos seguintes conjuntos (§ 1.4):

a) $\mathcal{P}(\emptyset)$; b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$; c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$; d) $\mathcal{P}(\{a\})$; e) $\mathcal{P}(\{a,b\})$ $(a\neq b)$; f) $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ (a,b e c distintos dois a dois).

14. Sejam A e B dois conjuntos. Mostrar que $\mathcal{P}(A)\subset\mathcal{P}(B)$ se, e sòmente se, $A\subset B$.

15. Sejam A e B duas partes finitas de U. Verificar as seguintes propriedades:

a) se $A\cap B = \emptyset$, então $|A\cup B| = |A|+|B|$;

b) se $A\subset B$, então $|B-A| = |B|-|A|$;

c) $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$.

16. Mostrar que se X é um conjunto finito e com n elementos, então $\mathcal{P}(X)$ é finito e tem 2^n elementos.

17. Seja E um conjunto finito e com n elementos; indicaremos por $\binom{n}{p}$ (leia-se binomial n sôbre p) o número de partes de E que têm exatamente p elementos. Por exemplo, $\binom{n}{p} = 0$ se $p>n$, $\binom{n}{n} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$. Mostrar que se $p\leqslant n$, então

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(p-n)!},$$

onde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ (o símbolo $n!$ deve ser lido «n fatorial» ou «fatorial n»).

§2 - RELAÇÕES

2.1 - PRODUTO CARTESIANO

Admitiremos a noção de par ordenado como conceito primitivo. A cada elemento a e a cada elemento b está associado um terceiro elemento indicado por

$$(a,b)$$

e denominado *par ordenado*, de modo que se tenha

$$(a,b) = (c,d)$$

se, e sòmente se, $a=c$ e $b=d$.

Diremos ainda que a é o *primeiro elemento* e b é o *segundo elemento* do par ordenado (a,b).

OBSERVAÇÕES

1.ª) Notemos que se $a\neq b$, então,

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

e no entanto

$$(a,b)\neq(b,a).$$

No caso em que $a=b$, temos

$$\{a,b\} = \{a\}$$

e

$$(a,b) = (b,a).$$

Portanto, deve-se fazer distinção entre o conjunto $\{a,b\}$ e o par ordenado (a,b).

2.ª) Em lugar de admitir a noção de par ordenado como conceito primitivo poderíamos tomar como definição de (a,b) o conjunto

$$\{\{a\},\{a,b\}\}$$

cujos elementos são $\{a\}$ e $\{a,b\}$. Neste caso, deve-se verificar o axioma de igualdade de dois pares ordenados, ou seja, mostrar que

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \qquad (9)$$

se, e sòmente se, $a=c$ e $b=d$. É imediato que se $a=c$ e $b=d$, então, vale a igualdade (9); suponhamos, portanto, que seja verdadeira a igualdade (9). Se $a=b$ temos $\{a,b\}=\{a\}$, logo, (9) se reduz a

$$\{\{a\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\},$$

de onde vem, $\{c\}=\{c,d\}=\{a\}$ e portanto $c=d=a$ e fica assim demonstrado que $a=c$ e $b=d$. Supondo-se que $a\neq b$, de (9) vem

$$\{a\}=\{c\} \quad \text{ou} \quad \{a\}=\{c,d\};$$

neste último caso teríamos $a=c=d$ e a igualdade (9) se reduziria a

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,c\}\}=\{\{c\}\},$$

logo, $\{a\}=\{a,b\}$ o que não seria possível, pois, por hipótese, $a\neq b$. Portanto, temos $\{a\}=\{c\}$, de onde vem, $a=c$ e então

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\},\{a,d\}\};$$

como $\{a,b\}\neq\{a\}$ resulta desta última igualdade

$$\{a,b\}=\{a,d\},$$

logo, $b=d$. Fica assim demonstrado que $a=b$ e $c=d$. ∎

DEFINIÇÃO 4 - Chama-se *produto cartesiano* de um conjunto não vazio A por um conjunto não vazio B ao conjunto de todos os pares ordenados (a,b) com primeiro elemento em A e segundo elemento em B.

Indicaremos o produto cartesiano de A por B pela notação

$$A\times B$$

símbolo êste que deve ser lido «A cartesiano B» ou «A por B»; portanto, $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ e } b\in B\}$.

Completa-se a definição 4 colocando-se $A\times B=\emptyset$ se $A=\emptyset$ ou $B=\emptyset$.

No caso particular do produto cartesiano $A\times A$, de um conjunto A por si mesmo, a parte

$$\Delta_A=\{(a,b)\in A\times A \mid a=b\}$$

é denominada *diagonal* de $A\times A$.

EXEMPLO 11 - Considerando-se as seguintes partes

$$A=\{1,3\} \quad \text{e} \quad B=\{1,2,3\}$$

do conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais, temos

$$A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

e

$$B\times A=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}.$$

Êste exemplo nos mostra que, em geral, $A\times B\neq B\times A$.

Os produtos acima podem ser representados gràficamente do seguinte modo

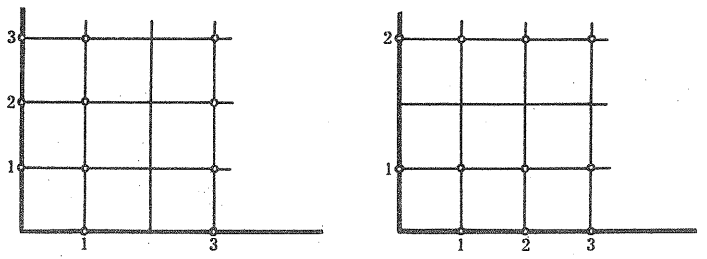


Fig. 2

EXERCÍCIOS

18. Representar, gràficamente, no plano da Geometria Analítica, os seguintes produtos cartesianos $A\times B$, $B\times A$, $A\times C$, $C\times A$, $B\times C$, e $C\times B$, onde

$A=\{1,2,3,4\}$

$B=\{x\in R \mid 1\leq x\leq 2\}$

$C=\{x\in R \mid 1\leq x\leq 2\}\cup\{x\in R \mid -2\leq x\leq -1\}$.

19. Mostrar que se $A\subset C$ e se $B\subset D$, então $A\times B\subset C\times D$. Recìprocamente, de $A\times B\subset C\times D$ resulta $A\subset C$ e $B\subset D$? Em que condições sôbre A, B, C e D esta propriedade é verdadeira?

20. Sejam A, B e C partes de um mesmo conjunto U; mostrar que

a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

Dar um exemplo para mostrar que a igualdade

$$A\cup(B\times C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

nem sempre é verdadeira.

21. Sejam E e F dois conjuntos e sejam A e B duas partes quaisquer de E; C e D duas partes quaisquer de F. Mostrar que

a) $(E\times F)-(A\times C)=[(E-A)\times F]\cap[E\times(F-C)]$;

b) $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$;

c) $(A\times C)\cup(B\times D)\subset(A\cup B)\times(C\cup D)$.

Dar um exemplo para que a inclusão dada c) é, em geral, uma inclusão própria.

22. Determinar tôdas as partes de $\mathcal{P}(A\times A)$, $\mathcal{P}(A\times B)$, onde $A=\{1,2\}$ e $B=\{3\}$.

23. Se a, b e c são três elementos, o par ordenado $((a,b),c)$ é denominado terna ordenada e é indicado por (a,b,c). Mostrar que $(a,b,c)=(a',b',c')$ se, e sòmente se, $a=a'$, $b=b'$ e $c=c'$.

24. Determinar o número de elementos de $A\times B$ quando A e B são finitos.

2.2 - DEFINIÇÃO DE RELAÇÃO E EXEMPLOS

DEFINIÇÃO 5 - Sejam E e F dois conjuntos e seja $E\times F$ o produto cartesiano de E por F. Todo subconjunto R de $E\times F$ é denominado *relação de E em F* (ou relação entre elementos de E e elementos de F). Se R é uma relação de E em E, isto é, se R é um subconjunto de $E\times E$, diz-se, simplesmente, que R é uma *relação sôbre E*.

Se R é uma relação de E em F usaremos a notação aRb (leia-se: «a está na relação R com o elemento b» ou, simplesmente, «aRb») para indicar que $(a,b)\in R$, significando assim que o elemento a está na relação R com o elemento b. A

negação de aRb será indicada por $a\not R b$ (leia-se «a não está na relação R com o elemento b» ou, simplesmente, «a não R b»); portanto, $a\not R b$ significa que $(a,b)\notin R$.

EXEMPLO 12 - Consideremos o produto cartesiano $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ do conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros por si mesmo e seja

$$R=\{(x,y)\in\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z} \mid x^2+y^2=25\},$$

logo, a parte R é formada pelos seguintes pares ordenados (0,5), (5,0), (0,-5), (-5,0), (3,4), (4,3), (-3,4), (4,-3), (-4,3), (3,-4), (-3,-4) e (-4,-3). Conforme a definição 5, R é uma relação sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$. Temos, por exemplo, $3R4$, $3R(-4)$, $0R5$, $1\not R 3$, $2\not R y$ para todo y em $\boldsymbol{Z}$. Gràficamente esta relação pode ser representada por

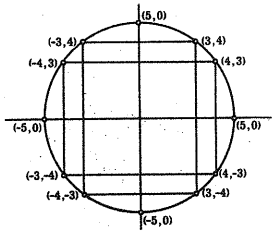


Fig. 3

EXEMPLO 13 - Consideremos no produto cartesiano $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ o subconjunto $R=\{(a,b)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N} \mid a\leqslant b\}$. Obtemos assim uma relação R sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais, que é denominada relação de ordem (ver o §2.4).

EXEMPLO 14 - Seja $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ o produto cartesiano do conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais por si mesmo e seja

$$C=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid x^2+y^2=25\}.$$

O conjunto C define uma relação sôbre $\boldsymbol{R}$ que é representada gràficamente por uma circunferência de centro na origem e de raio 5.

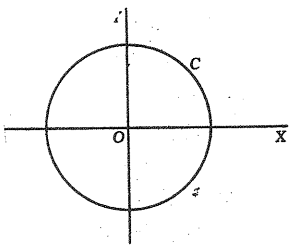


Fig. 4

EXEMPLO 15 - Com as notações do exemplo anterior, o subconjunto $S=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid 2x+4y-6\geqslant 0\}$ é uma relação sôbre $\boldsymbol{R}$; sua representação gráfica é o semi-plano fechado S cuja origem é a reta r de equação $2x+3y-6=0$ e tal que $0\notin S$.

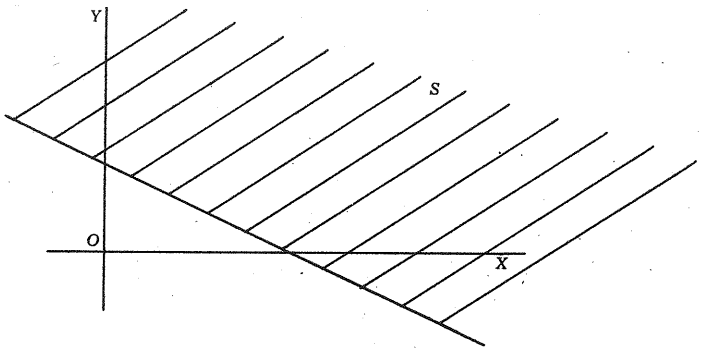


Fig. 5

No caso em que E e F são finitos pode-se representar uma relação R de E em F por meio de setas fazendo-se a seguinte convenção: um elemento x de E é ligado por uma seta com um elemento y de F se, e sòmente se, $(x,y)\in R$. Por exemplo, consideremos os conjuntos $E=\{1,2,3,4,5\}$ e $F=\{a,b,c,d,e,f\}$; a relação

$$R=\{(1,a),(1,d),(2,a),(2,e),(3,d)\}$$

é representada por

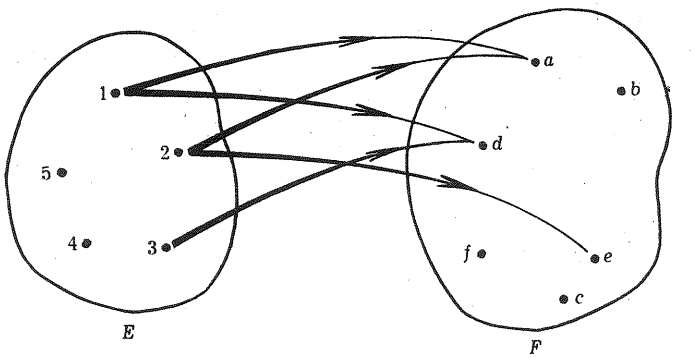


Fig. 6

Vejamos ainda um outro exemplo. Seja $E=\{1,2,3,4,5\}$ e consideremos a seguinte relação sôbre E:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(4,3)\}.$$

Conforme a convenção feita acima, a representação gráfica de R pode ser dada por

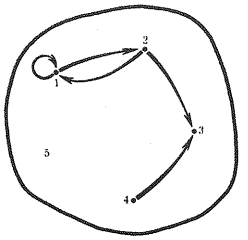


Fig. 7

EXERCÍCIOS

25. Determinar tôdas as relações sôbre o conjunto $E=\{a,b\}$, onde $a \neq b$.

26. Utilizando o processo dado pela Fig. 7 representar a relação definida no exemplo 12.

27. Representar pelo mesmo processo gráfico a relação R sôbre o conjunto $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, onde aRb se, e sòmente se, a divide b.

28. Se R é uma relação de E em F, então o conjunto $D(R)$ de todos os elementos x de E tais que exista $y \in F$ tal que $(x,y) \in R$ é denominado *domínio* de R. Por outro lado, o conjunto $I(R)$ de todos os elementos y de F tais que exista x em E tal que $(x,y) \in R$ é denominado *imagem* de R. Determinar o domínio e a imagem das relações definidas nos exemplos 12, 13, 14 e 15.

29. Se R é uma relação sôbre um conjunto E, o que significa a inclusão $\Delta_E \subset R$?

2.3 - RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

DEFINIÇÃO 6 - Diz-se que uma relação R sôbre um conjunto E é uma *relação de equivalência* se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

E1: para todo a em E, tem-se aRa, (propriedade reflexiva);

E2: quaisquer que sejam a e b em E, se aRb, então bRa (propriedade simétrica);

E3: quaisquer que sejam a, b e c em E, se aRb e se bRc, então aRc (propriedade transitiva).

Veremos a seguir alguns exemplos de relações de equivalência e ao mesmo tempo mostraremos que, em geral, as condições E1, E2 e E3 são independentes.

EXEMPLO 16 - Consideremos o conjunto E de tôdas as retas de um plano α e seja R a relação

XRY se, e sòmente se, $X=Y$ ou $X \cap Y = \emptyset$.

A relacão R é, simplesmente, a «relação de paralelismo da Geometria Plana» e sabemos que R é uma relação de equivalência sôbre o conjunto E.

EXEMPLO 17 - Com as notações do exemplo anterior, consideremos a relação R definida por

XRY se, e sòmente se, X é perpendicular a Y.

Esta é a relação de perpendicularismo da Geometria Plana e sabemos que R só satisfaz a propriedade simétrica, logo, R não é uma relação de equivalência sôbre E.

EXEMPLO 18 - Seja E um dado conjunto não vazio de pessoas e consideremos a relação R definida por: xRy se, e sòmente se, x e y são irmãos. É imediato, com o conceito usual de «irmão», que só é válida a propriedade simétrica. Portanto, R não é uma relação de equivalência.

EXEMPLO 19 - Consideremos o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros e seja $m \neq 0$ um inteiro dado. Coloquemos, por definição xRy se, e sòmente se, $x-y$ é divisível por m. Verificaremos detalhadamente no §2.6 do capítulo III, que R é uma relação de equivalência (denominada congruência módulo m).

EXEMPLO 20 - Seja $\mathcal{P}(E)$ o conjunto das partes de um conjunto E e consideremos a relação R sôbre $\mathcal{P}(E)$ definida por

XRY se, e sòmente se, $X \subset Y$.

Portanto, R é a relação de inclusão definida sôbre $\mathcal{P}(E)$. Conforme vimos no §1.2, R é reflexiva e transitiva e é fácil ver que vale a propriedade simétrica se, e sòmente se, E é vazio. Portanto, se $E \neq \emptyset$ a relação de inclusão não é uma relação de equivalência sôbre $\mathcal{P}(E)$.

Seja R uma relação de equivalência sôbre um conjunto não vazio E; se a e b são dois elementos de E tais que aRb, diremos que a *é equivalente a* b *módulo* R ou que a *é equivalente a* b *segundo* R e usaremos a notação

$$a \equiv b \ (\text{mod. } R).$$

Anàlogamente, $a \not\equiv b$ é substituída por

$$a \not\equiv b \pmod{R},$$

que deve ser lida «a não é equivalente a b módulo R». Escreveremos, simplesmente, $a \equiv b$ ou $a \not\equiv b$, quando não houver dúvida sôbre a relação de equivalência considerada sôbre o conjunto E.

Seja E um conjunto não vazio e seja R uma relação de equivalência sôbre E. Para todo elemento a de E o conjunto

$$\bar{a} = \{x \in E \mid x \equiv a \pmod{R}\}$$

é denominado *classe de equivalência módulo* R determinada pelo elemento a e êste elemento, por sua vez, é chamado *representante* da classe de equivalência $\bar{a}$. Notemos que $\bar{a}$ é um subconjunto de E, ou seja, $\bar{a} \in \mathcal{P}(E)$ e que $\bar{a} \neq \emptyset$, pois, conforme a propriedade reflexiva, temos $a \in \bar{a}$. Indicaremos por E/R o conjunto de tôdas as classes de equivalência módulo R e diremos que E/R é o *conjunto quociente de* E *pela relação de equivalência* R.

TEOREMA 4 - Seja R uma relação de equivalência sôbre um conjunto não vazio E e sejam a e b dois elementos quaisquer de E. As seguintes condições são equivalentes entre si:

1) $a \equiv b \pmod{R}$;
2) $a \in \bar{b}$;
3) $b \in \bar{a}$;
4) $\bar{a} = \bar{b}$;

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que 1) implica 2) pela definição de classe de equivalência. De 2) resulta que $a \equiv b \pmod{R}$, logo, pela simetria, $b \equiv a \pmod{R}$ e portanto $b \in \bar{a}$; fica assim demonstrado que 2) implica 3). De 3) resulta que $b \equiv a \pmod{R}$, logo, de acôrdo com as propriedades simétrica e transitiva, temos $x \equiv a \pmod{R}$ se, e sòmente se, $x \equiv b \pmod{R}$; portanto, $\bar{a} = \bar{b}$. Finalmente, supondo-se que 4) seja verdadeira e notando-se que $a \in \bar{a}$ teremos $a \in \bar{b}$, portanto, $a \equiv b \pmod{R}$. ∎

O teorema acima nos mostra, em particular, que se $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, então $\bar{a} = \bar{b}$, isto é, se duas classes de equivalência têm um elemento comum, então elas coincidem. Um outro modo de enunciar esta propriedade é o seguinte: duas classes de equivalência distintas são disjuntas. Resulta ainda do mesmo teorema que se x é um elemento qualquer da classe de equivalência $\bar{a}$, então, $\bar{x} = \bar{a}$, ou seja, todo elemento de uma classe de equivalência é um representante dessa classe.

EXEMPLO 21 - Com as mesmas notações do exemplo 16, a classe $\bar{X}$ determinada por uma reta X, de E, é o conjunto de tôdas as retas contidas no plano α e que são paralelas à reta X. Diz-se, neste caso, que $\bar{X}$ é a direção da reta X e o conjunto quociente E/R passa a ser denominado conjunto das direções do plano α. Notemos que duas retas A e B têm a mesma direção se, e sòmente se, $\bar{A} = \bar{B}$, ou seja, se, e sòmente se, $A // B$. Como uma classe de equivalência $\bar{X}$ fica determinada por qualquer um de seus representantes resulta que para determinar a direção da reta X basta fixar qualquer reta paralela a X podendo-se, em particular, fixar-se a própria reta X.

Outras propriedades das relações de equivalência serão dadas no § 3.3.

EXERCÍCIOS

30. Determinar tôdas as relações de equivalência R sôbre o conjunto $E = \{0,1,2\}$ e em cada caso determinar o conjunto quociente E/R.

31. Dar exemplos de relações R sôbre o conjunto $E = \{0,1,2\}$ tais que

a) R satisfaz E1, E2 e E3;
b) R satisfaz E1, mas não satisfaz E2 e nem E3;
c) R verifica E2, mas não verifica E1 e nem E3;
d) R satisfaz E3, mas não satisfaz E1 e nem E2;
e) E1 e E2, mas não verifica E3;
f) E1 e E3, mas não verifica E2;
g) E2 e E3, mas não verifica E1.

Nota: Êste exercício nos mostra que, de fato, as condições E1, E2 e E3 são independentes entre si.

32. Seja E o conjunto das retas de um plano α, seja p um ponto dado de α e seja A uma reta dada contida em α. Verificar quais das condições E1, E2 e E3 são verdadeiras para as seguintes relações R definidas sôbre E (X e Y indicam duas retas quaisquer de E):

a) XRY se, e sòmente se, X não é paralela a Y;
b) XRY se, e sòmente se, X é perpendicular a Y ou X é paralela a Y;
c) XRY se, e sòmente se, X e Y se cortam num ponto de A;
d) XRY se, e sòmente se, X e Y passam pelo ponto p;
e) XRY se, e sòmente se, X passa pelo ponto p e Y corta a reta A.

33. Seja B uma parte de um conjunto E e consideremos a relação R sôbre $\mathcal{P}(E)$ definida por XRY se, e sòmente se, $X \cap B = Y \cap B$. Mostrar que R é uma relação de equivalência.

34. Se uma relação R sôbre um conjunto não vazio E satisfaz as condições E2 e E3 e se para todo $x \in E$ existe $y \in E$ tal que xRy, então R é uma relação de equivalência.

2.4 - RELAÇÕES DE ORDEM

DEFINIÇÃO 7 - Diz-se que uma relação R sôbre um conjunto E é uma *relação de ordem* se, e sòmente se, as seguintes condições estão verificadas

O1: para todo $x \in E$, tem-se xRx (propriedade reflexiva);

O2: quaisquer que sejam x e y em E, se xRy e se yRx, então $x = y$ (propriedade anti-simétrica);

O3: quaisquer que sejam x, y e z em E, se xRy e se yRz, então xRz (propriedade transitiva).

Se R é uma relação de ordem sôbre E diz-se, simplesmente, que R é uma *ordem sôbre* E. Neste caso, diremos que E é um *conjunto ordenado pela ordem* R ou que E é um *conjunto parcialmente ordenado pela ordem* R ou que *a ordem* R *define uma estrutura de conjunto ordenado sôbre* E. Portanto, uma *estrutura ordenada* é um par ordenado (E,R), onde E é um conjunto e R é uma ordem sôbre E. Se estiver fixada uma determinada ordem R sôbre E diremos que E é um *conjunto ordenado* (suprimindo-se, portanto, a referência sôbre a ordem R fixada sôbre E).

Se uma ordem R, sôbre um conjunto E, verificar a condição

O4: quaisquer que sejam x e y em E, tem-se xRy ou yRx;

diremos que R é uma *ordem total* sôbre E ou que E é um *conjunto totalmente ordenado* pela ordem R.

Seja E um conjunto ordenado pela ordem R e ponhamos, por definição, $aR'b$ se, e sòmente se, bRa.

É imediato que R' também é uma ordem sôbre E, denominada *ordem oposta* de R. Se a ordem R é total, então, sua ordem oposta R' também é total.

Seja E um conjunto ordenado pela ordem R e consideremos a relação R^* sôbre E definida por

xR^*y se, e sòmente se, xRy e $x \neq y$.

Verifica-se, fàcilmente, que R^* satisfaz as seguintes condições:

O1′: para todo x em E tem-se $x\not R^* x$;

O2′: quaisquer que sejam x e y em E, se xR^*y, então $y\not R^* x$;

O3′: quaisquer que sejam x, y e z em E, se xR^*y e se yR^*z, então xR^*z.

Uma relação R^* que satisfaz as condições O1′, O2′ e O3 é denominada *ordem estrita* sôbre E; no caso em questão diz-se que R^* é a *ordem estrita associada à ordem* R. Reciprocamente, se S é uma ordem estrita sôbre E, isto é, se S satisfaz as condições O1′, O2′ e O3, então, a relação R definida por

xRy se, e sòmente se, $x = y$ ou xSy

é uma ordem sôbre E, cuja ordem estrita correspondente é a própria S: $R^* = S$. É imediato que se a ordem R é total, então, a ordem estrita associada a R também é total. Para uma ordem total R a condição O4 pode ser enunciada sob a forma (lei de tricotomia): quaisquer que sejam x e y em E, tem-se xR^*y, ou, $x = y$, ou, yR^*x.

Uma relação de ordem é, em geral, indicada com o símbolo $\leqslant$ (leia-se: menor ou precede); assim $a \leqslant b$ significa que «a é menor do que b» ou «a precede b». Neste caso, a ordem oposta de $\leqslant$ é indicada por $\geqslant$ (leia-se: maior ou sucede); assim $a \geqslant b$ deverá ser lido «a é maior do que b» ou «a sucede b».

A ordem estrita associada à ordem $\leqslant$ é indicada por $<$ (leia-se: estritamente menor ou precede estritamente); portanto, $a < b$ significa que $a \leqslant b$ e $a \neq b$ e $a < b$ deverá ser lido «a é estritamente menor do que b» ou «a precede estritamente b».

A relação oposta de $<$ é indicada por $>$ (leia-se: estritamente maior ou sucede estritamente); assim $a > b$ deverá ser lido: «a é estritamente maior do que b» ou «a sucede estritamente b».

Podemos representar gràficamente os elementos de um conjunto finito E, ordenado por uma ordem R, de tal modo que a própria figura nos indique quando se tem xRy ou quando x e y não são comparáveis (isto certamente acontece se R não é total). Para isso indicamos cada elemento de E por um ponto ou por um pequeno círculo e ligamos o círculo que representa x com o círculo que representa y por um

segmento ascendente se, e sòmente se, xRy. As figuras abaixo esclarecem melhor esta descrição.

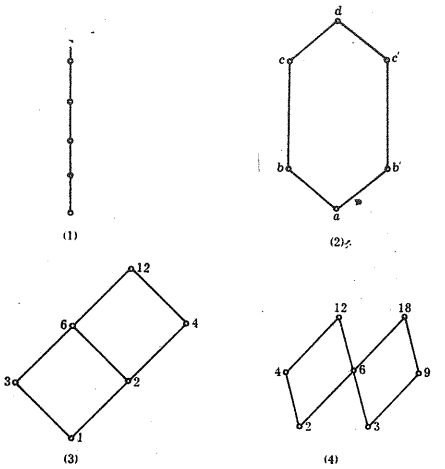


Fig. 8

Assim a ordem definida em (1) é total. Em (2) temos

$$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \quad \text{e} \quad a \leqslant b' \leqslant c' \leqslant d$$

e as outras desigualdades que se obtém destas pela aplicação da propriedade transitiva. As figuras (3) e (4) serão explicadas nos exemplos 25 e 26 que daremos a seguir.

Exemplo 22 - Sabemos que o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais ou o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros podem ser totalmente ordenados. O mesmo vale para o conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais ou o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais.

Exemplo 23 - Consideremos a relação de inclusão $\subset$ definida sôbre $\mathcal{P}(E)$ (ver exemplo 20). É imediato que $\mathcal{P}(E)$ está parcialmente ordenado por essa relação e diremos, então, que o conjunto $\mathcal{P}(E)$ está ordenado por inclusão. A ordem oposta de $\subset$ é $\supset$. Notemos que esta ordem é total se, e sòmente se, o conjunto E tem no máximo um elemento.

Exemplo 24 - Consideremos a relação de divisibilidade sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais: $a|b$ se, e sòmente se, existe $c \in \boldsymbol{N}$ tal que $b = ac$ (o símbolo $a|b$ deve ser lido «a divide b»). Verifica-se que se obtém uma ordem sôbre $\boldsymbol{N}$ e que esta ordem não é total.

Exemplo 25 - Consideremos o conjunto dos números naturais que são divisores de 12

$$E = \{1,2,3,4,6,12\}$$

e ordenemos êste conjunto pela relação de divisibilidade: $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $a|b$. Obtém-se, neste caso, uma ordem não total sôbre E que está representada gràficamente na parte (3) da Fig. 8.

Exemplo 26 - Consideremos o conjunto de todos os números naturais que são divisores próprios de 36

$$E = \{2,3,4,6,9,12,18\}$$

e ordenemos E pela relação de divisibilidade. Obtém-se uma ordem não total sôbre E que está representada gràficamente pela parte (4) da Fig. 8.

Exemplo 27 - Consideremos a relação de divisibilidade sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros: $a|b$ se, e sòmente se, existe $c \in \boldsymbol{Z}$ tal que $b = ac$. É facil verificar que valem as propriedades O1 e O3 mas não vale O2, pois, $2|(-2)$ e $(-2)|2$, com $2 \neq -2$. Portanto não se obtém, neste caso, uma relação de ordem sôbre $\boldsymbol{Z}$.

Seja E um conjunto ordenado pela ordem R e seja A um subconjunto de E; definiremos uma relação R_A sôbre A do seguinte modo: se x e y são dois elementos quaisquer de A, colocaremos

$$xR_Ay \text{ se, e sòmente se, } xRy.$$

É imediato que $R_A = R \cap (A \times A)$ e que R_A é uma ordem sôbre a parte A; diz-se que R_A é a *ordem induzida* sôbre A pela ordem R e, reciprocamente, que R é um *prolongamento de* R_A. Evidentemente, se R é uma ordem total, então, R_A também é total. Para simplificar a notação indica-se, em geral, a ordem induzida com o mesmo símbolo que indica a ordem considerada sôbre E.

Definição 8 - Seja E um conjunto ordenado pela ordem $\leqslant$ e seja A uma parte não vazia de E. Diz-se que A é *majorado* se, e sòmente se, existe $b \in E$ tal que $x \leqslant b$, para todo x em A.

Se A é majorado também diremos que A é *limitado superiormente* e qualquer elemento b que satisfaz a condição da definição acima é chamado *majorante* ou *limite superior* de A

Definem-se, anàlogamente, as noções de *conjunto minorado* ou *conjunto limitado inferiormente, minorante* ou *limite inferior.* Se o subconjunto não vazio A fôr limitado superiormente e inferiormente diremos que A é *limitado.*

DEFINIÇÃO 9 - Seja E um conjunto ordenado pela ordem $\leqslant$ e seja A um subconjunto não vazio de E. Diz-se que um elemento m de E é um *mínimo* (resp., *máximo*) de A se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

1) $m \in A$;

2) m é um minorante (resp., majorante de A).

Podemos demonstrar, fàcilmente, que se A tem mínimo m, então êste elemento é único. Com efeito, se m e m' são mínimos de A, temos $m \leqslant m'$ pois m é minorante de A e $m' \in A$; anàlogamente, $m' \leqslant m$ pois m' é minorante de A e $m \in A$, portanto, em virtude da propriedade anti-simétrica, temos $m = m'$.

Se o subconjunto não vazio A tem mínimo, êste elemento será indicado pela notação $\min A$ (leia-se: mínimo de A). Anàlogamente, se A tem máximo, êste elemento será indicado por $\max A$ (leia-se: máximo de A).

EXEMPLO 28 - O conjunto $\mathcal{P}(E)$, ordenado por inclusão (ver o exemplo 23) tem mínimo e máximo que são, respectivamente, o conjunto vazio e E.

EXEMPLO 29 - Consideremos o subconjunto A, de $\mathcal{P}(E)$, formado por tôdas as partes finitas de E e ordenemos $\mathcal{P}(E)$ por inclusão. O conjunto A tem mínimo que é o conjunto vazio; A tem máximo se, e sòmente se, E é um conjunto finito e neste caso E é o máximo de A.

EXEMPLO 30 - O conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais, ordenado pela ordem habitual $\leqslant$, tem mínimo que é o número natural 0; $\boldsymbol{N}$ não tem máximo, pois $n < n+1$ para todo número natural n. Conforme veremos no Capítulo II, §2.1, todo subconjunto não vazio A, de $\boldsymbol{N}$, tem mínimo; êste enunciado é o que se denomina princípio do menor número natural.

EXEMPLO 31 - O conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros, ordenado pela ordem habitual $\leqslant$, não tem mínimo e nem máximo. O mesmo vale para o conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais ou o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais.

EXEMPLO 32 - Consideremos o conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais e seja $A = \{x \in \boldsymbol{Q} \mid 1 < x\}$. É evidente que A é limitado inferiormente e, no entanto, A não tem mínimo, pois para todo a em A tem-se $1 < \frac{1}{2}(1+a) < a$.

DEFINIÇÃO 10 - Diz-se que um conjunto não vazio E, totalmente ordenado pela ordem $\leqslant$, é *bem ordenado* (pela mesma ordem) se, e sòmente se, todo subconjunto não vazio, de E, tem mínimo. Diz-se, neste caso, que $\leqslant$ é uma *boa ordem* sôbre E.

Conforme veremos no Capítulo II, §2.1, o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais, ordenado pela ordem habitual, é bem ordenado. Pode-se demonstrar que tôda ordem total sôbre um conjunto finito e não vazio é uma boa ordem. Em virtude do exemplo 31 concluímos que a ordem habitual sôbre o conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais não é uma boa ordem.

EXERCÍCIOS

35. Determinar tôdas as relações de ordem sôbre o conjunto $E = \{a,b,c\}$, onde a, b e c são distintos dois a dois. Quantas são as ordens totais sôbre E?

36. Ordenar por inclusão o conjunto $\mathcal{P}(E)$, onde E é o conjunto definido no exercício anterior.

37. Determinar o número de ordens totais que se podem definir sôbre um conjunto finito E. Tôda ordem total sôbre E é uma boa ordem?

38. Consideremos a ordem habitual $\leqslant$ sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais e seja $E = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ o produto cartesiano de $\boldsymbol{N}$ por si mesmo.

a) Se (a,b) e (c,d) são dois elementos quaisquer de E colocaremos, por definição,

$$(a,b) R (c,d) \text{ se, e sòmente se, } a \leqslant c \text{ e } b \leqslant d.$$

Mostrar que R é uma relação de ordem sôbre E, que não é total.

b) Se (a,b) e (c,d) são dois elementos quaisquer de E colocaremos, por definição,

$$(a,b) R' (c,d) \text{ se, e sòmente se, } a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b \leqslant d.$$

Mostrar que R' é uma ordem total sôbre E.

39. Seja $\leqslant$ uma ordem sôbre um conjunto E e seja $<$ a ordem estrita associada a $\leqslant$.

a) Mostrar que se $x \leqslant y$ e se $y < z$, então $x < z$.

b) Mostrar que se $x < y$ e se $y \leqslant z$, então $x < z$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

40. Consideremos a relação R, sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros, definida por xRy se, e sòmente se, $x|y$ e $y|x$. Mostrar que R é uma relação de equivalência e determinar o conjunto quociente E/R.

41. Diz-se que uma relação R, sôbre um conjunto E, é uma *pré-ordem* se, e sòmente se, R é reflexiva e transitiva, isto é, se, e sòmente se, R satisfaz as condições O1 e O3 da definição 7. Se R é uma pré-ordem sôbre E colocaremos $aR'b$ se, e sòmente se, aRb e bRa. a) Mostrar que R' é uma relação de equivalência sôbre E. b) Se $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são duas classes de equivalência módulo R', poremos $\bar{a} \leqslant \bar{b}$ se, e sòmente se, aRb. Mostrar que esta definição não depende dos representantes a e b das classes de equivalência $\bar{a}$ e $\bar{b}$, respectivamente. c) Mostrar que $\leqslant$ é uma ordem sôbre o conjunto quociente E/R' (diz-se que $\leqslant$ é a ordem induzida sôbre E/R' pela pré-ordem R).

42. Consideremos o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais, ordenado pela relação de divisibilidade (ver o exemplo 24). a) Mostrar que dados dois números naturais a e b, então $mdc(a,b)$ (máximo divisor comum de a e b) é o máximo do conjunto S de todos os números naturais que são «menores» (segundo esta ordem |) do que a e b. b) Mostrar que $mmc(a,b)$ (mínimo múltiplo comum de a e b) é o mínimo do conjunto M de todos os números naturais que são «maiores» do que a e b.

43. Seja R uma relação de E em F e consideremos o subconjunto

$$R^{-1} = \{(y,x) \in F \times E \mid (x,y) \in R\}$$

que é, evidentemente, uma relação de F em E. R^{-1} é denominada *relação inversa* ou *recíproca* de R; no caso em que $E = F$ também se diz que R^{-1} é a *oposta* de R (nomenclatura esta que já foi utilizada na definição de ordem oposta - ver o §2.4). a) Dados o domínio e a imagem de R, determinar o domínio e a imagem de R^{-1}. b) Mostrar que $(R^{-1})^{-1} = R$. c) Determinar as inversas das relações definidas nos exemplos 12, 13, 14 e 15.

44. Diz-se que uma relação R, sôbre um conjunto E, é *reflexiva* se, e sòmente se, xRx para todo x em E. a) Mostrar que R é reflexiva se, e sòmente se, $\Delta_E \subset R$. b) Determinar $D(R)$ e $I(R)$ no caso em que R é reflexiva.

45. Diz-se que uma relação R, sôbre um conjunto E, é *simétrica* se, e sòmente se, vale a condição E2 da definição 6: quaisquer que sejam x e y em E, se xRy, então, yRx. Mostrar que R é simétrica se, e sòmente se, $R = R^{-1}$.

46. Se R é uma relação de E em F e se S é uma relação de F em G, indicaremos por $S \circ R$ o conjunto de todos os pares ordenados $(x,z) \in E \times G$ tais que exista y em F tal que $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in S$. É imediato que $S \circ R$ é uma relação de E em G, denominada *relação composta de S e R* (observar a ordem!). a) Se R é a relação de paralelismo (ver o exemplo 16) determinar a composta $R \circ R$. b) Se R é uma relação de ordem sôbre E e se R^* é a ordem estrita associada a R, determinar as compostas $R \circ R^*$ e $R^* \circ R$. c) Utilizando o processo gráfico dado no §2.3 (Fig. 6) ilustrar como é que se pode construir $S \circ R$ no caso em que E, F e G são finitos.

47. Com as notações do exercício anterior, mostrar que

$$R \circ \Delta_E = R \quad \text{e} \quad \Delta_F \circ R = R.$$

Em particular, se R é uma relação sôbre E, tem-se

$$R \circ \Delta_E = \Delta_E \circ R = R.$$

48. Seja H um outro conjunto e seja T uma relação de G em H; mostrar que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ (propriedade associativa), onde R e S são as relações consideradas no exercício 46.

49. Com as notações do exercício 46, mostrar que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

50. Diz-se que uma relação R, sôbre um conjunto E, é *transitiva* se, e sòmente se, vale a condição E3 da definição 6. a) Mostrar que R é transitiva se, e sòmente se, $R \circ R \subset R$. b) Mostrar que se R é reflexiva e transitiva, então, $R \circ R = R$. c) Dar um exemplo para mostrar que se pode ter $R \circ R \subset R$ e $R \circ R \neq R$.

51. Seja R uma relação sôbre um conjunto E. Demonstrar que R é uma relação de equivalência se, e sòmente se, $\Delta_E \subset R$, $R = R^{-1}$ e $R \circ R \subset R$.

52. Com as mesmas notações do exercício anterior, mostrar que R é uma relação de equivalência se, e sòmente se, $\Delta_E \subset R$ e $E = R \circ R^{-1}$.

53. Mostrar que uma relação R sôbre um conjunto E é uma relação de ordem se, e sòmente se, $R \cap R^{-1} = \Delta_E$ e $R \circ R = R$.

54. Demonstrar que uma relação R sôbre um conjunto E é uma ordem total se, e sòmente se, $R \cap R^{-1} \subset \Delta_E$, $R \circ R \subset R$ e $R \cup R^{-1} = E \times E$.

§3 - APLICAÇÕES

3.1 - DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

DEFINIÇÃO 11 - Sejam E e F dois conjuntos e seja f uma relação de E em F, isto é, f é um subconjunto do produto cartesiano de E por F. Diz-se que f é uma *aplicação de E em F*, se e sòmente se, estiverem verificadas as seguintes condições

a) para todo x em E existe um elemento y de F tal que $(x,y) \in f$;

b) quaisquer que sejam os elementos x, y e y', com x em E e y e y' em F, se

$$(x,y) \in f \quad \text{e} \quad (x,y') \in f,$$

então $y = y'$.

É imediato que as condições a) e b) da definição acima são equivalentes à seguinte condição

c) para todo x em E existe um único y em F tal que $(x,y) \in f$.

Uma aplicação de E em F também é denominada *função definida em E e com valores em F* apesar de que a palavra função é, em geral, reservada para o caso em que F é um conjunto numérico. O conjunto de tôdas as aplicações de E em F é indicado pela notação F^E (leia-se: F à potência E).

Se f é uma aplicação de E em F e se x é um elemento qualquer de E, então, o único elemento y de F tal que $(x,y)\in f$, ou seja, tal que xfy, será indicado pela notação $f(x)$ (leia-se: «f aplicado a x», ou, «valor de f em x», ou, simplesmente, «f de x») e será denominado *imagem de x pela aplicação f* ou *correspondente de x pela aplicação f* ou ainda *valor de f em x*. O conjunto E também é chamado *campo de definição de f* ou *domínio de f* e também diremos que f *está definida sôbre E*. O conjunto F passa a ser denominado *contra-domínio de f*. Alguns autores também usam as seguintes denominações para E e F, respectivamente, *conjunto de partida* e *conjunto de chegada da aplicação f*.

Notemos que se f é uma aplicação de E em F, então f é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ com x em E; isto corresponde, em outros têrmos, a definir uma aplicação pela idéia familiar de «gráfico de uma função».

Para indicar uma aplicação f de E em F utilizaremos uma das seguintes notações

$$f: E \to F \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{f} F$$

ou ainda

$$x \mapsto f(x) \tag{10}$$

onde x é um elemento qualquer de E.

Para simplificar a linguagem, em lugar de dizer «sejam E e F dois conjuntos e seja f uma aplicação de E em F» diremos, simplesmente, «seja f uma aplicação de E em F», ou, «seja a aplicação $f: E \to F$», ou, «seja a aplicação $E \xrightarrow{f} F$» ou ainda «seja a aplicação $x \mapsto f(x)$ de E em F».

Define-se, em geral, uma aplicação f de E em F mediante uma lei que associa a cada elemento de E um único elemento de F, como sugere a notação (10), apesar de que os têrmos «lei» e «associa» não estão bem definidos. No entanto, êste processo será usado freqüentemente quando não houver dúvida sôbre a definição do valor que f assume em x, onde x é um elemento arbitrário de E.

Uma aplicação f está determinada quando se fixa seu domínio E, seu contra-domínio F e o subconjunto f de $E \times F$ e para estabelecer a igualdade de duas aplicações temos o seguinte

TEOREMA 5 - As aplicações $f: E \to F$ e $g: E \to F$ são iguais se, e sòmente se, $f(x) = g(x)$ para todo x em E.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $f = g$ e seja x um elemento qualquer de E. De acôrdo com a parte a) da definição 11, existe $f(x)$ em F tal que $(x, f(x))\in f$ e existe $g(x)$ em F tal que $(x, g(x))\in g$ e como $f = g$ segue-se que

$$(x, f(x))\in f \quad \text{e} \quad (x, g(x))\in f,$$

de onde vem, $f(x) = g(x)$ em virtude da parte b) da mesma definição. Reciprocamente, suponhamos que $f(x) = g(x)$ para todo x em E; se (x, y) é um elemento qualquer de f, temos $y = f(x)$, logo, $y = g(x)$ e então $(x, y)\in g$. Fica assim demonstrado que $f \subset g$ e de modo completamente análogo demonstra-se que $g \subset f$. ∎

Seja f uma aplicação de E em F: o conjunto de todos os elementos y de F tais que exista x em E tal que $f(x) = y$ é denominado *imagem de f* e será indicado por $Im(f)$ (leia-se: imagem de f). Portanto, a imagem de f é o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de E por f, ou seja, é o conjunto de todos os valores da aplicação f. Notemos que $Im(f) \subset F$ e, em geral, $Im(f) \neq F$.

Pode-se representar, gràficamente, uma função $f: E \to \mathbf{R}$, onde E é uma parte de $\mathbf{R}$, do seguinte modo: considera-se num plano α um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY e o conjunto G de todos os pontos de coordenadas $(x, f(x))$, com $x\in E$. O conjunto G é denominado *gráfico* da função f relativo ao sistema de coordenadas XOY. As condições a) e b) da definição 11 significam que tôda reta r (contida em α) tal que $r // OY$ e r passa por um ponto de E corta o gráfico G num único ponto.

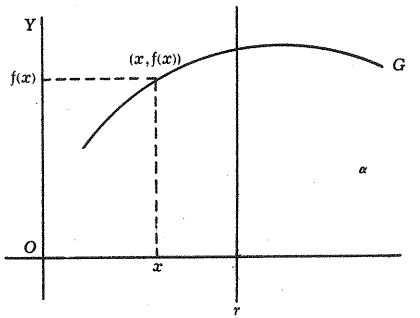


Fig. 9

EXEMPLO 33 - A relação C definida no exemplo 14 não é uma função, pois, temos $3C4$ e $3C(-4)$, o que contradiz a parte b) da definição 11. A condição a) desta definição também não está verificada, pois, não existe y em $\boldsymbol{R}$ tal que $6Cy$. É fácil ver pelo gráfico desta relação C (Fig. 4) que as condições a) e b) não estão verificadas. Com efeito, tôda paralela ao eixo OY que passa por um ponto interno ao intervalo fechado $[-5,5]$ do eixo OX corta a circunferência C em dois pontos distintos e tôda paralela ao eixo OY cuja distância à origem é estritamente maior do que 5 não corta a circunferência C.

EXEMPLO 34 - Consideremos o intervalo fechado $E=[-5,5]$ e seja $C=\{(x,y)\in E\times\boldsymbol{R} \mid x^2+y^2=25\}$.
Obtém-se dêste modo, uma relação C de E em $\boldsymbol{R}$ cujo gráfico é a circunferência C de centro na origem e raio 5 (Fig. 4). Conforme vimos no exemplo anterior, C não é uma aplicação de E em $\boldsymbol{R}$, pois, não está verificada a condição b) da definição 11. Notemos que, neste caso, está verificada a condição a) desta definição.

EXEMPLO 35 - Com as mesmas notações do exemplo anterior, o conjunto

$$S=\{(x,y)\in E\times\boldsymbol{R} \mid x^2+y^2=25 \text{ e } y\geq 0\}$$

é uma função de E em $\boldsymbol{R}$ cujo gráfico é uma semi-circunferência de centro na origem e raio 5 (Fig. 10).

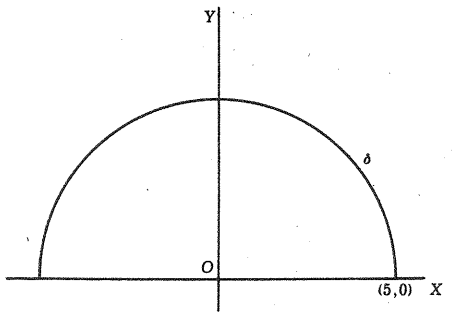


Fig. 10

EXEMPLO 36 - Vamos determinar tôdas as aplicações de $E=\{0,1\}$ em $F=\{a,b\}$, onde $a\neq b$. Se f é uma aplicação de E em F existem y e y' em F tais que $(0,y)\in f$ e

$(1,y')\in f$, pois o domínio de f é $\{0,1\}$; além disso, os pares ordenados $(0,y)$ e $(1,y')$ são os únicos elementos de f e como y e y' são elementos arbitrários de $F=\{a,b\}$, teremos ao todo quatro aplicações de E em F:

$$f_1=\{(0,a),(1,b)\}$$
$$f_2=\{(0,b),(1,a)\}$$
$$f_3=\{(0,a),(1,a)\}$$
$$f_4=\{(0,b),(1,b)\}.$$

EXEMPLO 37 - Seja E um conjunto e seja R uma relação de equivalência sôbre E; o subconjunto

$$q=\{(x,y)\in E\times(E/R) \mid y=\bar{x}\}$$

onde E/R é o conjunto quociente de E por R e $\bar{x}$ é a classe de equivalência módulo R determinada pelo elemento x, é uma aplicação que é denominada *aplicação quociente* ou *aplicação canônica* de E em E/R. Observemos que a definição de q poderia ser dada sob a forma $q(x)=\bar{x}$, para todo x em E. Notemos ainda que $Im(q)=E/R$.

EXEMPLO 38 - Consideremos um conjunto E e seja Δ_E a diagonal do produto cartesiano $E\times E$, isto é,

$$\Delta_E=\{(x,y)\in E\times E \mid y=x\}.$$

É imediato que Δ_E é uma aplicação de E em E, que será denominada *aplicação idêntica de E* e será indicada por I_E ou 1_E. Quando o conjunto E está fixado também se indica esta aplicação por I ou 1.

Seja f uma aplicação de um conjunto E num conjunto F e seja A uma parte de E; a aplicação $g: A\to F$ definida por $g(x)=f(x)$, para todo x em A, é denominada *restrição de f à parte A* e será indicada por f_A ou $f|A$. Notemos que o domínio de f_A é A e que

$$f_A=f\cap(A\times F).$$

Poderíamos ter definido f_A diretamente a partir desta última igualdade. A restrição da aplicação idêntica I_E a uma parte A, de E, é denominada *àplicação canônica de A em E*.

Sejam $f: E\to F$ e $g: E'\to F'$ duas aplicações; diz-se que g é um *prolongamento de f* se, e sòmente se, $E\subset E'$, $F\subset F'$ e $g(x)=f(x)$, para todo x em E. Por exemplo, f é um prolongamento de sua restrição f_A a uma parte A de E. Mostraremos que vale a seguinte propriedade: sejam E e F dois conjuntos e

seja A uma parte de E; se f é uma aplicação de A em F e se F é não vazio, então existe uma aplicação g de E em F que prolonga f. Com efeito, existe por hipótese um elemento b em F e basta, então, definir g por $g(x)=f(x)$ para todo x em A e $g(x)=b$ para todo $x\in E$, $x\notin A$.

Diz-se que uma aplicação $f: E \to F$ é *constante* se, e sòmente se, a imagem de f é um conjunto unitário. Se f é uma aplicação de E em F e se a restrição de f a uma parte A de E é constante, diremos que f *é constante sôbre* A.

EXERCÍCIOS

55. Determinar tôdas as aplicações de $E=\{0,1\}$ em $F=\{a,b,c\}$ (a, b e c distintos dois a dois) e tôdas as aplicações de F em E.

56. Sejam E e F dois conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente; determinar o número de aplicações de E em F. Examinar também os casos em que $m=0$ e $n>0$, $m=0$ e $n=0$.

57. Consideremos a seguinte relação sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros $f=\{(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid ax+by=1\}$, onde a e b são inteiros dados. Verificar em que condições sôbre a e b, f é uma aplicação.

58. Seja E o conjunto de todos os números reais x tais que $-1\leqslant x\leqslant 1$; determinar quais das seguintes relações f são aplicações de E em $\mathbf{R}$, onde f é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) tais que

a) $y=x^3$;
b) $y^2=x^3$;
c) $y=x^2+5x+6$;
d) $y^2=1-x^2$ e $y\leqslant 0$;
e) $y^2=2x$ e $y\geqslant 0$;
f) $y^2=2x$.

3.2 - COMPOSIÇÃO DE APLICAÇÕES

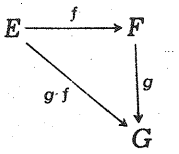
DEFINIÇÃO 12 - Seja f uma aplicação de um conjunto E num conjunto F e seja g uma aplicação de F num conjunto G; chama-se *composta de* g *e* f à aplicação h, de E em G, definida por $h(x)=g(f(x))$, para todo x em E.

Indicaremos esta aplicação h por $g\circ f$ (leia-se: g composta com f ou g círculo f); portanto,

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)) \qquad (11),$$

para todo x em E.

Representa-se também a composta $g\circ f$ pelo diagrama



OBSERVAÇÕES

1.ª) A definição acima pode ser reformulada do seguinte modo: a composta de g e f é o conjunto de todos os pares ordenados (x,z), de $E\times G$, que possuem a propriedade: existe y em F tal que

$$(x,y)\in f \quad \text{e} \quad (y,z)\in g.$$

2.ª) A composta de g e f só está definida quando o contra-domínio de f é igual ao domínio de g. Em particular, se f e g são aplicações de E em E, então, as compostas $g\circ f$ e $f\circ g$ estão definidas e são aplicações de E em E.

3.ª) A composta de g e f é obtida aplicando-se f aos elementos de E e a seguir transformam-se estas imagens por g; note-se, portanto, que a leitura de $g\circ f$ é feita na ordem inversa em que estão dadas as aplicações f e g.

EXEMPLO 39 - Consideremos as aplicações f e g, de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, definidas por $f(x)=2x$ e $g(x)=x^2$ para todo x em $\mathbf{R}$. Neste caso estão definidas as compostas $g\circ f$ e $f\circ g$ e temos

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=(2x)^2=4x^2$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=2x,$$

logo, $f\circ g\neq g\circ f$.

Notemos que, em geral, $f\circ g\neq g\circ f$ (ou seja, a composição de aplicações não é comutativa) por causa de dois motivos: 1.º) pode acontecer que sòmente uma das compostas $f\circ g$ ou $g\circ f$ esteja definida; 2.º) as duas compostas $f\circ g$ e $g\circ f$ estão definidas e $f\circ g\neq g\circ f$ como nos mostra o exemplo anterior.

EXEMPLO 40 - Consideremos as aplicações f_1, f_2, f_3 e f_4 definidas no exemplo 36, onde escolheremos $a=0$ e $b=1$, logo, $F=E$. Notemos que a composta $f_i\circ f_j$ $(1\leqslant i,j\leqslant 4)$ é ainda uma aplicação de E em E e, portanto, coincide com uma das aplicações f_1, f_2, f_3 ou f_4.

Determinaremos $f_3 \circ f_4$ e $f_4 \circ f_3$. Temos

$$(f_3 \circ f_4)(0) = f_3(f_4(0)) = f_3(1) = 0$$
$$(f_3 \circ f_4)(1) = f_4(f_3(1)) = f_3(1) = 0,$$

logo, $f_3 \circ f_4 = f_3$ e

$$(f_4 \circ f_3)(0) = f_4(f_3(0)) = f_4(0) = 1,$$
$$(f_4 \circ f_3)(1) = f_4(f_3(1)) = f_4(0) = 1,$$

portanto, $f_4 \circ f_3 = f_4$. Calculam-se, de modo análogo, as outras compostas e se obtém a seguinte táboa (que deve ser lida linha por coluna)

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

EXEMPLO 41 - Se f é uma aplicação de E em F, tem-se

$$I_F \circ f = f \quad \text{e} \quad f \circ I_E = f$$

onde I_E e I_F são, respectivamente, as aplicações idênticas de E e F. Em particular, para tôda aplicação f, de E em E, tem-se

$$I_E \circ f = f = f \circ I_E.$$

Notemos que se $E \neq F$, então, as compostas de f e I_F e de I_E e f não estão definidas.

TEOREMA 6 - Quaisquer que sejam as aplicações

$$E \xrightarrow{f} F, \quad F \xrightarrow{g} G \quad \text{e} \quad G \xrightarrow{h} H$$

tem-se (propriedade associativa)

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

DEMONSTRAÇÃO - A condição 1) do teorema 5 está satisfeita, pois, E é o domínio de $(h \circ g) \circ f$ e de $h \circ (g \circ f)$. Consideremos um elemento qualquer x de E e ponhamos $f(x) = y$, $g(y) = z$ e $h(z) = t$; temos

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(z) = t$$

e, notando-se que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(z) = t;$$

portanto,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

para todo x em E, o que termina a verificação da parte 2) do teorema 5. ∎

DEFINIÇÃO 13 - Diz-se que uma aplicação $f: E \to F$ é *sobrejetora* se, e sòmente se, para todo elemento y de F existe um elemento x de E tal que $f(x) = y$.

Em lugar de dizer «f é uma aplicação sobrejetora de E em F» diremos freqüentemente «f é uma *sobrejeção* de E em F». É imediato que uma aplicação $f: E \to F$ é sobrejetora se, e sòmente se, $Im(f) = F$.

TEOREMA 7 - Se as aplicações

$$f: E \to F \quad \text{e} \quad g: F \to G$$

são sobrejetoras, então a composta $g \circ f$ também é sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme a definição 13, para todo z em G existe um elemento y de F tal que $g(y) = z$ e dado y existe um elemento x de E tal que $f(x) = y$; daqui resulta que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z;$$

portanto, f é sobrejetora. ∎

O teorema acima é, em geral, enunciado sob a forma abreviada: a composta de duas aplicações sobrejetoras também é sobrejetora.

DEFINIÇÃO 14 - Diz-se que uma aplicação $f: E \to F$ é *injetora* se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: quaisquer que sejam x e x' em E, se $x \neq x'$, então, $f(x) \neq f(x')$.

A definição acima nos mostra que f é injetora se, e sòmente se, f transforma elementos distintos em elementos distintos.

Em lugar de dizer «f é uma aplicação injetora de E em F» diremos freqüentemente «f é uma *injeção* de E em F». É imediato que uma aplicação $f: E \to F$ é injetora se, e sòmente se, uma das seguintes condições estiver verificada:

a) quaisquer que sejam x e x' em E, se $f(x) = f(x')$, então $x = x'$;

b) para todo y em F existe no máximo um elemento x de E tal que $f(x) = y$.

TEOREMA 8 - Se as aplicações

$$f: E \to F \quad \text{e} \quad g: F \to G$$

são injetoras, então a composta $g \circ f$ também é injetora.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam x e x' dois elementos quaisquer de E e suponhamos que $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')$, logo, $g(f(x))=g(f(x'))$. Como g é injetora resulta desta última igualdade $f(x)=f(x')$, de onde vem $x=x'$, pois f também é injetora; portanto, $g\circ f$ é injetora. ∎

O teorema acima é, em geral, enunciado sob a forma abreviada: a composta de duas aplicações injetoras também é injetora.

TEOREMA 9 - Se as aplicações

$$f: E \to F \quad \text{e} \quad g: F \to E$$

são tais que $g\circ f = I_E$, então f é injetora e g é sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO - Seja x um elemento qualquer de E e ponhamos $f(x)=y$, logo, $y\in F$; temos

$$x = I_E(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y);$$

portanto, g é sobrejetora. Sejam x e x' dois elementos quaisquer de E e suponhamos que $f(x)=f(x')$; temos

$$x = I_E(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g\circ f)(x') = I_E(x') = x';$$

portanto, f é injetora. ∎

DEFINIÇÃO 15 - Diz-se que uma aplicação $f: E \to F$ é *bijetora* se, e sòmente se, f é sobrejetora e injetora.

Uma aplicação bijetora também é denominada *bijeção*. Uma bijeção de E em E é chamada *permutação* de E. É imediato que uma aplicação $f: E \to F$ é bijetora se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: para todo y em F existe um único elemento x de E tal que $f(x)=y$.

EXEMPLO 42 - A aplicação idêntica I_E, de um conjunto E, é uma permutação de E (que é denominada *permutação idêntica* de E).

EXEMPLO 43 - A aplicação $f: N \to N$ definida por $f(n)=n+1$ é injetora mas não é sobrejetora.

EXEMPLO 44 - A aplicação $f: N \to N$ definida por $f(n)=\frac{n}{2}$ se n é par e $f(n)=\frac{n-1}{2}$ se n é ímpar, é sobrejetora mas não é injetora.

Seja f uma aplicação bijetora de um conjunto E num conjunto F; conforme tínhamos observado acima, para todo elemento y em F existe um único elemento x de E tal que

$f(x)=y$; portanto, a relação

$$f^{-1} = \{(y,x)\in F\times E \mid (x,y)\in f\}$$

é uma aplicação de F em E que será denominada *aplicação recíproca* ou *inversa* da bijeção f. A definição de f^{-1} pode ser reformulada do seguinte modo: temos $f^{-1}(y)=x$ se, e sòmente se, $f(x)=y$. É imediato que

$$f^{-1}\circ f = I_E \quad \text{e} \quad f\circ f^{-1} = I_F \qquad (12).$$

É importante notar que as igualdades acima caracterizam as bijeções e suas inversas; precisamente, temos o seguinte

TEOREMA 10 - Uma aplicação $f: E \to F$ é uma bijeção se, e sòmente se, existem aplicações $g: F \to E$ e $h: F \to E$ tais que

$$g\circ f = I_E \quad \text{e} \quad f\circ h = I_F \qquad (13).$$

Neste caso, tem-se $g=h=f^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO - Se f é uma bijeção de E em F, tomamos $g=h=f^{-1}$ e as fórmulas (12) nos mostram que $g\circ f = I_E$ e $f\circ h = I_F$. Reciprocamente, suponhamos que existam aplicações g e h, de F em E, tais que (13) seja verdadeira; de $g\circ f = I_E$ resulta, em virtude do teorema 9, que f é injetora e de $f\circ h = I_F$ resulta, conforme o mesmo teorema, que f é sobrejetora, portanto, f é bijetora. Falta demonstrar que as relações (13) implicam $g=h=f^{-1}$. Seja y um elemento qualquer de F e ponhamos $f^{-1}(y)=x$, logo, $f(x)=y$; temos

$$f^{-1}(y) = x = I_E(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y);$$

portanto, $f^{-1}=g$. Por outro lado, sabemos que $g\circ I_F = g$ e $I_E\circ h = h$, logo, em virtude de (13) e do teorema 6, teremos

$$g = g\circ I_F = g\circ(f\circ h) = (g\circ f)\circ h = I_E\circ h = h$$

e portanto $g=h=f^{-1}$. ∎

Aplicando-se o teorema acima às fórmulas (12) temos o seguinte

COROLÁRIO - Se f é uma bijeção de E em F, então sua inversa f^{-1} é uma bijeção de F em E e, além disso, $(f^{-1})^{-1}=f$.

Vejamos agora como é que se determina a inversa da composta de duas aplicações bijetoras:

TEOREMA 11 - Se as aplicações

$$f: E \to F \quad \text{e} \quad g: F \to G$$

são bijetoras, então sua composta $g\circ f$ é bijetora e

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} \qquad (14).$$

DEMONSTRAÇÃO - A primeira parte dêste teorema é uma conseqüência imediata dos teoremas 7 e 8. De acôrdo com o teorema 6, temos

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = [(g\circ f)\circ f^{-1}]\circ g^{-1} =$$
$$= [g\circ(f\circ f^{-1})]\circ g^{-1} = (g\circ I_F)\circ g^{-1} = g\circ g^{-1} = I_G$$

e

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = [(f^{-1}\circ g^{-1})\circ g]\circ f =$$
$$= [f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)]\circ f = (f^{-1}\circ I_F)\circ f = f^{-1}\circ f = I_E;$$

portanto, em virtude do teorema 10, concluímos que vale (14). ∎

A primeira parte do teorema acima pode ser enunciada sob a forma abreviada: a composta de duas aplicações bijetoras também é bijetora. Em particular, a composta de duas permutações de um conjunto E é uma permutação de E.

Seja E um conjunto e indiquemos por $S(E)$ o conjunto de tôdas as permutações de E. Resumiremos as propriedades mais importantes da composição de permutações nos seguintes enunciados:

G0: quaisquer que sejam f e g em $S(E)$, tem-se $f\circ g\in S(E)$;

G1: quaisquer que sejam f, g e h em $S(E)$, tem-se $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$;

G2: $f\circ I_E = f = I_E\circ f$, para todo elemento f de $S(E)$;

G3: $f\circ f^{-1} = I_E = f^{-1}\circ f$, para todo $f\in S(E)$.

Conforme veremos no Capítulo II estas propriedades definem uma estrutura de grupo sôbre $S(E)$; diremos, então, que $S(E)$ é o grupo das permutações do conjunto E.

EXERCÍCIOS

59. Consideremos as aplicações f, g e h, de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$, definidas por

$$f(x) = x+1$$
$$g(x) = x^2$$
$$h(x) = x^2+x+1.$$

Determinar as seguintes compostas: $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ h$, $h\circ f$, $g\circ g$, $g\circ h$, $h\circ g$, $h\circ h$, $(f\circ g)\circ h$, $h\circ(f\circ g)$, $(g\circ f)\circ h$, $h\circ(g\circ f)$, $(f\circ h)\circ g$ e $g\circ(f\circ h)$.

60. Determinar quais das seguintes aplicações f, de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$, são sobrejetoras, injetoras ou bijetoras:

a) $f(x) = 2x+1$;
b) $f(x) = \operatorname{sen} x$;
c) $f(x) = x^2+x+1$;
d) $f(x) = x^3-x$;
e) $f(x) = ax+b$ (a e b números reais dados; $a\neq 0$).

61. Mostrar que o conjunto $S(E)$, onde $E=\{1,2,3\}$ tem 6 elementos f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 e f_6. Determinar tôdas as compostas $f_i\circ f_j$, para $i,j = 1,2,3,4,5,6$. Construir a táboa de composição análoga a do exemplo 40 (ver o exemplo 24, Capítulo II).

62. Determinar o número de injeções de um conjunto finito E num conjunto finito F.

63. Determinar o número de bijeções de um conjunto finito E num conjunto finito F.

64. Determinar o número de permutações de um conjunto finito E.

65. Mostrar que tôda aplicação injetora de um conjunto finito E em si mesmo é uma permutação de E.

66. Mostrar que tôda aplicação sobrejetora de um conjunto finito E em si mesmo é uma permutação de E.

3.3 - FAMÍLIAS DE ELEMENTOS

Seja x uma aplicação de um conjunto I num conjunto E; em lugar de indicar a imagem de um elemento i de I por $x(i)$ também se usa a *notação indexada* x_i, isto é, põe-se $x_i = x(i)$. Neste caso a aplicação x é indicada por $(x_i)_{i\in I}$ (leia-se: x_i, i percorrendo I) e é chamada *família de elementos de E tendo I para conjunto de índices* ou *família de elementos de E indexada pelo conjunto I*. Cada elemento x_i passa a ser denominado *têrmo* ou *componente de índice i* da família $(x_i)_{i\in I}$. Quando o conjunto de índices I está fixado usa-se a notação mais simples (x_i) para indicar a família de elementos $(x_i)_{i\in I}$. Note-se, portanto, que a noção de família de elementos de E tendo I para conjunto de índices coincide com a noção de aplicação de I em E, o que varia simplesmente é a notação. O conjunto de tôdas as famílias de elementos de E tendo I para conjunto de índices é, então, indicado por E^I.

Chama-se *conjunto dos têrmos da família* $(x_i)_{i\in I}$ à imagem da aplicação x que, neste caso, será indicada por $\{x_i,\ i\in I\}$ ou $\{x_i\}_{i\in I}$.

Em virtude do teorema 5 temos que duas famílias $(x_i)_{i\in I}$ e $(x_j)_{j\in J}$ são iguais se, e sòmente se, $I=J$ e $x_i = y_i$, para todo i em I.

No caso particular em que $I=\{1,2,\cdots,n\}$, tôda família de elementos de E indexada pelo conjunto I é denominada n-upla de elementos de E e também será indicada por $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ (leia-se: x_i, 1 menor do que i menor do que n) ou $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ (leia-se: n-upla $x_1,x_2,\cdots,x_n$); a notação E^I é substituída por E^n.

Portanto, E^n indica o conjunto de tôdas as n–uplas de elementos de E. Observemos que o conjunto dos têrmos de uma n–upla não tem, necessàriamente, n elementos.

Quando o conjunto de índices I é uma parte do conjunto N dos números naturais, diz-se que a família $(x_i)_{i\in I}$ é uma *sucessão* ou *seqüência*. Se $I = N$ esta sucessão também é indicapor $(x_i)_{i\geq 0}$ ou $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. Diz-se que uma sucessão (x_i) é *finita* ou *infinita* conforme o conjunto de índices I é, respectivamente, finito ou infinito. Notemos que o conjunto dos têrmos de uma sucessão infinita pode ser finito.

Chama-se intersecção de uma família não vazia $(X_i)_{i\in I}$, de partes de um conjunto E, ao conjunto de todos os elementos x, de E, que possuem a propriedade: $x\in X_i$, para todo $i\in I$. A intersecção desta família será indicada por

$$\bigcap_{i\in I} X_i \qquad (15)$$

símbolo êste que deve ser lido: intersecção dos X_i para i percorrendo I. A notação acima é substituída por

$$\bigcap_i X_i$$

quando o conjunto I está fixado. Se $\mathcal{A}$ é uma parte não vazia de $\mathcal{P}(E)$, pode-se aplicar a definição anterior à família $(A)_{A\in\mathcal{A}}$ definida pela aplicação canônica de A em $\mathcal{P}(E)$; neste caso, a intersecção de todos os elementos da parte $\mathcal{A}$ será indicada por

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Chama-se reunião de uma família $(X_i)_{i\in I}$, de partes de um conjunto E, ao conjunto de todos os elementos x, de E, que possuem a propriedade: existe um índice $i\in I$ tal que $x\in X_i$. A reunião desta família será indicada por

$$\bigcup_{i\in I} X_i \qquad (16)$$

símbolo êste que deve ser lido: reunião dos X_i para i percorrendo I. A notação acima é substituída por

$$\bigcup_i X_i$$

quando o conjunto I está fixado. Anàlogamente, define-se

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

onde $\mathcal{A}$ é uma parte do conjunto $\mathcal{P}(E)$.

No caso particular em que $I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, as notações (15) e (16) serão, respectivamente, substituídas por

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i \quad \text{ou} \quad X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i \quad \text{ou} \quad X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n.$$

DEFINIÇÃO 16 - Seja E um conjunto não vazio e seja $\mathcal{A}$ uma parte não vazia de $\mathcal{P}(E)$; diz-se que $\mathcal{A}$ é uma *partição* do conjunto E se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) $A \neq \emptyset$ para todo A em $\mathcal{A}$;

b) quaisquer que sejam A e B em $\mathcal{A}$, se $A \neq B$, então $A \cap B = \emptyset$;

c) $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = E$.

A condição a) poderia ser dada sob a forma $\emptyset \notin \mathcal{A}$ e a condição b) nos mostra que as partes em $\mathcal{A}$ são disjuntas duas a duas.

Tôda relação de equivalência determina uma partição conforme veremos no seguinte

TEOREMA 12 - Se R é uma relação de equivalência sôbre um conjunto não vazio E, então o conjunto queciente E/R é uma partição de E.

DEMONSTRAÇÃO - Usaremos as notações introduzidas no §2.3; assim um elemento de E/R é indicado por $\overline{x}$, onde x é um elemento de E. Precisamos, simplesmente, verificar as condições a), b) e c) da definição 16, para o conjunto E/R.

a) Em virtude da propriedade reflexiva, temos $x\in\overline{x}$, logo, $\overline{x} \neq \emptyset$ para todo $\overline{x}\in E/R$.

b) Vimos na demonstração do teorema 4 que duas classes de equivalência são disjuntas.

c) De $\overline{x}\subset E$ resulta que $\bigcup_{\overline{x}\in E/R} \overline{x} \subset E$ e como todo elemento x, de E, pertence à classe de equivalência $\overline{x}$ também é verdadeira a inclusão em sentido contrário e portanto $E = \bigcup_{\overline{x}\in E/R} \overline{x}$.

DEFINIÇÃO 17 - Seja $\mathcal{A}$ uma partição de um conjunto não vazio E. A relação S sôbre E, definida por xSy se, e sòmente se, existe $A\in\mathcal{A}$ tal que $x\in A$ e $y\in A$, é denominada *relação associada à partição* $\mathcal{A}$.

TEOREMA 13 - A relação S associada a uma partição $\mathcal{A}$ de um conjunto não vazio E, é uma relação de equivalência.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar as condições E1, E2 e E3 da definição 6.

E1: Se x é um elemento qualquer de E existe, conforme a condição a) da definição 15, uma parte $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$; portanto, temos xSx.

E2: Sejam x e y dois elementos quaisquer de E e suponhamos que xSy, logo, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$ e $y \in \mathcal{A}$; portanto, também vale ySx.

E3: Sejam x, y e z três elementos quaisquer de E e suponhamos que xSy e ySz; de xSy resulta que existe uma parte $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$ e $y \in A$ e de ySz resulta que existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $y \in B$ e $z \in B$. As partes A e B têm, portanto, o elemento y em comum, logo, $A = B$, de onde vem, $x \in A$ e $z \in A$, ou seja, xSz. ∎

TEOREMA 14 - a) Se R é uma relação de equivalência sôbre um conjunto não vazio E, então a relação de equivalência associada à partição E/R é a própria R. b) Se $\mathcal{A}$ é uma partição de E e se S é a relação de equivalência associada a $\mathcal{A}$, então a partição E/S é a própria $\mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Seja S a relação de equivalência associada à partição E/R. Se x e y são dois elementos quaisquer de E e se xRy, então x e y pertencem à classe de equivalênca $\bar{x}$, logo, xSy e portanto $R \subset S$. Por outro lado, se x e y são dois elementos quaisquer de E e se xSy, então existe uma única classe de equivalência $\bar{a} \in E/R$ tal que $x \in \bar{a}$ e $y \in \bar{a}$; daqui resulta xRa e yRa, portanto, xRy e concluímos assim que $S \subset R$. As inclusões estabelecidas acima nos mostram que $S = R$.

b) Seja A um elemento qualquer de $\mathcal{A}$; temos $A \neq \emptyset$, logo, existe um elemento x de E tal que $x \in A$. De acôrdo com a definição de S resulta imediatamente que $A = \bar{x} = \{y \in E \mid ySx\}$ e fica assim demonstrado que $\mathcal{A} \subset E/S$. Por outro lado, seja $\bar{x}$ um elemento qualquer de E/S; conforme a condição c) da definição 15, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$ e pela definição de S conclui-se que $\bar{x} = A$; portanto, $\bar{x} \in \mathcal{A}$ ou seja $E/S \subset \mathcal{A}$. As inclusões acima nos mostram que $E/S = \mathcal{A}$. ∎

EXERCÍCIOS

67. Determinar tôdas as partições do conjunto $E = \{1,2,3,4\}$.

68. Determinar a intersecção de todos os quadrados inscritos num círculo de raio dado.

69. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de partes de um conjunto E e seja A sua reunião. Mostrar que uma parte X, de E, contém A, se, e sòmente se, $X \supset A_i$ para todo $i \in I$. Portanto, a reunião A da família $(A_i)_{i \in I}$ é a menor parte de E que contém todos os A_i.

70. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de partes de um conjunto E e seja A sua intersecção. Mostrar que uma parte X, de E, está contida em A se, e sòmente se, $X \subset A_i$ para todo $i \in I$. Portanto, a intersecção A da família $(A_i)_{i \in I}$ é a maior parte de E que está contida em todos os A_i.

71. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de partes de um conjunto E e seja $(I_p)_{p \in P}$ uma família de partes de I tal que $I = \bigcup_{p \in P} I_p$. Mostrar que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{p \in P} \left(\bigcup_{i \in I_p} A_i \right)$$

72. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de partes de um conjunto E e seja $(I_p)_{p \in P}$ uma família não vazia de partes de I tais que $I_p \neq \emptyset$ para todo $p \in P$ e $I = \bigcup_{p \in P} I_p$. Mostrar que

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{p \in P} \left(\bigcap_{i \in I_p} A_i \right).$$

73. Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família não vazia de partes de um conjunto E, então

$$\complement_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\complement_E A_i)$$

e

$$\complement_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\complement_E A_i).$$

EXERCÍCIOS SÔBRE O §3

74. Se as aplicações $f: E \to F$ e $g: F \to E$ são tais que $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

75. Se as aplicações $f: E \to F$ e $g: F \to E$ são tais que $f \circ g$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

76. Seja f uma relação de um conjunto E num conjunto F; mostrar que a relação recíproca f^{-1} (ver o exercício 43) é uma aplicação de F em E se, e sòmente se, f é bijetora.

77. Consideremos as aplicações

$$f: E \to F, \quad g: F \to G \quad \text{e} \quad h: G \to E$$

e as compostas

$$h \circ g \circ f, \quad g \circ f \circ h \quad \text{e} \quad f \circ h \circ g.$$

a) Mostrar que se duas destas compostas são sobrejetoras e a terceira é injetora, então f, g e h são bijeções.

b) Mostrar que se duas destas compostas são injetoras e a terceira é sobrejetora, então f, g e h são bijeções.

78. Seja f uma aplicação de um conjunto E num conjunto F. Mostrar que f é injetora se, e sòmente se, existe uma aplicação $g: F \to E$ tal que $g \circ f = I_E$.

79. Seja f uma aplicação de um conjunto E num conjunto F. Mostrar que f é sobrejetora se, e sòmente se, existe uma aplicação $g: F \to E$ tal que $f \circ g = I_F$.

Nota: Supondo-se que f seja sobrejetora, indica-se por E_y o conjunto de todos os elementos x de E tais que $f(x) = y$; fixa-se em cada um dêstes conjuntos E_y um elemento $g(y)$ e mostra-se que esta aplicação g satisfaz a condição $f \circ g = I_F$. Esta demonstração exige, realmente, outros resultados da teoria dos conjuntos que não foram especificados neste capítulo (ver o §4.2 do Capítulo VII).

80. Consideremos a aplicação $f: N \to N$ definida por $f(n) = n+1$. Mostrar que existem infinitas aplicações $g: N \to N$ tais que $f \circ g = I_N$. (Êste exemplo nos mostra que a aplicação g do exercício 79 não é, em geral, determinada de modo único.)

81. Consideremos a aplicação f definida no exemplo 44. Mostrar que existem infinitas aplicações $g: N \to N$ tais que $g \circ f = I_N$. (Portanto, a aplicação g do exercício 79 não é, em geral, determinada de modo único.)

82. Seja f uma aplicação de um conjunto E num conjunto F e seja X uma parte de E; chama-se *imagem de X por f* à imagem da restrição f_X de f à parte X. Indica-se a imagem de X por f pela notação $f(X)$ (apesar de que esta notação é incorreta, pois só podemos escrever $f(X)$ quando $X \in E$); portanto, $f(X) = Im(f_X)$ e em particular $f(E) = Im(f)$. Verificar as seguintes propriedades, onde X e Y são partes quaisquer de E:

a) se $X \subset Y$, então $f(X) \subset f(Y)$;
b) $X \neq \emptyset$ se, e sòmente se, $f(X) \neq \emptyset$;
c) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
d) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$;
e) $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$.

83. Com as notações do exercício anterior, verificar as propriedades:

a) f é injetora se, e sòmente se, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, quaisquer que sejam as partes X e Y de E;

b) f é sobrejetora se, e sòmente se, $f(\complement_E X) = \complement_F f(X)$ para tôda parte X de E;

84. Seja f uma aplicação de um conjunto E num conjunto F e seja X uma parte qualquer de F; chama-se *imagem recíproca de X por f* ao conjunto de todos os elementos x de E tais que $f(x) \in X$. Indica-se a imagem recíproca de X por f pela notação $f^{-1}(X)$.

a) Mostrar que $f(f^{-1}(X)) \subset X$ para tôda parte X de F.

b) Mostrar que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ para tôda parte A de E.

Verificar as seguintes propriedades, onde X e Y são partes quaisquer de F:

c) se $X \subset Y$, então $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$;
d) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$;
e) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$;
f) $f^{-1}(\complement_F X) = \complement_E f^{-1}(X)$;
g) $f(f^{-1}(X)) = X \cap Im(f)$.

85. Com as notações do exercício anterior, mostrar que se E é não vazio, então f é sobrejetora se, e sòmente se, $f^{-1}(X) \neq \emptyset$ para tôda parte X de E.

86. Estender as partes c) e d) do exercício 82 para uma família de subconjuntos de E.

87. Estender as partes d) e e) do exercício 84 para uma família de subconjuntos de F.

88. Seja R uma relação de equivalência sôbre um conjunto não vazio E, seja q a aplicação canônica de E em E/R e seja F um outro conjunto.

a) Mostrar que existe uma aplicação g, de E em F, tal que $g \circ q = f$ se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: quaisquer que sejam x e y em E, se, $x \equiv y \pmod{R}$, então, $f(x) = f(y)$.

b) Supondo que exista $g: E \to F$ tal que $g \circ q = f$, mostrar que g é única.

c) Nas condições da parte anterior, mostrar que g é sobrejetora se, e sòmente se, f é sobrejetora.

d) Mostrar que g é injetora se, e sòmente se, xRy é equivalente a $f(x) = f(y)$.

89. Seja f uma aplicação de um conjunto E num conjunto F e consideremos a relação R_f, sôbre E, definida por: gR_fy se, e sòmente se, $f(x) = f(y)$. Mostrar que R_f é uma relação de equivalência sôbre E (que é denominada relação de equivalência associada à aplicação f). Supondo-se que f seja sobrejetora demonstrar que existe uma única bijeção $g: E/R_f \to F$ tal que $g \circ q = f$, onde q é a aplicação canônica de E em E/R_f.

CAPÍTULO II

NÚMEROS NATURAIS

No §1 dêste capítulo estudaremos diversos conceitos fundamentais da Álgebra Moderna entre os quais podemos destacar os seguintes: a noção de operação e as estruturas de semi-grupo e monóide (§1.1), a noção de elemento simetrizável e de elemento regular (§1.2), a estrutura de grupo (§1.3). Na seção 1.4 consideraremos um conjunto sôbre o qual está definida uma estrutura de semi-grupo comutativo e outra de ordem total, sendo que estas estruturas são compatíveis no sentido do axioma OA; obteremos assim as noções de semi-grupo ordenado, monóide ordenado e grupo ordenado, que terão aplicações imediatas no estudo dos números naturais. No §2 estudaremos os números naturais; admitiremos a existência de um conjunto $\boldsymbol{N}$ que satisfaz o axioma N1, supondo-se que sôbre $\boldsymbol{N}$ esteja definida uma estrutura de semi-grupo comutativo totalmente ordenado de modo que os axiomas N2, N3, e N4 sejam verdadeiros. É recomendável, num primeiro curso de Álgebra, que se admita conhecido o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais e as propriedades mais importantes dêstes números como, por exemplo, o teorema 17 (princípio de indução finita); neste caso, convém citar explicitamente tôdas as propriedades enunciadas no §2.4 e desenvolver completamente o princípio de definição por recorrência (teorema 18) e as diversas formas de demonstração por indução finita (§2.7). O §2.5 sôbre potências de elementos de um monóide tem importância para o desenvolvimento de outros capítulos dêste livro e êle será completado no capítulo seguinte com a introdução de potências com expoentes negativos. No §2.6 estudaremos a noção de composto de uma família de elementos e explicaremos os teoremas gerais de associatividade e de comutatividade (ver os exercícios 79 e 80).

Na parte relativa aos exemplos e exercícios continuaremos, em geral, a adotar um ponto de vista informal, pois utilizaremos diversos conjuntos e conceitos que serão definidos em outros capítulos dêste livro.

§1 - MONÓIDES E GRUPOS

1.1 - MONÓIDES

DEFINIÇÃO 1 - Chama-se *operação sôbre um conjunto* E a tôda aplicação de $E\times E$ em E.

Portanto, para determinar uma operação sôbre um conjunto E basta definir uma aplicação $f: E\times E \to E$. Notemos que a operação f está realmente definida sôbre o produto cartesiano $E\times E$ mas, para simplificar a linguagem, dizemos que f *está definida sôbre* E ou que f *é uma operação sôbre* E. A definição acima é uma generalização do conceito usual de adição ou multiplicação definidas, por exemplo, sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros: a cada par ordenado de números inteiros a e b faz-se corresponder sua soma $a+b$ e seu produto $a\cdot b$. Notemos desde já que a multiplicação ou a adição são as aplicações, enquanto que a soma ou o produto são os resultados; deve-se, portanto, fazer distinção entre os têrmos adição e soma, ou, multiplicação e produto.

Seja f uma operação sôbre um conjunto E e seja (a,b) um par ordenado de elementos de E; existe, então, um único elemento c de E tal que $((a,b),c)\in f$ (parte a) da definição 11, Capítulo I) elemento êste que é indicado por $c=f((a,b))$; diz-se que c *é o valor da operação* f *no par ordenado* (a,b) ou que c *é o resultado da operação* f *aplicada aos elementos* a *e* b (nesta ordem). A notação $c=f((a,b))$ é substituída por $c=f(a,b)$, ou ainda, por $c=afb$; neste último caso não há perigo de confundir afb com a notação ultilizada para significar que a e b estão na relação f, pois aqui f é uma aplicação de $E\times E$ em E.

OBSERVAÇÕES

1.ª) Uma operação f sôbre um conjunto E também é denominada *lei de composição interna sôbre* E, pois se pode definir uma outra espécie de «operação» denominada lei de composição externa: sejam E e K dois conjuntos e consideremos o produto cartesiano $K\times E$; chama-se *lei de composição*

externa sôbre E, tendo K para conjunto de operadores ou escalares, a tôda aplicação $f: K \times E \to E$. Neste caso, os elementos de K são denominados *escalares* ou *operadores* e K é chamado *domínio dos escalares* ou *operadores* da lei de composição externa f. Observemos que a lei de composição externa f está, realmente, definida sôbre o produto cartesiano $K \times E$ mas, para realçar o conjunto fundamental E, dizemos que f esta definida sôbre E.

2.ª) Pode-se generalizar a definição 1 introduzindo-se o conceito de *operação no sentido amplo:* é tôda aplicação f de $E \times F$ em G, onde E, F e G são conjuntos dados. Diz-se, neste caso, que f está definida sôbre $E \times F$ e assume valores em G. Uma lei de composição externa é um caso particular de operação no sentido amplo. Por exemplo, a «operação» de divisão $(a,b) \to a/b$ sôbre o conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais não é uma lei de composição interna, pois o quociente a/b só está definido quando $b \neq 0$; deve-se, portanto, considerar a divisão como uma operação no sentido amplo, ou seja, como a aplicação $(a,b) \mapsto a/b$ de $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q}^*$ em $\boldsymbol{Q}$, onde $\boldsymbol{Q}^*$ indica o conjunto de todos os números racionais não nulos.

As seguintes notações serão freqüentemente utilizadas para indicar uma operação f sôbre um conjunto E.

1) *Notação aditiva:* $f = +$. Neste caso, a operação $+$ é denominada *adição* e o correspondente do par (a,b), por meio de $+$, é chamado *soma* de a e b e é indicado pela notação $a+b$ (leia-se: a mais b); os elementos a e b passam a ser denominados, por sua vez, *têrmos* ou *parcelas* da soma $a+b$.

2) *Notação multiplicativa:* $f = \cdot$. Neste caso, a operação $\cdot$ é denominada *multiplicação* e o correspondente do par (a,b), por meio de $\cdot$, é chamado *produto* de a por b e é indicado por $a \cdot b$ (leia-se: a ponto b ou a vêzes b) ou, simplesmente, ab; os elementos a e b, por sua vez, são denominados *têrmos* ou *fatôres* do produto ab.

3) *Notação de composição:* $f = \circ$. Neste caso, a operação $\circ$ é denominada *composição* e o correspondente do par (a,b), por meio de $\circ$, é chamado *composto* de a e b e é indicado por $a \circ b$ (leia-se: a composto b ou a círculo b); os elementos a e b, por sua vez, são denominados *têrmos* do composto $a \circ b$. A notação de composição será reservada para indicar a «composição de aplicações» como foi definida no §3.2 do Capítulo I. Em alguns casos esta notação é substituída pela notação multiplicativa.

No caso geral usaremos a notação $*$ (leia-se: estrêla ou asterístico) para indicar uma operação sôbre um conjunto E; se a e b são dois elementos de E, então, $a*b$ (leia-se: a estrêla b) é denominado *composto* de a e b. Usa-se esta notação com o objetivo de que o leitor não assuma sem justificação que uma dada operação tenha as propriedades usuais da adição ou da multiplicação sôbre o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais.

DEFINIÇÃO 2 - Diz-se que uma operação $*$, sôbre um conjunto E, é *associativa* se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: quaisquer que sejam x, y e z em E, tem-se

$$(x*y)*z = x*(y*z) \qquad (1).$$

Portanto, se a operação $*$ é associativa, não há necessidade de usar os parêntesis indicados em (1) e escreveremos, simplesmente, $x*y*z$ em lugar de $(x*y)*z$ ou $x*(y*z)$. No entanto, os parêntesis serão usados para frizar que um dado composto parcial deve ser calculado em primeiro lugar; por exemplo, $(a*b)*(c*d)$ significa que devem ser determinados $a*b$ e $c*d$ e a seguir o composto dêstes compostos.

DEFINIÇÃO 3 - Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto E e sejam x e y dois elementos de E. Diz-se que x e y são *permutáveis* ou que x e y *comutam* se, e sòmente se,

$$x*y = y*x \qquad (2).$$

DEFINIÇÃO 4 - Diz-se que uma operação $*$, sôbre um conjunto E, é *comutativa* se, e sòmente se, dois elementos quaisquer de E são permutáveis, isto é, se

$$x*y = y*x,$$

quaisquer que sejam x e y em E.

Os números reais 0 e 1 têm propriedades análogas para a adição e a multiplicação: $a+0=a$ e $a \cdot 1 = a$, para todo número real a. Esta noção será generalizada pela seguinte

DEFINIÇÃO 5 - Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto E; diz-se que um elemento e, de E, é *elemento neutro para a operação* $*$ se, e sòmente se,

$$x*e = x = e*x \qquad (3),$$

para todo x em E.

TEOREMA 1 - Se uma operação $*$, definida sôbre um conjunto E, tem elemento neutro, então êste elemento é único.

Com efeito, se e e e' são elementos neutros para a operação $*$, temos $e'*e=e$ pois e' é elemento neutro e $e'*e=e'$, pois e também é elemento neutro; portanto, $e'=e$. ∎

Portanto, quando existe um elemento neutro e para a operação $*$, podemos usar o artigo definido e dizer que «e é o elemento neutro para a operação $*$», ou, que «e é o elemento neutro da operação $*$». Se a operação $*$ está fixada sôbre o conjunto E e se existe o elemento neutro e para $*$ diremos, simplesmente, que o conjunto E tem elemento neutro e ou que e é o elemento neutro do conjunto E (suprimindo-se, portanto, a referência à operação $*$).

A denominação do elemento neutro, assim como sua notação, variam conforme o símbolo usado para indicar a operação. Assim na notação aditiva, o elemento neutro (caso exista) é indicado por 0 e é denominado *zero*; temos

$$x+0=x=0+x,$$

para todo x em E. Na notação multiplicativa, o elemento neutro (caso exista) é indicado por 1 e é denominado *elemento unidade*; temos $x\cdot 1=x=1\cdot x$,
para todo x em E.

Seja $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ um conjunto finito com n elementos e seja $*$ uma operação definida sôbre E. É evidente que esta operação fica completamente determinada quando conhecemos os n^2 compostos a_i*a_j $(i,j=1,2,\cdots,n)$; é usual dispor êstes compostos conforme a tabela abaixo, que passa a ser denominada *táboa da operação* $*$.

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_1*a_1	a_1*a_2	$\cdots$	a_1*a_j	$\cdots$	a_1*a_n
a_2	a_2*a_1	a_2*a_2	$\cdots$	a_2*a_j	$\cdots$	a_2*a_n
$\vdots$	$\cdots\cdots$					
a_i	a_i*a_1	a_i*a_2	$\cdots$	a_i*a_j	$\cdots$	a_i*a_n
$\vdots$	$\cdots\cdots$					
a_n	a_n*a_1	a_n*a_2	$\cdots$	a_n*a_j	$\cdots$	a_n*a_n

A linha e a coluna que começam logo após o símbolo $*$ são chamadas fundamentais; o número de ordem de uma linha ou coluna é estabelecido sem considerar a linha ou a coluna fundamental; assim, o composto de a_i e a_j se encontra na linha i-ésima com a coluna j-ésima.

Recìprocamente, seja $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ um conjunto finito com n elementos e consideremos a seguinte táboa

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\cdots\cdots$					
a_i	a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\cdots\cdots$					
a_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nj}	$\cdots$	a_{nn}

onde $a_{ij}\in E$, para $i,j=1,2,\cdots,n$. Pondo-se $a_i*a_j=a_{ij}$ obtém-se uma operação $*$ sôbre o conjunto E. Certas propriedades desta operação podem ser deduzidas por um simples exame da táboa acima:

1) a operação $*$ é comutativa se, e sòmente se, esta táboa é simétrica em relação à diagonal principal $(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$;

2) a_i é o elemento neutro para a operação $*$ se, e sòmente se, a linha i-ésima é igual à linha fundamental e a coluna i-ésima é igual à coluna fundamental;

3) o elemento a_i comuta com todos os elementos de E se, e sòmente se, a linha i-ésima é igual à coluna i-ésima.

No entanto, convém observar que nada se pode concluir sôbre a validade ou não da propriedade associativa por uma simples inspeção desta táboa. Para mostrar que a operação $*$ é associativa temos que calcular todos os produtos $(a_i*a_j)*a_k$ e $a_i*(a_j*a_k)$ e verificar se êles são iguais; é necessário, portanto, calcular $2n^3$ compostos de três têrmos cada um.

DEFINIÇÃO 6 - Diz-se que uma operação $*$, sôbre um conjunto E, define uma *estrutura de semi-grupo sôbre* E ou que E é um *semi-grupo em relação à operação* $*$ se, e sòmente se, o seguinte axioma estiver verificado

G1 (propriedade associativa): quaisquer que sejam x, y e z em E, tem-se $(x*y)*z = x*(y*z)$.

Para indicar um semi-grupo devemos usar uma notação que destaque o conjunto E e a operação $*$ considerada sôbre E, por exemplo, $(E,*)$ e, neste caso, fica subentendido que o axioma G1 está satisfeito; portanto, devemos dizer «consideremos o semi-grupo $(E,*)$» ou «seja $(E,*)$ um semi-grupo». Em geral, indica-se o semi-grupo com a mesma letra que indica o conjunto dado e diremos «seja E um semi-grupo em relação à operação $*$» ou «o conjunto E é um semi-grupo para a operação $*$». Quando a operação $*$ está fixada sôbre o conjunto E e quando esta operação verifica o axioma G1, diremos, simplesmente, «o conjunto E é um semi-grupo» (suprimindo-se, portanto, a referência à operação $*$ e o fato que G1 é verdadeiro). Se a operação fixada sôbre E fôr a multiplicação ou a adição diremos, respectivamente, que E é um *semi-grupo multiplicativo* ou *aditivo*. Se E é um semi-grupo em relação à operação $*$ e se esta operação é comutativa, dizemos que E é um *semi-grupo comutativo*. As denominações semi-grupo multiplicativo comutativo e semi-grupo comutativo aditivo não necessitam ser explicadas.

O que dissemos acima também será aplicado para as estruturas de monóide e grupo que serão definidas mais adiante.

DEFINIÇÃO 7 - Diz-se que uma operação $*$, sôbre um conjunto E, define uma *estrutura de monóide sôbre* E ou que E *é um monóide em relação à operação* $*$ se, e sòmente se, os seguintes axiomas estão verificados

G1 (propriedade associativa): quaisquer que sejam x, y e z em E, tem-se $(x*y)*z = x*(y*z)$;

G2 (existência do elemento neutro): existe em E um elemento e tal que $x*e = x = e*x$, para todo x em E.

Portanto, um monóide é um semi-grupo que possui elemento neutro. Se E é um monóide em relação à operação $*$ e se esta operação é comutativa, dizemos que E é um *monóide comutativo*. As denominações «monóide multiplicativo», «monóide aditivo», «monóide multiplicativo comutativo» e «monóide aditivo comutativo» não necessitam ser explicadas.

EXEMPLO 1 - As operações usuais de adição e de multiplicação sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais são associativas, comutativas e têm elementos neutros que são, respectivamente, 0 e 1. Portanto, o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais é um monóide comutativo tanto em relação à adição como em relação à multiplicação.

EXEMPLO 2 - O mesmo vale para o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros ou o conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais ou ainda o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais.

EXEMPLO 3 - Consideremos sôbre o conjunto $2\boldsymbol{Z}$ de todos os inteiros pares a operação usual de multiplicação; notemos que, de fato, obtém-se uma operação pois o produto de dois números inteiros pares é par. Esta operação é associativa e comutativa mas não tem elemento neutro; portanto, só podemos afirmar que $2\boldsymbol{Z}$ é um semi-grupo comutativo em relação à multiplicação.

EXEMPLO 4 - Consideremos o conjunto $\boldsymbol{N}^*$ de todos os números naturais não nulos e coloquemos, por definição, $a*b = a^b$ para todo par ordenado (a,b) de elementos de $\boldsymbol{N}^*$. Fica assim definida uma operação sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}^*$, chamada *potenciação* e é fácil ver que ela não é associativa, não é comutativa e não tem elemento neutro.

EXEMPLO 5 - Seja E um conjunto e consideremos o conjunto $\mathcal{P}(E)$ de tôdas as partes de E; a aplicação $(X,Y) \mapsto X \cap Y$, de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{P}(E)$, é uma operação sôbre $\mathcal{P}(E)$, denominada intersecção. Conforme o teorema 2 do Capítulo I, esta operação é associativa, comutativa e tem elemento neutro, que é a parte E, pois $X \cap E = X$; portanto, $\mathcal{P}(E)$ é um monóide comutativo em relação à operação de intersecção.

EXEMPLO 6 - O mesmo vale para a operação de reunião $(X,Y) \mapsto X \cup Y$ definida sôbre $\mathcal{P}(E)$; neste caso, o elemento neutro é a parte vazia, pois $X \cup \emptyset = X$. Portanto, a operação de reunião define uma estrutura de monóide comutativo sôbre o conjunto $\mathcal{P}(E)$.

EXEMPLO 7 - A aplicação $(a,b) \mapsto mdc(a,b)$, de $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ em $\boldsymbol{N}$, onde $mdc(a,b)$ indica o máximo divisor comum de a e b, é uma operação sôbre $\boldsymbol{N}$ que é denominada *operação de máximo divisor comum*. Esta operação é associativa, pois pode-se

demonstrar que

$$mdc(mdc(a,b),c) = mdc(a, mdc(b,c)),$$

quaisquer que sejam os números naturais a, b e c; também é comutativa e como $mdc(a,0) = a$

para todo número natural a, resulta que 0 é o elemento neutro desta operação. Portanto, a operação de máximo divisor comum define uma estrutura de monóide comutativo sôbre o conjunto N dos números naturais.

EXEMPLO 8 - Anàlogamente, N é um monóide comutativo em relação à operação de mínimo múltiplo comum

$$(a,b) \mapsto mmc(a,b).$$

EXEMPLO 9 - A aplicação $(a,b) \mapsto mdc(a,b)$, de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}$, onde $mdc(a,b)$ indica o máximo divisor comum positivo de a e b, é associativa e comutativa mas não tem elemento neutro; portanto, só podemos afirmar que $\mathbf{Z}$ é um semi-grupo comutativo em relação à operação de máximo divisor comum.

EXEMPLO 10 - Seja E um conjunto e indiquemos por $M = E^E$ o conjunto de tôdas as aplicações de E em E; a composição de aplicações $(f,g) \mapsto f \circ g$

é uma operação sôbre M, que é associativa (teorema 6, Capítulo I) e tem elemento neutro (exemplo 41, Capítulo I) que é a aplicação idêntica I_E do conjunto E. Portanto, M é um monóide em relação à operação de composição. A táboa da operação de composição sôbre M no caso em que $E = \{0,1\}$ está dada no exemplo 41 do Capítulo I e já vimos que não é verdadeira a propriedade comutativa. Com base neste exemplo pode-se demonstrar que se E tem mais de um elemento, então a operação de composição sôbre M não é comutativa.

EXEMPLO 11 - Consideremos um conjunto $E = \{a,b\}$, com $a \neq b$, e definamos uma operação $*$, sôbre E, por meio da seguinte táboa

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

Verifica-se, fàcilmente, que esta operação é associativa, é comutativa e que a é seu elemento neutro. Portanto, E é um monóide comutativo em relação a esta operação.

DEFINIÇÃO 8 - Seja $*$ uma operação sôbre um conjunto E e seja A um subconjunto de E. Diz-se que A é *fechado* em relação à operação $*$ se, e sòmente se, $x*y \in A$ quaisquer que sejam x e y em A.

Se A é fechado em relação à operação $*$, então, a restrição de $*$ à parte $A\times A$ de $E\times E$ é uma operação sôbre A, que é denominada *operação induzida* sôbre A pela operação $*$. Em geral, quando a parte A está fixada e quando A é fechada em relação à operação $*$, indica-se a operação induzida por $*$ mesmo.

EXEMPLO 12 - O conjunto A de todos os múltiplos de um inteiro dado m é fechado em relação à adição e à multiplicação definidas sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros.

EXEMPLO 13 - O subconjunto de $\mathbf{Z}$, formado por todos os inteiros ímpares é fechado em relação à multiplicação mas não é fechado em relação à adição.

EXEMPLO 14 - Consideremos a operação definida no exemplo 10 e seja E_0 uma parte de E; o subconjunto A, de M, formado por tôdas as aplicações $f: E \mapsto E$ tais que $f(x) = x$, para todo x em E_0, é fechado em relação à composição de aplicações.

EXEMPLO 15 - Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto E; as partes E e $\emptyset$ são fechadas em relação à operação $*$. Se esta operação tem elemento neutro e, então a parte $\{e\}$ também é fechada para a operação $*$.

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que a operação usual de subtração, definida sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros, não é associativa, não tem elemento neutro e não é comutativa.

2. Mostrar que a operação usual de divisão, definida sôbre o conjunto $\mathbf{Q}^*$ de todos os números racionais não nulos, não é associativa, não é comutativa e não tem elemento neutro.

3. Sejam a e b dois inteiros dados e coloquemos por definição $x*y = ax+by$, quaisquer que sejam x e y em $\mathbf{Z}$. Determinar condições sôbre a e b para que esta operação satisfaça uma das seguintes condições: a) associativa; b) comutativa; c) associativa e comutativa; d) tenha elemento neutro; e) defina uma estrutura de monóide comutativo sôbre $\mathbf{Z}$.

4. Verificar quais dos axiomas G1 e G2 estão satisfeitos para as seguintes operações $*$ definidas sôbre o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais:

a) $x*y = x+y+x^2y$;

b) $x*y = x+y-1$;

c) $x*y = max\{x,y\}$;

d) $x*y = min\{x,y\}$;

e) $x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$;

f) $x*y = \sqrt{x^2+y^2}$;

g) $x*y = |x||y|$.

5. Quais das operações do exercício anterior são comutativas?

6. Verificar quais das seguintes operações, definidas sôbre o conjunto $\boldsymbol{R}_+^*$ de todos os números reais positivos e não nulos, satisfazem o axioma G1 ou G2 ou são comutativas:

a) $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$;

b) $x*y = \dfrac{xy}{1+xy}$;

c) $x*y = x+2\sqrt{x}+y+2\sqrt{y}+2\sqrt{xy}$;

d) $x*y = \dfrac{1-x-y}{1+xy}$;

e) $x*y = \sqrt{x^2+y^2}$.

7. Consideremos as operações α, β, γ e Δ, definidas sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros, por

$$a\alpha b = a+b-ab, \qquad a\gamma b = 2a+b,$$
$$a\beta b = a+b+ab, \qquad a\Delta b = a+b^2,$$

quaisquer que sejam a e b em $\boldsymbol{Z}$. a) Verificar quais destas operações são associativas ou comutativas. b) Verificar quais destas operações têm elementos neutros. c) Mostrar que as operações α e β definem uma estrutura de monóide comutativo sôbre $\boldsymbol{Z}$.

8. Consideremos a operação $*$, definida sôbre um conjunto não vazio E, por $x*y = x$, quaisquer que sejam x e y em E. a) Mostrar que esta operação é associativa. b) Mostrar que esta operação é comutativa se, e sòmente se, E é um conjunto unitário. c) Mostrar que esta operação tem elemento neutro se, e sòmente se, E é um conjunto unitário.

9. Estabelecer resultados análogos aos do exercício anterior para a operação $*$ definida por $x*y = y$, quaisquer que sejam x e y em E.

10. Seja $E = \{a,b\}$ um conjunto com dois elementos distintos a e b. a) Determinar tôdas as operações sôbre E e construir as respectivas táboas. b) Determinar tôdas as operações associativas sôbre E. c) Determinar tôdas as operações comutativas sôbre E. d) Determinar tôdas as operações associativas e comutativas sôbre E. e) Determinar tôdas as estruturas de monóide sôbre E. f) Tôda estrutura de monóide sôbre E é comutativa? g) Tôda operação sôbre E que admite elemento neutro define um estrutura de semi-grupo sôbre o conjunto E?

11. Seja $E = \{e,a,b\}$ um conjunto com três elementos distintos. a) Determinar as táboas de tôdas as operações sôbre E que admitem e como elemento neutro, dispondo êstes elementos na ordem e, a, b. b) Determinar tôdas as operações comutativas sôbre E que admitem e como elemento neutro. c) Quais destas operações definem uma estrutura de monóide sôbre E?

12. Determinar o número de operações que se podem definir sôbre um conjunto finito e não vazio.

13. Determinar o número de operações comutativas que se podem definir sôbre um conjunto finito e não vazio.

14. Supondo-se que a operação $*$, sôbre um conjunto E, seja associativa e comutativa, mostrar que (justificar tôdas as passagens e não omitir parêntesis):

a) $a*(b*c) = b*(a*c)$;

b) $a*(b*c) = (b*a)*c$;

c) $(a*b)*(c*d) = d*(c*(b*a))$;

onde a, b, c e d são elementos quaisquer de E.

15. Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto não vazio E e seja A o conjunto de todos os elementos x, de E, tais que $(x*y)*z = x*(y*z)$, quaisquer que sejam y e z em E. Mostrar que A é fechado em relação à operação $*$ e que a operação induzida sôbre A é associativa.

16. Seja $*$ uma operação associativa definida sôbre um conjunto não vazio E; diz-se que um elemento a, de E, é *central* se, e sòmente se, $a*x = x*a$, para todo x em E. Mostrar que o conjunto A, de todos os elementos centrais de E, é fechado em relação à operação $*$ e que a operação induzida sôbre A é comutativa.

17. Seja $*$ uma operação sôbre um conjunto E e suponhamos que esta operação tenha elemento neutro e. Demonstrar que a operação $*$ é associativa e comutativa se, e sòmente se,

$$(a*b)*(c*d) = (a*c)*(b*d),$$

quaisquer que sejam a, b, c e d em E.

1.2 - ELEMENTOS SIMETRIZÁVEIS

DEFINIÇÃO 9 - Consideremos uma operação $*$ sôbre um conjunto E e suponhamos que esta operação tenha elemento neutro e. Diz-se que um elemento a de E é *simetrizável para a operação* $*$ se, e sòmente se, existe um elemento a' de E tal que

$$a*a' = e = a'*a \qquad (4).$$

Se a operação $*$ está fixada e se um elemento a, de E, é simetrizável para a operação $*$ diremos, simplesmente, que a é simetrizável. Por exemplo, o elemento neutro e é simetrizável. Indicaremos por $U_*(E)$ o conjunto de todos os elementos simetrizáveis para a operação $*$, notação esta que é substituída por $U(E)$ quando a operação $*$ está fixada sôbre E.

TEOREMA 2 - Se a é um elemento simetrizável de um monóide $(E,*)$, então existe um único elemento x em E tal que

$$a*x = e = x*a \qquad (5).$$

Com efeito, de acôrdo com (5) e (4), temos

$$a' = a'*e = a'*(a*x) = (a'*a)*x = e*x = x;$$

portanto, $a' = x$. ∎

Se a é um elemento simetrizável do monóide $(E,*)$, então o único elemento a' de E tal que (4) seja verdadeira é denominado *simétrico de a para a operação* $*$ ou *simétrico de a em relação à operação* $*$. Quando a operação $*$ está fixada costuma-se suprimir a referência à operação e se diz que a' é o *simétrico* de a. Se a operação $*$ não é associativa, então o teorema 2 não é, em geral, verdadeiro (ver o exercício 18).

Se E é um monóide multiplicativo, então um elemento simetrizável a, de E, é denominado *elemento inversível* e seu simétrico a' é chamado *inverso de a* ou *inverso multiplicativo de a* e é indicado por a^{-1} (leia-se: a a potência menos 1) e esta notação será justificada mais adiante quando introduzirmos o conceito de potência com expoente negativo; a fórmula (4) é, então, escrita sob a forma

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a \qquad (6).$$

Se E é um monóide aditivo, então o simétrico a' de um elemento simetrizável a é denominado *oposto de a* ou *inverso aditivo de a* e é indicado por $-a$ (leia-se: menos a ou oposto de a) e temos

$$a+(-a) = 0 = (-a)+a \qquad (7).$$

TEOREMA 3 - Sejam a e b dois elementos simetrizáveis de um monóide $(E,*)$. Temos:

1) se a' é o simétrico de a, então a' é simetrizável e seu simétrico é o próprio a;

2) $a*b$ é simetrizável e seu simétrico é $b'*a'$, onde a' e b' são, respectivamente, os simétricos de a e b.

DEMONSTRAÇÃO

1) Por hipótese temos $a*a' = e = a'*a$, logo, de acôrdo com a definição 9 aplicada ao elemento a', resulta que a' é simetrizável e que o simétrico de a' é o próprio a:

$$(a')' = a \qquad (8).$$

2) Por hipótese, temos $a*a' = e = a'*a$ e $b*b' = e = b'*b$, logo, de acôrdo com a propriedade associativa da operação $*$, temos

$$(a*b)*(b'*a') = ((a*b)*b')*a' = (a*(b*b'))*a' = (a*e)*a' = a*a' = e$$

e

$$(b'*a')*(a*b) = ((b'*a')*a)*b = (b'*(a'*a))*b = (b'*e)*b = b'*b = e;$$

portanto, $a*b$ é simetrizável e seu simétrico é $b'*a'$, isto é,

$$(a*b)' = b'*a' \qquad (9).$$ ∎

No caso da notação multiplicativa, o teorema anterior nos mostra que se a e b são inversíveis, então a^{-1} e ab também são inversíveis e

$$(a^{-1})^{-1} = a \qquad (10),$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \qquad (11).$$

Na notação aditiva, temos

$$-(-a) = a \qquad (12),$$

e

$$-(a+b) = (-b)+(-a) \qquad (13),$$

quaisquer que sejam os elementos simetrizáveis a e b de E. Se o monóide E é multiplicativo e comutativo, a fórmula (11) pode ser escrita sob a forma

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \qquad (14);$$

convém observar que esta propriedade não é verdadeira, em geral, quando a multiplicação não é comutativa (ver o exemplo 24). Anàlogamente, se o monóide E é aditivo e comutativo, a fórmula (13) pode ser escrita sob a forma

$$-(a+b) = (-a)+(-b) \qquad (15).$$

COROLÁRIO - Se E é um monóide em relação a uma operação $*$ e se $U(E)$ é o conjunto dos elementos simetrizáveis de E, temos

a) $e \in U(E)$;

b) $U(E)$ é fechado em relação à operação $*$;

c) o simétrico de todo elemento de $U(E)$ pertence a $U(E)$.

Portanto, a operação induzida por $*$ sôbre $U(E)$ define uma estrutura de monóide sôbre $U(E)$ e vale, além disso, a propriedade c), ou seja, todo elemento de $U(E)$ é simetrizável em relação à operação induzida. Conforme veremos no §1.3 estas condições caracterizam a estrutura de grupo (ver também a parte final de §3.2 do Capítulo I).

EXEMPLO 16 - Todo elemento do conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é simetrizável para a adição e vale a fórmula (15) quaisquer que sejam a e b em $\mathbf{Z}$. Os únicos elementos de $\mathbf{Z}$ que são simetrizáveis para a multiplicação são -1 e 1. Portanto, temos $U_+(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ e $U_.(\mathbf{Z}) = \{-1, 1\}$.

EXEMPLO 17 - Considerando-se o monóide $\mathcal{P}(E)$ definido no exemplo 5, temos $U_n(\mathcal{P}(E))=\{E\}$. Para o monóide $\mathcal{P}(E)$ definido no exemplo 6, temos $U_u(\mathcal{P}(E))=\{\emptyset\}$.

EXEMPLO 18 - Consideremos o monóide M definido no exemplo 10. Conforme a definição 9, um elemento f de M, ou seja, uma aplicação $f:E\to E$, é simetrizável para a operação de composição $\circ$ se, e sòmente se, existe uma aplicação $f':E\to E$ tal que $f\circ f'=I_E=f'\circ f$;
portanto, de acôrdo com o teorema 10 do Capítulo I, f é simetrizável se, e sòmente se, f é uma permutação do conjunto E. Neste caso, o simétrico f' de f para a operação de composição $\circ$ é a aplicação recíproca de f: $f'=f^{-1}$. Fica assim demonstrado que o conjunto dos elementos simetrizáveis do monóide $(E^E,\circ)$ coincide com o conjunto $S(E)$ das permutações de E.

TEOREMA 4 - Sejam a e b dois elementos permutáveis de um monóide $(E,*)$; temos:

1) se b é simetrizável, então a comuta com o simétrico b' de b;

2) se a e b são simetrizáveis, então seus simétricos a' e b' são permutáveis.

DEMONSTRAÇÃO

1) Temos

$$a*b'=(e*a)*b'=((b'*b)*a)*b'=(b'*(b*a))*b'=(b'*(a*b))*b'=$$
$$=b'*(a*(b*b'))=b'*(a*e)=b'*a;$$

portanto, a e b' são permutáveis.

2) De acôrdo com a primeira parte temos que a e b' são permutáveis, logo, aplicando-se novamente êste mesmo resultado para b' e a, concluímos que a' e b' são permutáveis. Pode-se verificar a parte 2) do seguinte modo:

$$a'*b'=(b*a)'=(a*b)'=b'*a';$$

portanto, a' e b' são permutáveis. ∎

TEOREMA 5 - Se a e b são dois elementos quaisquer de um monóide $(E,*)$ e se b é simetrizável, então existe um único elemento x (resp., y), de E, tal que $b*x=a$ (resp., $y*b=a$).

DEMONSTRAÇÃO - Considerando-se o elemento $x=b'*a$, onde b' é o simétrico de b, temos $x\in E$ e

$$b*x=b*(b'*a)=(b*b')*a=e*a=a.$$

Por outro lado, se $x_1\in E$ é tal que $b*x_1=a$, temos

$$x_1=e*x_1=(b'*b)*x_1=b'*(b*x_1)=b'*a=x;$$

portanto x é único. Verificação completamente análoga para o caso de $y*b=a$; notemos, simplesmente, que $y=a*b'$. ∎

Se E é um monóide comutativo e se a e b são dois elementos quaisquer de E, com b simetrizável, então, existe um único elemento x, de E, tal que $b*x=a=x*b$ e temos $x=b'*a=a*b'$, onde b' é o simétrico de b. Êste elemento $x=b'*a=a*b'$ recebe denominação especial conforme o símbolo usado para indicar a operação (comutativa) definida sôbre E. Assim, no caso da notação multiplicativa, o único elemento x tal que $bx=a$ é denominado *quociente de a por b* e é indicado por a/b (leia-se: a sôbre b); portanto, temos, por definição

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}.$$

Em particular, temos

$$b\cdot\frac{a}{b}=b,\quad \frac{b}{b}=1\quad\text{e}\quad \frac{1}{b}=b^{-1},$$

quaisquer que sejam a e b em E, com b inversível. A aplicação $(a,b)\mapsto a/b$, de $E\times U(E)$ em E, é denominada *divisão*; notemos que a divisão é, em geral, uma operação no sentido amplo (ver a 2.ª observação do §1.1), pois, em geral, $U(E)\neq E$. No caso da notação aditiva, o único elemento x tal que $b+x=a$ é denominado *diferença entre a e b* e é indicado por $a-b$ (leia-se: a menos b); portanto, temos por definição

$$a-b=a+(-b).$$

Em particular

$$b+(a-b)=a,\quad b-b=0\quad\text{e}\quad 0-b=-b,$$

quaisquer que sejam a e b em E, com b simetrizável. A aplicação $(a,b)\mapsto a-b$, de $E\times U(E)$ em E, é denominada *subtração* notemos que a subtração é, em geral, uma operação no sentido amplo.

DEFINIÇÃO 10 - Diz-se que um elemento a de um semigrupo $(E,*)$ é *regular à esquerda* (resp., *à direita*) *para a operação* $*$ se, e sòmente se, está verificada a seguinte condição: quaisquer que sejam x e y em E, se $a*x=a*y$ (resp., $x*a=y*a$), então $x=y$ (resp., $x=y$). Um elemento regular à esquerda e à direita é chamado, simplesmente, *elemento regular*.

Conforme veremos na parte de exercícios dêste parágrafo um elemento pode ser regular à esquerda e não regular à direita ou regular à direita e não regular à esquerda (ver os exercícios 44 e 45).

TEOREMA 6 - Todo elemento simetrizável de um monóide $(E,*)$ é regular para a operação $*$.

Com efeito, seja a um elemento simetrizável e sejam x e y dois elementos quaisquer de E tais que $a*x=a*y$; temos

$$x=e*x=(a'*a)*x=a'*(a*x)=a'*(a*y)=(a'*a)*y=e*y=y$$

portanto, a é regular à esquerda. Anàlogamente demonstra-se que a é regular à direita. ∎

Um elemento regular também é chamado *elemento cancelável* e a condição dada na definição 10 é denominada *lei restrita do cancelamento à esquerda* (resp., à direita).

EXEMPLO 19 - Consideremos o monóide multiplicativo $\mathbf{Z}$ dos números inteiros; o número 0 não é regular, pois, por exemplo, $1\cdot 0=2\cdot 0$ e $1\neq 2$. Por outro lado, todo número inteiro não nulo é regular para a multiplicação. Êste exemplo nos mostra que, em geral, existem elementos regulares que não são simetrizáveis.

EXERCÍCIOS

18. Consideremos a operação $*$ definida sôbre $E=\{e,a,b\}$ pela seguinte tábua (já obtida no exercício 11):

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

a) Mostrar que esta operação é comutativa, tem elemento neutro e não é associativa.

b) Mostrar que o elemento a tem dois simétricos (portanto, a conclusão do teorema 2 não é, em geral, verdadeira para uma operação não associativa).

19. Consideremos a operação $*$ definida sôbre $E=\{e,a,b\}$ pela seguinte tábua (já obtida no exercício 11):

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	e
b	b	e	a

a) Mostrar que esta operação é comutativa, tem elemento neutro e não é associativa.

b) Verificar que todo elemento de E é simetrizável e admite um único simétrico.

c) Mostrar que a parte 2) do teorema 3 não é verdadeira para esta operação.

20. Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto não vazio E. Diz-se que um elemento e (resp., e') de E é *elemento neutro à esquerda* (resp., *à direita*) *para esta operação* $*$ se, e sòmente se, $e*x=x$ (resp., $x*e'=x$) para todo x em E. a) Mostrar que se a operação $*$ tem elemento neutro à esquerda e e elemento neutro à direita e', então, $e=e'$. b) Nas condições da parte anterior, mostrar que a operação $*$ admite um único elemento neutro à esquerda e um único elemento neutro à direita. c) Examinar as noções acima para a operação usual de subtração definida sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros. d) Fazer o mesmo para a operação de potenciação $(a,b)\mapsto a^b$ definida sôbre o conjunto $\mathbf{N}'$ dos números naturais não nulos. e) Mostrar que a operação $|$, definida no exercício 7 admite um único elemento neutro à direita e que não admite elemento neutro à esquerda.

21. Determinar os elementos simetrizáveis e os elementos regulares para as operações α e β definidas no exercício 7.

22. Determinar os elementos simetrizáveis e os elementos regulares para a operação definida na parte e) do exercício 4.

23. Fazer o mesmo para a operação definida na parte e) do exercício 6.

24. Mostrar que o conjunto dos elementos regulares de um monóide $(E,*)$ é fechado em relação à operação $*$.

1.3 - GRUPOS

DEFINIÇÃO 11 - Diz-se que uma operação $*$ sôbre um conjunto G, define uma *estrutura de grupo sôbre* G se, e sòmente se, os seguintes axiomas estão verificados

G1 (propriedade associativa): quaisquer que sejam x, y e z em G, tem-se

$$(x*y)*z=x*(y*z);$$

G2 (existência do elemento neutro): existe em G um elemento e tal que

$$x*e=x=e*x,$$

para todo x em G;

G3: para todo elemento x de G existe um elemento x' em G tal que

$$x*x'=e=x'*x.$$

Portanto, um grupo é um monóide G que possui a propriedade: todo elemento de G é simetrizável. Se usarmos a notação multiplicativa ou aditiva para a operação de um grupo diremos, respectivamente, que o grupo é multiplicativo ou aditivo.

Se a operação $*$ de um grupo G satisfaz o axioma:

G4: (propriedade comutativa): quaisquer que sejam x e y em G, tem-se $x*y=y*x$;

diremos que G é um *grupo comutativo* ou *abeliano*.

Em geral, só usaremos a notação aditiva para indicar a operação de um grupo G quando esta operação fôr comutativa.

EXEMPLO 20 - A operação usual de adição define uma estrutura de grupo comutativo sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros. O mesmo vale para a operação usual de adição sôbre $\boldsymbol{Q}$ ou $\boldsymbol{R}$.

EXEMPLO 21 - A operação usual de multiplicação não define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros, pois sòmente 1 e -1 são inversíveis.

EXEMPLO 22 - A operação usual de multiplicação define uma estrutura de grupo comutativo sôbre o conjunto $\boldsymbol{Q}^*$ dos números racionais não nulos. Obtém-se, anàlogamente, o grupo comutativo $(\boldsymbol{R}^*,\cdot)$.

EXEMPLO 23 - Consideremos o conjunto $U(E)$ dos elementos simetrizáveis de um monóide $(E,*)$; conforme a parte b) do corolário do teorema 3, a operação $*$ induz uma operação sôbre $U(E)$, que é associativa, tem elemento neutro e satisfaz o axioma G3 (parte c) do mesmo corolário). Portanto, $U(E)$ é um grupo em relação à operação induzida sôbre $U(E)$ pela operação de E; o grupo $(U(E),*)$ é denominado *grupo dos elementos simetrizáveis do monóide* $(E,*)$.

EXEMPLO 24 - Consideremos o monóide $(M,\circ)$ definido no exemplo 10, onde $M=E^E$ é o conjunto de tôdas as aplicações de um conjunto não vazio E em si mesmo; conforme vimos no exemplo 18, o conjunto $U(M)$ dos elementos simetrizáveis de M coincide com o conjunto $S(E)$ de tôdas as permutações de E. O exemplo anterior nos mostra que $(S(E),\circ)$ é um grupo, que é denominado *grupo das permutações do conjunto* E ou *grupo simétrico do conjunto* E. No caso particular em que $E=\{1,2,\cdots,n\}$ indica-se $S(E)$ pela notação S_n e um elemento f de S_n é indicado por

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix},$$

onde $a_i=f(i)$ para $i=1,2,\cdots,n$. Pode-se demonstrar que S_n é um conjunto finito e tem $n!$ elementos.

No caso particular em que $n=3$, os elementos de S_3 são

$$f_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=1_E,\quad f_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad f_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$f_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad f_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\text{ e }f_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

A tábua da operação do grupo $(S_3,\circ)$ é a seguinte

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_5	f_6	f_4
f_3	f_3	f_1	f_2	f_6	f_4	f_5
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

Notemos que o grupo S_3 não é comutativo, pois, por exemplo,

$$f_4\circ f_5=f_3\quad\text{e}\quad f_5\circ f_4=f_2.$$

Observemos ainda que a fórmula (14) não é verdadeira para as permutações f_4 e f_5, pois

$$(f_4\circ f_5)^{-1}=f_3^{-1}=f_2$$

e

$$(f_5\circ f_4)^{-1}=f_2^{-1}=f_3.$$

De acôrdo com o teorema 6, todo elemento de um grupo $(G,*)$ é regular para a operação $*$, portanto, valem em G as leis do cancelamento à esquerda e à direita: quaisquer que sejam a, x e y em G, se $a*x=a*y$ ou $x*a=y*a$, então $x=y$.

Seja G um grupo multiplicativo e abeliano; notando-se que $U(G)=G$ resulta que a aplicação $(a,b)\mapsto\frac{a}{b}$, de $G\times G$ em G, é agora uma operação sôbre G, que é denominada *divisão*. Anàlogamente, se G é um grupo aditivo e comutativo, a aplicação $(a,b)\mapsto a-b$ é uma operação sôbre G, que é denominada *subtração*.

EXERCÍCIOS

25. Mostrar que a operação $*$, definida na parte e) do exercício 4, define uma estrutura de grupo comutativo sôbre $\boldsymbol{R}$.

26. Seja G um grupo multiplicativo e consideremos a operação $*$, definida sôbre G, por $a*b=ba$. Mostrar que G é um grupo em relação à operação $*$.

27. Demonstrar que se um conjunto G tem no máximo quatro elementos, então, tôda estrutura de grupo sôbre G é comutativa. Construir as táboas das operações dêstes grupos.

28. Verificar que o elemento unidade de um grupo multiplicativo G é o único elemento x de G tal que $xx=x$.

29. Mostrar que se G é um grupo multiplicativo e se o conjunto G é finito e com um número par de elementos, então existe um elemento a, de G, tal que $a=a^{-1}$.

30. Se G é um grupo multiplicativo e se $xx=1$, para todo x em G, então G é abeliano.

1,4 - SEMI-GRUPOS ORDENADOS

Neste parágrafo só consideraremos semi-grupos comutativos e usaremos sempre a notação aditiva.

Em alguns casos estão definidas duas estruturas sôbre um mesmo conjunto e se impõe, então, alguma lei que relacione estas estruturas. Por exemplo, sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros está definida uma relação de ordem $\leqslant$ e uma estrutura de grupo dada pela operação usual de adição; estas estruturas são compatíveis no seguinte sentido: se $x\leqslant y$, então $x+z\leqslant y+z$. De um modo geral colocaremos a seguinte

DEFINIÇÃO 12 - Seja $(E,+)$ um semi-grupo comutativo e seja $\leqslant$ uma relação de ordem sôbre o conjunto E. Diz-se que a operação de adição e a ordem $\leqslant$ são *compatíveis* se, e sòmente se, o seguinte axioma está verificado

OA: quaisquer que sejam x, y e z em E, se $x\leqslant y$, então $x+z\leqslant y+z$.

Neste caso também se diz que o semi-grupo comutativo $(E,+)$ está parcialmente ordenado pela ordem $\leqslant$, ou, que $(E,+)$ é um *semi-grupo parcialmente ordenado*. Portanto, o conceito de semi-grupo comutativo parcialmente ordenado compreende um conjunto E, uma operação sôbre E, uma ordem sôbre E e o fato que os axiomas G1, G4, O1, O2, O3 e OA são verdadeiros. Diremos que um semi-grupo $(E,+)$ é *parcialmente ordenável* quando existe uma ordem parcial, sôbre o conjunto E, que satisfaz o axioma OA. Se $(E,+,\leqslant)$ é um semi-grupo parcialmente ordenado e se a ordem $\leqslant$ satisfaz o axioma O4, isto é, se a ordem é total, diremos que E é um *semi-grupo totalmente ordenado*. No que se segue só consideraremos semi-grupos totalmente ordenados que serão denominados, simplesmente, semi-grupos ordenados.

Definem-se, anàlogamente, os conceitos de monóide (comutativo) e de grupo (comutativo) parcialmente ou totalmente ordenados impondo-se que a operação e a ordem sejam compatíveis, isto é, que seja verdadeiro o axioma OA.

EXEMPLO 25 - A ordem habitual sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros é compatível com a adição; portanto, $(\boldsymbol{Z},+)$ é um semi-grupo totalmente ordenado ou é um monóide totalmente ordenado ou ainda é um grupo totalmente ordenado. Notemos que, ao contrário, no semi-grupo multiplicativo $(\boldsymbol{Z},\cdot)$ não vale o axioma OA.

TEOREMA 7 - Num semi-grupo ordenado E valem as seguintes propriedades:

a) se $a\leqslant b$ e se $c\leqslant d$, então, $a+c\leqslant b+d$ (princípio da soma de desigualdades);

b) se c é regular, então, $a<b$ implica $a+c<b+c$;

c) se $a+c<b+c$, então, $a<b$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Conforme as hipóteses e o axioma OA, temos

$$a+c\leqslant b+c \quad \text{e} \quad b+c\leqslant b+d;$$

portanto, $a+c\leqslant b+d$.

b) Por hipótese temos $a\neq b$, logo, $a+c\neq b+c$, pois c é regular; de $a<b$ vem $a\leqslant b$, logo, $a+c\leqslant b+c$, portanto, $a+c<b+c$.

c) Como a ordem é total devemos ter $a<b$ ou $b\leqslant a$ (sendo que êstes casos se excluem mùtuamente); neste último caso teríamos, em virtude do axioma OA, $b+c\leqslant a+c$, contra a hipótese, portanto, $a<b$. ∎

TEOREMA 8 - Num monóide ordenado E valem as seguintes propriedades:

a) se b é simetrizável, então $a<b$ se, e sòmente se, $a-b<0$;

b) se a e b são simetrizáveis, então $a<b$ se, e sòmente se, $-b<-a$;

c) se a é simetrizável, então $0<a$ se, e sòmente se, $-a<0$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Sabemos que todo elemento simetrizável é regular (teorema 6), logo, de $a<b$ resulta, em virtude da parte b) do teorema 7, $a+(-b)<b+(-b)$; portanto, $a-b<0$. Anàlogamente, de $a-b<0$ vem $(a-b)+b<0+b$, logo, $a<b$.

b) Suponhamos que $a<b$; conforme a parte anterior temos $a-b<0$, de onde vem, em virtude da parte b) do teorema 7, $(-a)+(a-b)<(-a)+0$, ou seja, $-b<-a$. Recìprocamente, de $-b<-a$ resulta pelo que acabámos de demonstrar $-(-a)<-(-b)$, ou seja, $a<b$.

c) Esta propriedade é um caso particular da anterior. ∎

TEOREMA 9 - Num grupo ordenado G as seguintes propriedades são equivalentes:

1) $a<b$;
2) $a+c<b+c$;
3) $-b<-a$;
4) $a-b<0$;
5) $0<b-a$.

É uma conseqüência imediata dos teoremas 7 e 8.

EXERCÍCIOS

31. Enunciar os teoremas 7, 8 e 9 no caso em que se usa a notação multiplicativa.

32. Mostrar que num grupo ordenado G valem as seguintes propriedades:

a) $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $a+c \leqslant b+c$;
b) $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $0 \leqslant b-a$;
c) $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $a-b \leqslant 0$;
d) $0 \leqslant a$ se, e sòmente se, $-a \leqslant 0$;
e) $0 \leqslant a$ e $0 \leqslant b$ implicam $0 \leqslant a+b$.

33. Mostrar que o monóide $(\mathbf{N}^*,\cdot)$ é parcialmente ordenado pela relação de divisibilidade $|$ (definida no exemplo 24, Capítulo I).

34. Mostrar que para todo conjunto E os monóides $(\mathcal{P}(E),\cap)$ e $(\mathcal{P}(E),\cup)$ são parcialmente ordenados pela relação de inclusão.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §1

35. Seja $(E,*)$ um monóide e seja M uma parte não vazia do conjunto E; designaremos por $C(M)$ o conjunto de todos os elementos x de E que são permutáveis com todos os elementos de M, isto é, tais que $x*m=m*x$, para todo m em M. Verificar as seguintes propriedades:

a) $C(M)\neq\emptyset$;
b) $C(M)$ é fechado em relação à operação $*$;
c) se N é uma parte de E e se $M\subset N$, então $C(N)\subset C(M)$;
d) $M\subset C(C(M))$;
e) $C(C(C(M)))=C(M)$.

36. Sejam A e B dois monóides multiplicativos e consideremos o produto cartesiano $A\times B$ dos conjuntos A e B; se (a,b) e (c,d) são dois elementos quaisquer de $A\times B$ colocaremos, por definição, $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$. Obtém-se, dêste modo, uma operação de multiplicação sôbre o conjunto $A\times B$. a) Mostrar que $A\times B$ é um monóide em relação a esta operação. b) Determinar o grupo $U(A\times B)$ dos elementos inversíveis do monóide $(A\times B,\cdot)$.

37. Seja $(E,*)$ um semi-grupo e seja a um elemento do conjunto E; mostrar que a operação α definida por $x\,\alpha\, y=(x*a)*y$ é associativa e, portanto, (E,α) é um semi-grupo.

38. Seja $(E,*)$ um semi-grupo; para todo elemento a de E, a aplicação $\gamma_a: E\to E$ (resp., $\delta_a: E\to E$) definida por $\gamma_a(x)=a*x$ (resp., $\delta_a(x)=a*x$) é denominada *translação à esquerda* (resp., *à direita*) *determinada pelo elemento* a.

a) Verificar que $\gamma_{a*b}=\gamma_a\circ\gamma_b$ e $\delta_{a*b}=\delta_b\circ\delta_a$, quaisquer que sejam a e b em E.

b) Mostrar que a é um elemento central (exercício 16) se, e sòmente se, $\gamma_a=\delta_a$.

c) Mostrar que a é regular à esquerda (resp., à direita) se, e sòmente se, γ_a (resp., δ_a) é injetora.

d) Suponhamos que a operação $*$ admita elemento neutro e. Mostrar que a é simetrizável se, e sòmente se, γ_a e δ_a são permutações de E.

e) Mostrar que se γ_a e δ_a são permutações de E, então existe um elemento neutro para a operação $*$ e a é simetrizável.

39. Seja $(E,*)$ um semi-grupo e suponhamos que: 1) para todo a em E, γ_a é uma permutação de E; 2) existe b em E tal que δ_b seja uma permutação de E. Nestas condições, demonstrar que $(E,*)$ é um grupo.

40. Consideremos uma operação de multiplicação associativa sôbre um conjunto finito e não vazio G; demonstrar que se esta operação satisfaz as duas leis do cancelamento, então ela define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto G.

41. Seja $(E,*)$ um semi-grupo e suponhamos que o conjunto E seja finito e não vazio. Mostrar que se existe um elemento regular a em E, então $(E,*)$ é um monóide.

42. Seja $*$ uma operação sôbre um conjunto E e suponhamos que esta operação tenha elemento neutro e. Diz-se que um elemento a de E *é simetrizável à esquerda* (resp., *à direita*) se, e sòmente se, existe a' (resp., a'') em E tal que $a'*a=e$ (resp., $a*a''=e$). Neste caso, todo

elemento a' (resp., a'') tal que $a'*a = e$ (resp., $a*a'' = e$) é denominado *simétrico à esquerda* (resp., *à direita*) do elemento a.

a) Mostrar que se a operação $*$ é associativa e se a é simetrizável à esquerda e à direita, então a é simetrizável. Neste caso, a admite um único simétrico à esquerda e um único simétrico à direita.

b) Se $(E,*)$ é um monóide, mostrar que os elementos x e y de E são simetrizáveis se, e sòmente se, $x*y$ é simetrizável à esquerda e $y*x$ é simetrizável à direita.

43. Consideremos o monóide $(\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}},\circ)$, onde $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ é o conjunto de tôdas as aplicações de $\boldsymbol{N}$ em $\boldsymbol{N}$.

a) Mostrar que a aplicação definida no exemplo 43 do Capítulo I admite infinitos simétricos à esquerda (ver o exercício 80 do Capítulo I).

b) Mostrar que a aplicação definida no exemplo 44 do Capítulo I admite infinitos simétricos à direita (ver o exercício 81 do Capítulo I).

44. Com as notações do exercício anterior, mostrar que a aplicação definida no exemplo 44 do Capítulo I é regular à direita mas não é regular à esquerda.

45. Com as notações do exercício 43, mostrar que a aplicação definida no exemplo 44 do Capítulo I é regular à esquerda mas não é regular à direita.

§2 - NÚMEROS NATURAIS

2.1 - CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Admitiremos, neste parágrafo, a existência de um semi-grupo totalmente ordenado e comutativo $(\boldsymbol{N},+,\leqslant)$ que satisfaz os seguintes axiomas

N1: existem elementos a e b em $\boldsymbol{N}$ tais que $a \neq b$;

N2: todo elemento de $\boldsymbol{N}$ é regular para a operação $+$;

N3: quaisquer que sejam a e b em $\boldsymbol{N}$, se $b \leqslant a$, então existe c em $\boldsymbol{N}$ tal que $a = b+c$;

N4: o conjunto $\boldsymbol{N}$ é bem ordenado pela ordem $\leqslant$.

Notemos, explìcitamente, que estamos admitindo a existência de um conjunto $\boldsymbol{N}$ que satisfaz o axioma N1 (cujo significado intuitivo é o seguinte: o conjunto $\boldsymbol{N}$ tem pelo menos dois elementos), que sôbre $\boldsymbol{N}$ estejam definidas uma operação de adição $+$ e uma relação $\leqslant$ que satisfazem os axiomas G1, G4, O1, O2, O3, O4, OA, N2, N3 e N4.

Observações

1.ª) Um problema que se impõe imediatamente é o da existência de um conjunto $\boldsymbol{N}$ que satisfaça todos os axiomas mencionados acima. Pode-se construir por intermédio da teoria dos conjuntos, ou, mais precisamente, por meio da teoria dos números cardinais (ver, por exemplo, [16]) um semi-grupo comutativo e totalmente ordenado que satisfaz os axiomas N1, N2, N3 e N4; não elaboraremos tal construção, pois acreditamos que ela se coloca de modo mais natural numa exposição completa sôbre a teoria dos conjuntos.

2.ª) Outros problemas que surgem naturalmente são os seguintes: 1.º) Os axiomas acima são categóricos? Em outros têrmos, a estrutura definida sôbre o semi-grupo comutativo totalmente ordenado $(N,+,\leqslant)$ pelos axiomas N1, N2, N3 e N4 é única? Mais precisamente, se $(E,+,\leqslant)$ é um semi-grupo comutativo totalmente ordenado e se os axiomas N1, N2, N3 e N4 são válidos para E, pergunta-se: tôda propriedade verdadeira em $\boldsymbol{N}$ também é verdadeira em E e, recìprocamente, tôda propriedade verdadeira em E também é verdadeira em $\boldsymbol{N}$? Êste problema será respondido pela afirmativa, pois demonstraremos que nas condições anteriores os semi-grupos $(\boldsymbol{N},+,\leqslant)$ e $(E,+,\leqslant)$ são ordenadamente isomorfos (teorema 29). 2.º) Os axiomas acima nos descrevem, exatamente, «o conceito intuitivo de número natural»? A resposta a êste problema só se tornará «evidente» depois de obtermos as propriedades mais importantes que derivam dêstes axiomas e compará-las, então, com «as diversas propriedades que a nossa intuição supõe que sejam verdadeiras para os números naturais».

3.ª) Existem outros sistemas de axiomas que descrevem também o conjunto dos números naturais; podemos dizer que a escôlha entre êste ou aquêle sistema depende essencialmente das dificuldades didáticas de apresentação dêste assunto. Por exemplo, o sistema de axiomas de G. Peano (1858-1932) (ver [21]) é um dos mais simples possíveis, mas a exposição torna-se demasiado longa e é carregada de demonstrações delicadas para o aluno que toma contacto com êste assunto pela primeira vez.

4.ª) Em vista das observações acima fixaremos de uma vez por tôdas um conjunto $\boldsymbol{N}$ que satisfaz o axioma N1, uma operação de adição $+$ sôbre $\boldsymbol{N}$ que satisfaz os axiomas G1, G4 e N2 e uma relação $\leqslant$, sôbre $\boldsymbol{N}$, que satisfaz os axiomas O1, O2, O3, O4, OA, N3 e N4. Os elementos do conjunto $\boldsymbol{N}$ passam a ser denominados *números naturais* e diremos, então, que $\boldsymbol{N}$ é o *conjunto dos*

números naturais. Neste caso, o axioma N4 é usualmente chamado *princípio do menor número natural* e pode ser enunciado sob a forma: todo conjunto não vazio de números naturais possui um mínimo. Explìcitamente, para todo subconjunto S de $\boldsymbol{N}$, se S é não vazio, então existe um (único) número natural m tal que: 1) $m \in S$; 2) $m \leqslant s$, qualquer que seja s em S.

Conforme o princípio do menor número natural o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais admite um mínimo, que será denominado *zero* e será designado por 0. Observemos que $0 \leqslant n$ para todo número natural n e, por outro lado, a denominação anterior é justificada pelo seguinte

TEOREMA 10 - O mínimo de $\boldsymbol{N}$ é o elemento neutro para a operação de adição.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme os axiomas O1 e N3, existe um número natural a tal que $0+a=0$; por outro lado, temos $0 \leqslant a$, logo, em virtude do axioma OA, $0+0 \leqslant 0+a=0$ e como $0 \leqslant 0+0$, teremos $0+0=0$. Finalmente, para todo número natural x, temos

$$(x+0)+0 = x+(0+0) = x+0$$

e como 0 é regular para a operação + (axioma N3) concluímos que $x+0=x$. ∎

Daremos a seguir outras propriedades do conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais sendo que a mais importante delas é o princípio de indução finita (teorema 17).

TEOREMA 11 - Se a, b e c são números naturais tais que $b+c=a$, então, $b \leqslant a$.

Com efeito, temos $0 \leqslant c$, de onde vem pelo axioma OA, $b+0 \leqslant b+c$; portanto, $b \leqslant a$. ∎

O axioma N3 e o teorema anterior podem ser enunciados sob a forma: quaisquer que sejam os números naturais a e b, tem-se $b \leqslant a$ se, e sòmente se, existe um número natural c tal que $a=b+c$. Podemos completar êste resultado com o seguinte

TEOREMA 12 - Quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos $b<a$ se, e sòmente se, existe um número natural não nulo c tal que $a=b+c$.

DEMONSTRAÇÃO - De $b<a$ vem $b \leqslant a$, portanto, de acôrdo com o axioma N3, existe um número natural c tal que $a=b+c$ e temos $c \neq 0$, pois, no caso contrário, resultaria $a=b+c=b+0=b$, contra a hipótese. Recìprocamente, supondo-se que $a=b+c$ teremos, em virtude do teorema anterior, $b \leqslant a$; se $b=a$, teríamos $b+c=b=b+0$, de onde viria, pelo axioma N2, $c=0$, contra a hipótese. ∎

TEOREMA 13 - Quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, temos $b<a$ se, e sòmente se, $b+c<a+c$.

DEMONSTRAÇÃO - De $b<a$ resulta, de acôrdo com a parte b) do teorema 8 e o axioma N2, $b+c<a+c$. Recìprocamente, de $b+c<a+c$ segue-se que $b<a$ em virtude da parte c) do teorema 8. ∎

TEOREMA 14 - Se a e b são dois números naturais quaisquer e se $b \leqslant a$, então existe um único número natural c tal que $b+c=a$.

Com efeito, a existência de c é assegurada pelo axioma N3 e a unicidade pelo axioma N2. ∎

Se $b \leqslant a$, o único número natural c tal que $b+c=a$ é denominado *diferença entre a e b* e será indicado por $a-b$ (leia-se: a menos b); portanto, temos

$$b+(a-b) = a = (a-b)+b$$

e, em particular, $a-a=0$.

Indicaremos por $\boldsymbol{N}^*$ o complementar de $\{0\}$ em $\boldsymbol{N}$, isto é, $\boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{N}-\{0\}$; de acôrdo com o axioma N1 o subconjunto $\boldsymbol{N}^*$ não é vazio, logo, existe o mínimo de $\boldsymbol{N}^*$ que é indicado por 1 (um) e esta notação será justificada mais adiante (§2.3) ao introduzirmos a operação de multiplicação sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}$. É imediato que $0 \neq 1$ e como $0 = min\,\boldsymbol{N}$, temos $0<1$; além disso, para todo número natural não nulo n, temos $1 \leqslant n$, ou seja, não existem números naturais estritamente compreendidos entre 0 e 1.

TEOREMA 15 - Quaisquer que sejam os números naturais n, a e b, temos

a) $n<n+1$;

b) se $n \neq 0$, então, $n-1<n$;

c) $a<b$ se, e sòmente se, $a+1 \leqslant b$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Já tínhamos observado que $0<1$; daqui resulta, pelo teorema 13, $n+0<n+1$, ou seja, $n<n+1$.

b) Basta notar que $1\leqslant n$ e que $n=(n-1)+1$.

c) De $a<b$ resulta $b-a\neq 0$, logo, $1\leqslant b-a$, de onde vem pelo axioma OA, $a+1\leqslant a+(b-a)$; portanto, $a+1\leqslant b$. Reciprocamente, de $a+1\leqslant b$ vem $a<b$, pois, conforme a parte a), temos $a<a+1$. ∎

Para todo número natural n colocaremos

$$I_n=\{x\in N \mid n\leqslant x\}$$

e

$$I_n^*=\{x\in N \mid n<x\};$$

portanto, em particular, temos $I_0=N$ e $I_0^*=N^*$.

Se m e n são dois números naturais quaisquer, colocaremos $[m,n]=\{x\in N \mid m\leqslant x \text{ e } x\leqslant n\}$.

É imediato que $[m,n]=\emptyset$ se, e sòmente se, $n<m$. Quando $m\leqslant n$ diremos que $[m,n]$ é o *intervalo inteiro* (fechado) *de extremidades* m *e* n. O conjunto

$$\{x\in N \mid m\leqslant x \text{ e } x<n\}$$

será indicado por $[m,n[$; notemos que $[m,n[=\emptyset$ se, e sòmente se, $n\leqslant m$. Quando $m\leqslant n$ diremos que $[m,n[$ é o intervalo inteiro de extremidades m e n, fechado à esquerda e aberto à direita; neste caso, é imediato que $[m,n]=[m,n[\cup\{n\}$.

TEOREMA 16 - Para todo número natural n, tem-se $[n,n+1]=\{n,n+1\}$, ou seja, não existem números naturais x tais que $n<x<n+1$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, por absurdo, que exista um número natural x tal que $n<x<n+1$; de $n<x$ vem $x=n+a$, logo, $n+a<n+1$, de onde concluímos que $a<1$, portanto, $a=0$ e então $x=n+a=n+0=n$, contra a hipótese. ∎

TEOREMA 17 (*Princípio de indução finita*) - Seja S um subconjunto de N tal que

a) $0\in S$;

b) para todo número natural n, se $n\in S$, então, $n+1\in S$.

Nestas condições, temos $S=N$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, por absurdo, que $S\neq N$; neste caso, o complementar S' de S em N é não vazio, logo, conforme o axioma N4, existe $a=minS'$ e por causa da condição a) temos $a\neq 0$, logo, $1\leqslant a$. Daqui resulta $a-1<a$ e como $a=minS'$, temos $a-1\notin S'$; portanto, $a-1\in S$, de onde vem, pela condição b), $(a-1)+1\in S$, ou seja, $a\in S$ e chegamos assim a uma contradição. ∎

O teorema acima nos mostra que o único subconjunto de N que satisfaz as condições a) e b) é o próprio N.

COROLÁRIO 1 - Seja m um número natural e seja S um subconjunto de I_m tal que

a) $m\in S$;

b) para todo número natural n, se $n\in S$, então $n+1\in S$.

Nestas condições, temos $S=I_m$.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o subconjunto $S_1=[0,m[\cup S$ e notemos que $S\cap[0,m[=\emptyset$. A condição a) do teorema anterior está satisfeita para S_1, pois, $0\in S$ se $m=0$ e $0\in[0,m[$ se $m\neq 0$. Se n é um número natural qualquer e se $n\in S_1$, temos $n\in[0,m[$ ou $n\in S$; neste último caso teremos $n+1\in S$, em virtude da condição b) acima, logo, $n+1\in S_1$. Se $n\in[0,m[$, temos $n+1<m$ ou $n+1=m$, portanto, $n+1\in[0,m[$ ou $n+1\in S$; em ambos os casos concluímos que $n+1\in S_1$. Fica assim demonstrado que vale a condição b) do teorema 18 para o conjunto S_1; portanto, $S_1=N=[0,m[\cup I_m$, de onde resulta $S=I_m$. ∎

COROLÁRIO 2 - Seja S um subconjunto do intervalo inteiro $[a,b]$ $(a\leqslant b)$ tal que

a) $a\in S$;

b) para todo número natural n, se $n<b$ e se $n\in S$, então, $n+1\in S$.

Nestas condições, temos $S=[a,b]$.

Com efeito, o subconjunto $S_1=S\cup I_b^*$ satisfaz as condições a) e b) do corolário anterior, portanto, $S_1=I_a=[a,b]\cup I_b^*$ e como $S\cap I_b^*=\emptyset$, teremos $S=[a,b]$. ∎

COROLÁRIO 3 - Seja m um número natural e seja S um subconjunto de I_m tal que

a) $m\in S$;

b) para todo número natural n, se $m\leqslant n$ e se $[m,n[\subset S$, então, $n\in S$.

Nestas condições, temos $S=I_m$.

Com efeito, basta notar que o subconjunto $S_1 = [0,m[\cup S$ satisfaz as condições a) e b) do teorema 17; portanto, $[0,m[\cup S = N = [0,m[\cup I_m$ e como $S \cap [0,m[= \emptyset$ teremos $S = I_m$. ∎

EXERCÍCIOS

46. Mostrar que $[0,n+1[= [0,n[\cup \{n\}$, para todo número natural n.

47. Se m e n são números naturais tais que $m \leqslant n$, mostrar que $[m,n] = I_m \cap [0,n]$.

48. Mostrar que se a é um número natural tal que $a+a = 0$, então, $a = 0$.

49. Verificar que o subconjunto $N - \{0,1\}$ não é vazio. Indicando-se por 2 (dois) o mínimo dêste conjunto mostrar que $2 = 1+1$.

50. Para todo número natural n o subconjunto $N - [0,n]$ não é vazio; mostrar que $n+1 = min(N - [0,n])$. Observação: Obtêm-se dêste modo os números naturais $3 = 2+1 = min(N - [0,2])$, $4 = 3+1 = min(N - [0,3])$ e assim por diante até $9 = 8+1 = min(N - [0,8])$.

51. Determinar tôdas as decomposições dos números naturais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (definidos no exercício anterior) como soma de dois números naturais.

2.2 - DEFINIÇÃO POR RECORRÊNCIA

O leitor já está familiarizado com diversos exemplos de «definição por recorrência», entre os quais podemos citar a potência n-ésima de um número real não nulo a, onde n é um número natural. Neste caso procede-se do seguinte modo: coloca-se, por definição, $a^0 = 1$ e supondo-se que a^n esteja definido põe-se $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Notemos que êste processo apresenta um inconveniente, pois, não está especificado de modo preciso o que se entende por «supondo-se que a^n esteja definido» e, efetivamente, utiliza-se a própria definição de potência n-ésima ao se definir a potência $(n+1)$-ésima de a. Para eliminar êstes defeitos e com o objetivo de tornar rigorosa a noção de definição por recorrência estabeleceremos abaixo (teorema 18) o princípio geral de definição por recorrência.

DEFINIÇÃO 13 - Seja a um elemento de um conjunto não vazio E, seja φ uma aplicação de E em E e seja m um número natural. Diz-se que uma aplicação $g: [m,n] \to E$ *é admissível para o número natural* $n \geqslant m$ *e para a aplicação* φ se,

e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

a) $g(m) = a$;

b) para todo número natural r tal que $m \leqslant r < n$, tem-se $g(r+1) = \varphi(g(r))$.

LEMA 1 - Com as notações da definição anterior, se existe uma aplicação g admissível para o número natural $n \geqslant m$ e para a aplicação φ, então, g é única.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $g': [m,n] \to E$ uma aplicação admissível para n e φ e consideremos o conjunto

$$S = \{r \in [m,n] \mid g'(r) = g(r)\}.$$

Como $g'(m) = a = g(m)$, temos $a \in S$ e para todo número natural r, se, $r < n$ e se $r \in S$, tem-se $g'(r) = g(r)$, logo,

$$g'(r+1) = \varphi(g'(r)) = \varphi(g(r)) = g(r+1);$$

portanto, $r+1 \in S$. Daqui resulta, conforme o corolário 2 do teorema 16, que $S = [m,n]$ e então $g' = g$. ∎

LEMA 2 - Se m e n são números naturais tais que $m \leqslant n$, então $[m,n+1] = [m,n] \cup \{n+1\}$ (16).

DEMONSTRAÇÃO - Seja x um elemento qualquer de $[m,n+1]$, logo, $m \leqslant x$ e $x \leqslant n+1$; se $x < n+1$, temos, conforme a parte c) do teorema 15, $x+1 \leqslant n+1$, logo, $x \leqslant n$, portanto, $m \leqslant x \leqslant n$, ou seja, $x \in [m,n]$. Fica assim demonstrado que $[m,n+1] \subset [m,n] \cup \{n+1\}$. Por outro lado, se $x \in [m,n] \cup \{n+1\}$, temos $x \in [m,n]$ ou $x = n+1$, logo, $m \leqslant x \leqslant n$ ou $x = n+1$, de onde vem, $m \leqslant x \leqslant n+1$; portanto, $[m,n] \cup \{n+1\} \subset [m,n+1]$. ∎

LEMA 3 - Com as notações da definição 13, se $g: [m,n] \to E$ é uma aplicação admissível para n e φ, então existe uma aplicação $g': [m,n+1] \to E$ admissível para $n+1$ e φ, que é um prolongamento de g.

DEMONSTRAÇÃO - Notemos que $n+1 \notin [m,n]$, logo, de acôrdo com o lema 2 podemos considerar a aplicação $g': [m,n+1] \to E$ definida por $g'(r) = g(r)$ se $r \in [m,n]$

e $$g'(n+1) = \varphi(g(n)) \quad (17).$$

É imediato que g' é um prolongamento de g, logo, só falta demonstrar que g' é admissível para $n+1$ e φ. Ora, temos, por definição, $g'(m) = g(m) = a$; por outro lado, se $r \in [m,n]$ e se $r < n$, temos $r+1 \in [m,n]$, logo, $g'(r+1) = g(r+1) = \varphi(g(r)) = \varphi(g'(r))$ e, finalmente, conforme a fórmula (17), teremos

$$g'(n+1) = \varphi(g(n)) = \varphi(g'(n)).$$ ∎

LEMA 4 - Se $g'\colon [m,n+1] \to E$ é uma aplicação admissível para $n+1$ e φ, então a restrição g de g' ao intervalo $[m,n]$ é admissível para n e φ.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme as hipóteses acima, temos $g(m) = g'(m) = a$ e para todo número natural r tal que $m \leqslant r < n$, teremos $g(r+1) = g'(r+1) = \varphi(g'(r)) = \varphi(g(r))$;
portanto, g é admissível para n e φ. ∎

TEOREMA 18 (*princípio de definição por recorrência*) - Seja a um elemento de um conjunto não vazio E, seja φ uma aplicação de E em E e seja m um número natural. Nestas condições, existe uma única aplicação $f\colon I_m \to E$ tal que

a) $f(m) = a$;

b) $f(n+1) = \varphi(f(n))$, para todo número natural $n \geqslant m$.

DEMONSTRAÇÃO - Indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais n tais que: $n \geqslant m$ e existe uma aplicação $g_n\colon [m,n] \to E$ admissível para n e φ. Inicialmente, vamos mostrar que $S = I_m$ por intermédio do corolário 1 do teorema 17.

a) $m \in S$. Com efeito, neste caso temos $[m,m] = \{m\}$ e, portanto, existe uma única aplicação $g_m\colon \{m\} \to E$ tal que $g_m(m) = a$ e é imediato que esta aplicação é admissível para m e φ.

b) Se n é um elemento qualquer de S existe uma aplicação $g_n\colon [m,n] \to E$ admissível para n e φ, portanto, de acôrdo com o lema 3, existe uma aplicação $g_{n+1}\colon [m,n+1] \to E$, prolongamento de g_n, que é admissível para $n+1$ e φ, de onde resulta que $n+1 \in S$.

Portanto, de acôrdo com o corolário 1 do teorema 17, temos $S = I_m$, ou seja, para todo número natural $n \geqslant m$ existe uma aplicação $g_n\colon [m,n] \to E$ admissível para n e φ; além disso, o lema 1 nos mostra que g_n é única e o lema 4 nos assegura que a restrição de g_{n+1} ao intervalo $[m,n]$ é g_n. Consideremos agora a aplicação $f\colon I_m \to E$
definida por $f(m) = g_n(n)$ para todo número natural $n \geqslant m$; temos

$$f(m) = g_m(m) = a$$

e, para todo $n \geqslant m$,

$$f(n+1) = g_{n+1}(n+1) = \varphi(g_{n+1}(n)) = \varphi(g_n(n)) = \varphi(f(n)),$$

portanto, f satisfaz as condições 1) e 2) do teorema acima. Finalmente, se f' é uma aplicação de I_m em E e se f' satisfaz as mesmas condições, então a restrição de f' ao intervalo $[m,n]$ é, evidentemente, admissível para n e φ; portanto, esta restrição coincide com g_n e teremos

$$f'(n) = g_n(n) = f(n)$$

para todo $n \geqslant m$, ou seja, $f' = f$. ∎

2.3 - MULTIPLICAÇÃO

Aplicaremos o princípio de definição por recorrência para introduzir o conceito de produto de dois números naturais a e b, conceito êste que corresponderá à noção usual de soma de b parcelas iguais ao número natural a.

Seja a um número natural e consideremos a aplicação $\varphi_a\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ definida por $\varphi_a(b) = b + a$,
para todo número natural b (nas notações usadas no §2.2 estamos escolhendo $E = \boldsymbol{N}$, $m = 0$ e o elemento fixado em $E = \boldsymbol{N}$ é o número natural a); de acôrdo com o teorema 18 existe uma aplicação $f_a\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ tal que

$$f_a(0) = 0$$

e

$$f_a(b+1) = \varphi_a(f_a(b)) = f_a(b) + a$$

para todo número b. No que se segue indicaremos por $a \cdot b$ ou ab o número natural $f_a(b)$ e diremos que ab é o *produto de a por b*; a operação $(a,b) \mapsto ab$, definida sôbre $\boldsymbol{N}$, é denominada *multiplicação*. Com estas notações, a definição acima pode ser posta sob a forma

$$a \cdot 0 = 0 \tag{18}$$

e

$$a \cdot (b+1) = ab + a \tag{19},$$

quaisquer que sejam os números naturais a e b.

TEOREMA 19 - Para todo número natural a, tem-se

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a \tag{20}.$$

DEMONSTRAÇÃO - A igualdade $a \cdot 0 = 0$ é verdadeira pela própria definição de produto. Indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais a tais que $0 \cdot a = 0$; em virtude de (18) temos $0 \cdot 0 = 0$, logo, $0 \in S$. Se a é um elemento qualquer de S teremos, utilizando-se (19),

$$0 \cdot (a+1) = 0 \cdot a + 0 = 0 + 0 = 0;$$

portanto, $a+1 \in S$. De acôrdo com o teorema 17 resulta que $S = \boldsymbol{N}$, ou seja, $0 \cdot a = 0$ para todo número natural a. ∎

TEOREMA 20 - O mínimo de $\boldsymbol{N}^*$ é o elemento neutro para a operação de multiplicação definida sôbre $\boldsymbol{N}$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja S o conjunto de todos os números naturais a tais que $1 \cdot a = a$; de acôrdo com (18) temos $1 \cdot 0 = 0$, logo, $0 \in S$ e se a é um elemento qualquer de S teremos, em virtude de (19), $1 \cdot (a+1) = 1 \cdot a + 1 = a + 1$,

logo, $a+1 \in S$. Portanto, $S = N$ (teorema 17), isto é, $1 \cdot a = a$, para todo número natural a. Anàlogamente, seja T o conjunto de todos os números naturais a tais que $a \cdot 1 = a$; conforme o teorema anterior, temos $0 \cdot 1 = 0$, logo, $0 \in T$. Se a é um elemento qualquer de T, teremos em virtude de (18) e (19):

$$(a+1)\cdot 1 = (a+1)\cdot(0+1) = (a+1)\cdot 0 + (a+1) = 0 + (a+1) = a+1,$$

logo, $a+1 \in T$. Portanto, $T = N$ (teorema 17), isto é, $a \cdot 1 = a$, para todo número natural a. ∎

TEOREMA 21 (*propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição*) - Quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, temos

$$(a+b)c = ac + bc \qquad (21)$$

e

$$c(a+b) = ca + cb \qquad (22).$$

DEMONSTRAÇÃO - Para a e b fixados em N, indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais c tais que (21) seja verdadeira; temos $(a+b)\cdot 0 = 0 = 0+0 = a\cdot 0 + b\cdot 0$, logo, $0 \in S$. Se c é um elemento qualquer de S, teremos, em virtude de (19),

$$(a+b)(c+1) = (a+b)c + (a+b) = (ac+bc) + (a+b) = ((ac+bc)+a)+b =$$
$$= (a+(ac+bc))+b = ((a+ac)+bc)+b = (a+ac)+(bc+b) = a(c+1)+b(c+1),$$

logo, $c+1 \in S$. Portanto, $S = N$ (teorema 17), isto é, a igualdade (21) é verdadeira para todos os números naturais a, b, e c. Anàlogamente, fixados a e c em N, seja T o conjunto de todos os números naturais b tais que (22) seja verdadeira; temos $c(a+0) = ca = ca+0 = ca+c\cdot 0$, logo, $0 \in T$. Se b é um elemento qualquer de T, teremos

$$c(a+(b+1)) = c((a+b)+1) = c(a+b)+c = (ca+cb)+c =$$
$$= ca+(cb+c) = ca+c(b+1),$$

logo, $b+1 \in T$. Portanto, $T = N$ (teorema 17), ou seja, a igualdade (22) é verdadeira para todos os números naturais a, b e c. ∎

TEOREMA 22 (*propriedade comutativa da multiplicação*): Quaisquer que sejam os números naturais a e b, tem-se

$$ab = ba \qquad (23).$$

DEMONSTRAÇÃO - Fixado a em N indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais b tais que (23) seja verdadeira. Conforme o teorema 19 temos que $0 \in S$ e se b é um elemento qualquer de S teremos

$$a(b+1) = ab + a = ba + a = ba + 1\cdot a = (b+1)a,$$

logo, $b+1 \in S$. Portanto, $S = N$ (teorema 17), isto é, a fórmula (23) é verdadeira para todos os números naturais a e b. ∎

TEOREMA 23 (*propriedade associativa da multiplicação*): Quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, tem-se

$$(ab)c = a(bc) \qquad (24).$$

DEMONSTRAÇÃO - Fixados a e b em N indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais c tais que (24) seja verdadeira; temos $(ab)\cdot 0 = 0 = a\cdot 0 = a(b\cdot 0)$,

logo, $0 \in S$ e se c é um elemento qualquer de S, teremos

$$(ab)(c+1) = (ab)c + ab = a(bc) + ab = a(bc+b) = a(b(c+1)),$$

logo, $c+1 \in S$. Portanto, $S = N$, ou seja, a fórmula (24) é verdadeira para todos os números naturais a, b e c. ∎

TEOREMA 24 - Se a e b são dois números naturais e se $ab = 0$, então, $a = 0$ ou $b = 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $a \neq 0$, logo, $1 \leq a$ e então $0 \leq a-1$; portanto, conforme o teorema 11 e a fórmula (19), temos

$$0 \leq b \leq (a-1)b + b = [(a-1)+1]b = ab = 0,$$

de onde concluímos que $b = 0$. ∎

TEOREMA 25 - Quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, se $a < b$ e se $0 < c$, então, $ac < bc$.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese, temos $0 < b-a$ e $0 < c$, logo, de acôrdo com o teorema anterior, teremos $(b-a)c \neq 0$; portanto, $0 < (b-a)c$ e daqui resulta conforme os teoremas 11 e 20:

$$ac < ac + (b-a)c = [a+(b-a)]c = bc,$$

isto é, $ac < bc$. ∎

TEOREMA 26 - Todo número natural não nulo é regular para a multiplicação e 1 é o único elemento simetrizável para a multiplicação.

DEMONSTRAÇÃO - A primeira parte é uma conseqüência imediata do teorema anterior. Se um número natural a é simetrizável para a multiplicação, existe $b \in N$ tal que $ab = 1$; temos $a \neq 0$ e $b \neq 0$, logo, $1 \leq a$ e $1 \leq b$. Se $1 < a$ teríamos, conforme o teorema anterior, $1\cdot b < a\cdot b$, ou, $b < ab$ e então $1 < ab$, contra a definição de b. Portanto, $a = 1$. ∎

EXERCÍCIOS

52. Mostrar que se a e b são números naturais tais que $ab = 2$, então $a = 1$ ou $b = 1$, isto é, mostrar que 2 é um «número natural primo».

53. Mostrar que $a(b-c) = (ab)-(ac)$, onde a, b e c são números naturais e $c \leqslant b$.

54. Determinar tôdas as decomposições dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (ver o exercício 51) como produto de dois números naturais.

55. Mostrar que a adição não é distributiva em relação à multiplicação, isto é, que a igualdade $a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$ não é necessàriamente verdadeira.

2.4 - RESUMO DAS PROPRIEDADES MAIS IMPORTANTES DO CONJUNTO N DOS NÚMEROS NATURAIS

Daremos, neste parágrafo, as principais propriedades que foram admitidas ou deduzidas nos parágrafos anteriores. Por razões que aparecerão no Capítulo IV seguiremos uma outra ordem de apresentação destas propriedades.

Admitimos que o conjunto $\boldsymbol{N}$ satisfaça o axioma N1 e que exista uma operação de adição $(a,b) \mapsto a+b$ e uma relação $\leqslant$ sôbre $\boldsymbol{N}$; introduzimos, a seguir, por intermédio do princípio de definição por recorrência, a operação de multiplicação $(a,b) \mapsto ab$. Valem as seguintes propriedades, onde a, b e c são números naturais:

A1: $(a+b)+c = a+(b+c)$	M1: $(ab)c = a(bc)$
A2: $a+b = b+a$	M2: $ab = ba$
A3: $a+0 = a$	M3: $a\cdot 1 = a$
LCA: $a+b = a+c \implies b = c$	LCM: $ab = ac$ e $a \neq 0 \implies b = c$

D: $a(b+c) = ab+ac$

O1: $a \leqslant a$
O2: $a \leqslant b$ e $b \leqslant a \implies a = b$
O3: $a \leqslant b$ e $b \leqslant c \implies a \leqslant c$
O4: $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$

OA: $a \leqslant b \implies a+c \leqslant b+c$	OM: $a \leqslant b \implies ac \leqslant bc$
OA': $a < b \implies a+c < b+c$	OM': $a < b$ e $c \neq 0 \implies ac < bc$

N3: $b \leqslant a$ se, e sòmente se, existe $c \in \boldsymbol{N}$ tal que $a = b+c$

N4 (princípio do menor número natural): todo conjunto não vazio de números naturais admite um mínimo

N4' (princípio de indução finita): o único subconjunto S, de $\boldsymbol{N}$, que satisfaz as condições a) $0 \in S$; b) $n \in S \implies n+1 \in S$; é o próprio $\boldsymbol{N}$.

OBSERVAÇÃO - LCA significa Lei do Cancelamento da Adição e LCM, Lei do Cancelamento da Multiplicação.

2.5 - POTÊNCIAS E MÚLTIPLOS

Examinaremos, neste parágrafo, as propriedades das potências de elementos de um monóide multiplicativo $(E,\cdot)$ e faremos a transcrição dos resultados obtidos para o caso de um monóide aditivo. Seja a um elemento de E e consideremos a aplicação $\varphi: E \to E$ definida por $\varphi(x) = xa$ de acôrdo com o princípio de definição por recorrência existe uma única aplicação $f_a: \boldsymbol{N} \to E$ tal que

$$f_a(0) = 1$$

e

$$f_a(n+1) = \varphi((f_a(n)) = f_a(n)a,$$

para todo número natural n. O elemento $f_a(n)$ passa a ser denominado *potência n-ésima de a* e será indicado por a^n (leia-se: a a potência n); neste caso, a e n são chamados, respectivamente, *base* e *expoente* da potência a^n. Uma vez adotada esta notação, temos, por definição

$$a^0 = 1 \tag{25}$$

e

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \tag{26},$$

para todo número natural n.

No caso da notação aditiva escreveremos na no lugar de a^n e diremos que *na é o múltiplo de a segundo o número natural n*; portanto, temos

$$0 \cdot a = 0 \tag{27}$$

e

$$(n+1)a = na+a \tag{28},$$

para todo número natural n.

TEOREMA 27 - Quaisquer que sejam os números naturais n e a e para todo elemento a do monóide multiplicativo E, tem-se

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \tag{29}$$

e

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m \tag{30}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos m fixo e seja S o conjunto de todos os números naturais n tais que (29) seja verdadeira; temos $0 \in S$, pois $a^{m+c} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$.

Se n é um elemento qualquer de S, temos

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} \cdot a = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^m \cdot (a^n \cdot a) = a^m \cdot a^{n+1},$$

logo, $n+1 \in S$. Portanto, de acôrdo com o princípio de indução finita, resulta que $S = \boldsymbol{N}$, ou seja, a fórmula (29) é verdadeira para todos os números naturais m e n e para todo a em E. Vamos agora mostrar que

$$a^{mn} = (a^m)^n \tag{31}$$

e para isso consideremos m fixo e seja T o conjunto de todos os números naturais n tais que (31) seja verdadeira; temos $0 \in T$, pois $a^{m \cdot 0} = a^0 = 1 = (a^m)^0$. Se n é um elemento qualquer de T, teremos, usando-se a fórmula (29):

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m = a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)},$$

logo, $n+1 \in T$ e então $T = \boldsymbol{N}$, ou seja, vale (31) quaisquer que sejam os números naturais m e n e para todo elemento a de E. A segunda parte da fórmula (30) é agora uma conseqüência imediata do fato que a multiplicação sôbre $\boldsymbol{N}$ é comutativa. ∎

No caso em que E é um monóide aditivo, as fórmulas (29) e (30) serão escritas sob a forma

$$(m+n)a = ma + na \tag{32}$$

e

$$(mn)a = n(ma) = m(na) \tag{33}.$$

TEOREMA 28 - Se a e b são dois elementos permutáveis de um monóide multiplicativo E, temos para todo $m \in \boldsymbol{N}$ e todo $n \in \boldsymbol{N}$:

$$a^m \cdot b^n = b^n \cdot a^m \tag{34},$$

isto é, a^m e b^n são permutáveis; e

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \tag{35}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja S o conjunto de todos os números naturais m tais que $a^m b = b a^m$; é imediato que $0 \in S$, pois $a^0 = 1$. Se m é um elemento qualquer de S, teremos

$$a^{m+1} \cdot b = (a^m \cdot a) \cdot b = a^m (ab) = a^m (ba) = (a^m b) a =$$
$$= (b a^m) a = b(a^m \cdot a) = b a^{m+1},$$

logo, $m+1 \in S$. Fica assim demonstrado que a^m comuta com b, para todo número natural m e aplicando-se êste mesmo resultado aos elementos b e a^m e ao número natural n concluímos que b^n comuta com a^m, ou seja, vale a fórmula (34).

Seja T o conjunto de todos os números naturais n tais que (35) seja verdadeira; temos $0 \in T$, pois

$$(ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0.$$

Se n é um número natural qualquer e se $n \in T$, temos

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n (ab) = (a^n b^n)(ab) = a^n (b^n (ab)) =$$
$$= a^n ((b^n a) b) = a^n ((a b^n) b) = a^n (a (b^n b)) = (a^n a)(b^n b) = a^{n+1} b^{n+1},$$

logo, $n+1 \in S$ e então, o princípio de indução finita nos garante que $S = \boldsymbol{N}$, ou seja, a fórmula (35) é verdadeira para todo número natural n e para todos os elementos permutáveis a e b de E. ∎

As correspondentes das fórmulas (34) e (35), para elementos permutáveis de um monóide aditivo E, são as seguintes

$$ma + nb = nb + ma \tag{36}$$

e

$$n(a+b) = na + nb \tag{37}.$$

Com o auxílio das fórmulas acima sôbre múltiplos segundo números naturais podemos demonstrar que um semi-grupo $(E, +, \leqslant)$, que satisfaz os axiomas N1, N2, N3 e N4 é determinado de modo único a menos de um isomorfismo ordenado, resultado êste que já foi mencionado no §1.1. Notemos, inicialmente, que se $(E, +, \leqslant)$ é um semi-grupo ordenado e se os axiomas N1, N2, N3 e N4 estão satisfeitos, então, $0' = min\, E$ é o elemento neutro da adição (teorema 10), $1' = min(E - \{0'\})$ é o elemento neutro para a multiplicação (teorema 20) e valem as fórmulas (27), (28), (32) e (33) para $\boldsymbol{N}$ e E, pois, êstes semi-grupos são realmente monóides aditivos. Precisamos ainda da seguinte propriedade preliminar: $a \cdot 1' \neq 0'$, para todo número natural não nulo a. Com efeito, indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais $a \in \boldsymbol{N}^*$ tais que $a \cdot 1' \neq 0'$; temos $1 \cdot 1' = 1' \neq 0'$, logo, $1 \in S$ e se $a \in S$ teremos $(a+1) \cdot 1' = a \cdot 1' + 1 \cdot 1' = a \cdot 1' + 1'$, sendo que êste elemento é não nulo, pois $0' < 1' < a \cdot 1' + 1'$; portanto, de acôrdo com o princípio de indução finita, temos $S = \boldsymbol{N}^*$.

TEOREMA 29 - Se $(E, +, \leqslant)$ é um semi-grupo ordenado que satisfaz os axiomas N1, N2, N3 e N4, então existe uma

bijeção $f: N \to E$ tal que

1) para todos a e b em N, temos $f(a+b) = f(a)+f(b)$;

2) quaisquer que sejam a e b em N, tem-se $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $f(a) \leqslant f(b)$.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos a aplicação $f: N \to E$ definida por $f(n) = n \cdot 1'$; a verificação de que f satisfaz as condições do teorema acima será feita em diversas etapas.

a) f é sobrejetora.

Seja S' a imagem de f e notemos que $0' \in S'$, pois $0 \cdot 1' = 0'$ (fórmula (27)), ou seja, $f(0) = 0'$; se a' é um elemento qualquer de S', existe $a \in N$ tal que $a' = f(a) = a \cdot 1'$ e teremos (fórmula (28)) $\quad a'+1' = a \cdot 1'+1' = (a+1) \cdot 1'$,
logo, $a'+1' \in S'$, de onde resulta pelo princípio de indução finita aplicado a E, $S' = E$.

b) $f(a+b) = f(a)+f(b)$.

Com efeito, temos, conforme a fórmula (32),

$$f(a+b) = (a+b) \cdot 1' = a \cdot 1'+b \cdot 1' = f(a)+f(b).$$

c) $f(a) \neq 0'$, para todo $a \in N^*$.

É uma conseqüência imediata do que observamos pouco antes de enunciar o teorema 29.

d) $a<b$ implica $f(a)<f(b)$.

Com efeito, temos $b = a+(b-a)$, logo, de acôrdo com b),

$$f(b) = (fa+(b-a)) = f(a)+f(b-a),$$

de onde resulta pelo teorema 12 e por c), $f(a)<f(b)$.

e) f é injetora.

É uma conseqüência imediata de d), pois se $a \neq b$ temos $a<b$ ou $b<a$, pois a ordem sôbre N é total, logo, $f(a)<f(b)$ ou $f(b)<f(a)$ e, portanto, em qualquer caso temos $f(a) \neq f(b)$.

f) f é bijetora.

É uma conseqüência imediata das partes a) e e).

g) $f(a)<f(b)$ implica $a<b$.

Com efeito, se esta conclusão não fôsse verdadeira, teríamos $b \leqslant a$, logo, conforme d), $f(b) \leqslant f(a)$, contra a hipótese.

Isto completa a demonstração do teorema acima. ∎

OBSERVAÇÃO - Tôda bijeção $f: N \to E$ que satisfaz a condição 1) é denominada isomorfismo do monóide $(N,+)$ no monóide $(E,+)$; um isomorfismo f que também satisfaz 2) é chamado isomorfismo ordenado de $(N,+,\leqslant)$ em $(E,+,\leqslant)$. Portanto, o teorema

acima afirma que existe um isomorfismo ordenado de N em E ou que N e E são ordenadamente isomorfos. Notemos agora como se pode definir, por intermédio do isomorfismo f, o produto de dois elementos a' e b' de E. Como f é bijetora existe um único número natural a (resp., b) tal que $f(a) = a'$ (resp., $f(b) = b'$); o produto de a por b foi definido no §2.3 e colocaremos, por definição, $a' \cdot b' = f(ab)$ e esta igualdade pode ser posta sob a forma $f(ab) = f(a)f(b)$. Tôdas as propriedades da multiplicação sôbre N transportam-se para E por meio do isomorfismo f; vejamos sòmente a propriedade comutativa: $a'b' = b'a'$. Com as notações acima, temos $a'b' = f(a)f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b)f(a) = b'a'$.

EXERCÍCIOS

56. Seja a um elemento de um conjunto não vazio E e suponhamos que sôbre E esteja definida uma operação de multiplicação.

a) Definir, pelo processo dado no início do §2.5, a potência n-ésima de a, onde n é um número natural não nulo. (Observação: Neste caso não se pode definir a^0 pois não estamos supondo que exista o elemento unidade para a multiplicação.)

b) Mostrar por meio de exemplos que as fórmulas (29) e (30) não são necessàriamente verdadeiras quando a multiplicação não é associativa.

c) Supondo-se que a operação de multiplicação seja associativa, mostrar que valem as fórmulas (29) e (30), onde m e n são diferentes de zero.

d) Fazer o mesmo para as fórmulas (34) e (35).

e) Transcrever os resultados obtidos para a notação aditiva.

57. Seja $(E,\cdot,\leqslant)$ um monóide ordenado. Mostrar que se a e b são elementos de E tais que $a \leqslant b$, então $a^n \leqslant b^n$ para todo número natural n. Se $a<b$ e se a ou b é regular, mostrar que $a^n<b^n$ para todo número natural não nulo n.

58. Se a e b são números naturais e se $a^n<b^n$, mostrar que $a<b$.

59. Com as notações do exercício anterior, se $a^n = b^n$, onde $n \in N^*$, então $a = b$.

2.6 - COMPOSTO DE UMA FAMÍLIA DE ELEMENTOS

Para todo número natural n indicaremos por J_n o conjunto de todos os números naturais x tais que $1 \leqslant x$ e $x \leqslant n$. Notemos que $J_n = \emptyset$ se, e sòmente se, $n = 0$. Conforme

vimos no §3.3 do Capítulo I, se E é um conjunto, então chama-se família de elementos de E tendo J_n para conjunto de índices a tôda aplicação x de J_n em E; esta família x é indicada pela notação indexada $(x_i)_{i\in Jn}$ ou $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$; onde $x_i = x(i)$. Observemos que se $n=0$, então, a família $(x_i)_{i\in J_n}$ é vazia, pois $J_0=\emptyset$; portanto, a notação $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ no caso em que $n=0$ indica a família vazia de elementos de E.

Suponhamos agora que sôbre E esteja definida uma operação $*$ e seja $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ uma família de elementos de E, onde n é um número natural não nulo. Chama-se *composto da família* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ao elemento $x_1*x_2*\cdots*x_n$ definido por recorrência do seguinte modo

$$x_1*x_2*\cdots*x_n=\begin{cases}x_1 & \text{se } n=1\\ (x_1*x_2*\cdots*x_{n-1})*x_n & \text{se } n>1.\end{cases}$$

Quando existe o elemento neutro e para a operação $*$ completa-se a definição acima colocando-se $x_1*x_2*\cdots*x_n=e$ se $n=0$. Em qualquer caso os elementos $x_1,x_2,\cdots,x_n$ passam a ser denominados *têrmos* do composto $x_1*x_2*\cdots*x_n$; mais precisamente, dizemos que x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ é o *i-ésimo têrmo* ou o *têrmo de ordem* i do composto $x_1*x_2*\cdots*x_n$.

Convém observar que a definição de composto de uma família de elementos envolve o princípio de definição por recorrência e, realmente, para dar uma definição rigorosa deveríamos proceder de modo análogo ao que fizemos para definir a potência n-ésima de um elemento de um monóide multiplicativo E (ver o §2.5). Deixaremos isso a cargo do leitor.

A denominação do composto de uma família de elementos, assim como sua notação, variam conforme o símbolo usado para indicar a operação. No caso da notação aditiva, o composto da família $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ é indicado por

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i$$

e é denominado *soma da família* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ou *soma dos elementos* $x_1,x_2,\cdots,x_n$. Temos, por definição,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=\begin{cases}x_1 & \text{se } n=1\\ \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)+x_n & \text{se } n>1.\end{cases}$$

Os elementos $x_1,x_2,\cdots,x_n$ passam a ser denominados *têrmos* ou *parcelas* da soma $x_1+x_2+\cdots+x_n$. Observemos que se existir o elemento zero para a operação $+$, então, conforme a definição de composto, teremos

$$\sum_{i\in\emptyset} x_i = 0.$$

No caso da notação multiplicativa o composto da família $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ é indicado por

$$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n \quad \text{ou} \quad x_1x_2\cdots x_n$$

ou sob forma condensada

$$\prod_{i=1}^{n} x_i$$

e é denominado *produto da família* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ou *produto dos elementos* $x_1,x_2,\cdots,x_n$. Temos, por definição,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i=\begin{cases}x_1 & \text{se } n=1\\ \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)x_n & \text{se } n>1.\end{cases}$$

Os elementos $x_1,x_2,\cdots,x_n$ passam a ser denominados *têrmos* ou *fatôres* do produto $x_1x_2\cdots x_n$.

Observemos que se existir o elemento unidade 1 para a operação de multiplicação, então, conforme a definição de composto, teremos

$$\prod_{i\in\emptyset} x_i = 1.$$

O leitor deve verificar que a soma ou o produto da família $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, onde $x_i=a$ para $i=1,2,\cdots,n$, coincide, respectivamente, com o múltiplo de a segundo o número natural n ou com a potência n-ésima de a.

No que se segue adotaremos a notação multiplicativa e deixaremos a cargo do leitor a transcrição dos resultados obtidos para a notação aditiva. Há diversos modos distintos de colocação de parêntesis no produto $a_1a_2\cdots a_n$; por exemplo, para $n=3$, temos dois casos

$$(a_1a_2)a_3 \quad \text{e} \quad a_1(a_2a_3).$$

Se a multiplicação é associativa êstes produtos são iguais entre si e o primeiro dêles é igual, por definição, ao produto $a_1a_2a_3$ da família $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$, isto é, temos

$$a_1a_2a_3=(a_1a_2)a_3=a_1(a_2a_3).$$

Para $n=4$, temos sete casos

$$(a_1a_2a_3)a_4, \quad ((a_1a_2)a_3)a_4,$$
$$a_1(a_2a_3a_4), \quad a_1((a_2a_3)a_4),$$
$$(a_1(a_2a_3))a_4, \quad a_1(a_2(a_3a_4)),$$
$$(a_1a_2)(a_3a_4);$$

notemos que, pela definição de produto, temos

$$a_1a_2a_3a_4 = (a_1a_2a_3)a_4 = ((a_1a_2)a_3)a_4,$$

e

$$a_1(a_2a_3a_4) = a_1((a_2a_3)a_4),$$

portanto, restam cinco produtos que, em geral, são distintos dois a dois

$$((a_1a_2)a_3)a_4 \qquad (38)$$
$$(a_1(a_2a_3))a_4 \qquad (39)$$
$$a_1((a_2a_3)a_4) \qquad (40)$$
$$a_1(a_2(a_3a_4)) \qquad (41)$$
$$(a_1a_2)(a_3a_4) \qquad (42).$$

Se a operação de multiplicação é associativa êstes produtos são iguais entre si e, portanto, são iguais ao produto $a_1a_2a_3a_4$ da família $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$. Com efeito, é imediato que o produto (38) é igual ao produto (39) e que o produto (40) é igual ao produto (41); por outro lado, temos, pela propriedade associativa,

$$((a_1a_2)a_3)a_4 = (a_1a_2)(a_3a_4)$$

e

$$a_1(a_2(a_3a_4)) = (a_1a_2)(a_3a_4),$$

o que termina a verificação da afirmação feita acima.

Êste resultado também é verdadeiro para uma família arbitrária $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de elementos de E, desde que a multiplicação seja associativa; no entanto, não daremos a demonstração dêste importante teorema (conhecido sob o nome de *teorema geral de associatividade*). No exercício 79 daremos indicações para o desenvolvimento da demonstração do teorema geral de associatividade. Êste teorema nos mostra que se a operação de multiplicação é associativa, isto é, se $(ab)c = a(bc)$ quaisquer que sejam a, b e c em E, então, não há necessidade de inserir parêntesis num produto arbitrário $a_1a_2\cdots a_n$, pois todos os produtos assim obtidos são iguais entre si.

Utilizando o teorema geral de associatividade e o princípio de indução finita, o leitor pode demonstrar fàcilmente os seguintes teoremas.

TEOREMA 30 - Seja $(E,\cdot)$ um semi-grupo multiplicativo e seja $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ $(n\neq 0)$ uma família de elementos de E; se um elemento a de E comuta com cada a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, então, a comuta com o produto $a_1a_2\cdots a_n$.

TEOREMA 31 - Seja $(E,\cdot)$ um monóide multiplicativo e seja $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ uma família de elementos inversíveis de E; nestas condições, o produto $a_1a_2\cdots a_n$ é inversível e temos

$$(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

Seja E um conjunto sôbre o qual está definida uma operação de multiplicação e consideremos o produto $a_1a_2\cdots a_n$ $(n\neq 0)$ de uma família $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de elementos de E. Podemos, evidentemente, considerar outros produtos obtidos do anterior mudando-se a ordem dos fatôres; por exemplo, para $n=3$ obtemos seis produtos

$$a_1a_2a_3 \qquad a_1a_3a_2 \qquad a_2a_1a_3$$
$$a_2a_3a_1 \qquad a_3a_1a_2 \qquad a_3a_2a_1.$$

É fácil verificar que se a operação considerada sôbre E é associativa e comutativa, então, êstes seis produtos são iguais entre si. Êste resultado também é verdadeiro para uma família arbitrária $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ $(n\neq 0)$ de elementos de E, desde que a multiplicação seja associativa e comutativa (realmente, basta que os elementos $a_1,a_2,\cdots,a_n$ sejam permutáveis dois a dois, isto é, que $a_ia_j = a_ja_i$, para $i,j = 1,2,\cdots,n$ e $i\neq j$); no entanto, não daremos a demonstração dêste importante teorema (conhecido sob o nome de *teorema geral de comutatividade*). No exercício 80 daremos indicações para o desenvolvimento da demonstração do teorema geral de comutatividade.

EXERCÍCIOS

60. Consideremos a operação de potenciação $(a,b)\mapsto a^b$ definida sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}^*$ dos números naturais não nulos e seja $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ a família de elementos de $\boldsymbol{N}^*$, onde $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=3$ e $a_4=2$. Mostrar que os compostos (38), (39), (40), (41) e (42) são distintos dois a dois.

61. Consideremos uma operação de multiplicação definida sôbre um conjunto não vazio E e seja $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ uma família de elementos de E. a) Inserir, de todos os modos possíveis, os parêntesis no produto $a_1a_2a_3a_4a_5$. b) Determinar quais os produtos assim obtidos que são em geral distintos entre si (são 14 ao todo). c) Supondo-se que a multiplicação seja associativa, mostrar que êstes 14 produtos são iguais ao produto da família $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$.

62. Consideremos uma operação de multiplicação definida sôbre um conjunto não vazio E e seja $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ uma família de elementos de E. a) Escrever todos os produtos que são obtidos de $a_1a_2a_3a_4$ pela mudança da ordem dos fatôres (são 24 produtos). b) Supondo-se que a multiplicação seja associativa e que os elementos a_1, a_2, a_3 e a_4 sejam permutáveis dois a dois, mostrar que êstes 24 produtos são iguais entre si.

63. Demonstrar o teorema 30.

64. Demonstrar o teorema 31.

65. Demonstrar a propriedade geral de distributividade da multiplicação em relação à adição

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)b = \sum_{i=1}^{n} a_i b,$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e b são números naturais.

2.7 - DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO FINITA

Em muitas ocasiões é dada uma proposição $P(n)$ (verdadeira ou falsa) associada a cada número natural n e precisamos verificar em que condições esta proposição é verdadeira para todo número natural n ou para todo número natural n maior que um dado número natural m. Evidentemente, dada uma proposição $P(n)$ podemos verificar se ela é verdadeira atribuindo a n certos valores particulares; se $P(n)$ é verdadeira para um número bastante grande de valores de n isto não significa que $P(n)$ seja verdadeira para todo número natural n (ver o exemplo 29). Esta verificação nos dará na melhor das hipóteses a confiança de afirmar que $P(n)$ é sempre verdadeira; notemos, no entanto, que esta afirmação necessita de demonstração.

Podemos distinguir dois modos de formulação do problema acima:

1.º) é dada uma proposição $P(n)$ que pode ser verdadeira ou falsa; em que condições $P(n)$ é sempre verdadeira?

2.º) a partir de certas observações particulares induz-se uma lei geral $P(n)$; em que condições esta indução é correta?

Os exemplos abaixo esclarecem melhor êstes problemas; notemos que a segunda formulação é mais complexa do que a primeira, pois, ela exige ao mesmo tempo que se descubra a lei geral a partir de algumas observações preliminares (o que nem sempre é possível).

EXEMPLO 26 - Para todo número natural $n\geqslant 1$, seja $P(n)$ a proposição: a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.

Podemos verificar que $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$, 2, 3, 4 e 5:

$$1 = 1^2$$
$$1+3 = 4 = 2^2$$
$$1+3+5 = 9 = 3^2$$
$$1+3+5+7 = 16 = 4^2$$
$$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2.$$

Mesmo que tivéssemos feito um número bem maior de verificações não poderíamos afirmar que «$P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n\geqslant 1$». O corolário 1 do teorema 17 nos dá um processo para verificar que a proposição acima é verdadeira para todo número natural $n\geqslant 1$. Com efeito, indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais $n\geqslant 1$ tais que «a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2», ou abreviadamente, tais que «a proposição $P(n)$ é verdadeira». Conforme observamos acima, os números naturais 1, 2, 3, 4 e 5 pertencem a S (realmente, basta notar que $1\in S$); supondo-se que $n\in S$, com $n\geqslant 1$, isto é, supondo-se que

$$1+3+\cdots+(2n-1) = n^2,$$

teremos

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = [1+3+\cdots+(2n-1)]+$$
$$+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2,$$

portanto, $n+1\in S$, ou seja, a proposição $P(n+1)$ é verdadeira. Concluímos assim que $S = I_1$, isto é, todo número natural $n\geqslant 1$ pertence a S e isto significa que a proposição «a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2» é verdadeira para todo número natural $n\geqslant 1$.

Notemos que o processo de demonstração acima consiste de duas partes: a) mostra-se que $P(1)$ é verdadeira; b) supõe-se que $P(n)$, com $n\geqslant 1$, seja verdadeira e demonstra-se que $P(n+1)$ também é verdadeira. A parte a) é chamada base da indução finita e a demonstração de b) é denominada etapa de indução finita; em b) supõe-se que $P(n)$ seja verdadeira e isto é o que se chama usualmente de hipótese de indução.

Observemos ainda que é essencial a verificação da parte a), pois, só do fato que b) esteja demonstrada não resulta que uma dada proposição $P(n)$ seja verdadeira para todo número natural $n \geq 1$ como nos mostra o seguinte

EXEMPLO 27 - Para todo número natural $n \geq 1$ seja $P(n)$ a proposição: o número natural n^2+n é ímpar. Supondo-se que $P(n)$ seja verdadeira e notando-se que

$$(n+1)^2+(n+1) = n^2+2n+1+n+1 = (n^2+n)+2(n+1)$$

concluímos que $(n+1)^2+(n+1)$ é ímpar, pois $2(n+1)$ é par e, por hipótese, n^2+n é ímpar; portanto, $P(n+1)$ também é verdadeira. No entanto, a proposição $P(n)$ é falsa para todo número natural $n \geq 1$, pois $n^2+n = n(n+1)$, número êste que é par porque pelo menos um dos fatôres n ou $n+1$ é par.

EXEMPLO 28 - Determinar a soma dos n primeiros números pares não nulos.

Para resolver êste problema temos que descobrir, inicialmente, a lei geral e para isso determinamos a soma abaixo para os primeiros valores de n:

$$2 = 2$$
$$2+4 = 6$$
$$2+4+6 = 12$$
$$2+4+6+8 = 20$$
$$2+4+6+8+10 = 30.$$

Notando-se que $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, $20 = 4 \cdot 5$ e $30 = 5 \cdot 6$, onde o primeiro fator coincide com o número de parcelas e o segundo é o consecutivo do primeiro, somos levados a enunciar a seguinte hipótese de indução

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

que pode ser verdadeira ou falsa. Procedendo-se como no exemplo 26, teremos

$$2+4+6+\cdots+2n+2(n+1) = [2+4+6+\cdots+2n]+2(n+1) =$$
$$= n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2),$$

portanto, a hipótese de indução também é verdadeira para $n+1$ e daqui resulta que a proposição «a soma dos n primeiros números pares não nulos é igual a $n(n+1)$» é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.

EXEMPLO 29 - Para todo número natural n consideremos o número n^2-n+41. Atribuindo-se a n os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 obteremos os seguintes números 41, 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113 e 131 e observamos que todos êles são números primos. Somos assim levados à seguinte conclusão: «para todo número natural n, o número n^2-n+41 é primo». Pode-se verificar que esta proposição é ainda verdadeira para $n = 11, 12, \cdots, 40$; portanto, temos uma proposição que é verdadeira para 41 valores consecutivos de n, o que parece dar maior ênfase à afirmação: «o número n^2-n+41 é primo para todo número natural n». No entanto, para $n = 41$, temos que o valor de n^2-n+41 é 41^2, que não é um número primo.

Uma vez feitas as considerações acima enunciaremos os diversos princípios de indução finita que são baseados no teorema 17 e seus corolários.

TEOREMA 32 - (*primeiro princípio de indução finita*) - Seja $P(n)$ uma propriedade (verdadeira ou falsa) associada a cada número natural n e suponhamos que

a) $P(0)$ é verdadeira;

b) para todo número natural n, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Nestas condições, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto

$$S = \{n \in \boldsymbol{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\};$$

temos, em virtude de a), $0 \in S$ e para todo número natural n, se $n \in S$ teremos, de acôrdo com a condição b), $n+1 \in S$; portanto, S satisfaz as condições a) e b) do teorema 17 e então $S = \boldsymbol{N}$, ou seja, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n. ∎

O princípio acima pode ser generalizado do seguinte modo que ainda é denominado primeiro princípio de indução finita

TEOREMA 33 - Seja m um número natural, seja $P(n)$ uma propriedade (verdadeira ou falsa) associada a cada número natural $n \geq m$ e suponhamos que

a) $P(m)$ é verdadeira;

b) para todo número natural n, se $n \geq m$ e se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Nestas condições, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq m$.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto

$$S=\{n\in\boldsymbol{N} \mid n\geq m \text{ e } P(n) \text{ é verdadeira}\};$$

em virtude de a), temos $m\in S$ e para todo número natural $n\geq m$, a condição b) nos mostra que se $n\in S$, então, $n+1\in S$. Portanto, S satisfaz as condições a) e b) do corolário 1 do teorema 17, logo, $S=I_m$, ou seja, a propriedade $P(n)$ é verdeira para todo número natural $n\geq m$. ∎

TEOREMA 34 (*segundo princípio de indução finita*) - Seja m um número natural, seja $P(n)$ uma propriedade (verdadeira ou falsa) associada a cada número natural $n\geq m$ e suponhamos que

a) $P(m)$ é verdadeira;

b) para todo número natural $n\geq m$, se $P(r)$ é verdadeira qualquer que seja o número natural r tal que $m\leq r<n$, então, $P(n)$ é verdadeira.

Nestas condições, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n\geq m$.

A demonstração dêste teorema é feita de modo análogo ao teorema anterior baseando-nos agora no corolário 3 do teorema 17.

No Capítulo seguinte, ao demonstrarmos o teorema 17, veremos que a demonstração é feita pelo segundo princípio de indução finita e que ela não pode ser adaptada ao primeiro princípio de indução finita.

Finalmente, o corolário 2 do teorema 17 nos dá um outro processo de demonstração por indução finita.

TEOREMA 35 - Sejam a e b dois números naturais tais que $a\leq b$, seja $P(n)$ uma propriedade (verdadeira ou falsa) associada a cada número natural n tal que $a\leq n\leq b$ e suponhamos que

a) $P(a)$ é verdadeira;

b) para todo número natural n, se $a\leq n<b$ e se $P(n)$ é verdadeira, então, $P(n+1)$ também é verdadeira.

Nestas condições, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n tal que $a\leq n\leq b$.

EXERCÍCIOS

66. Verificar, por indução finita, as seguintes igualdades:

a) $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$;

b) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$;

c) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

d) $(1^5+2^5+\cdots+n^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7)=2\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^4$.

67. Verificar, por indução finita, as seguintes igualdades (aqui estamos supondo que o leitor esteja familiarizado com as propriedades elementares dos números racionais):

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

b) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

68. Verificar, por indução finita, as seguintes igualdades (aqui estamos supondo que o leitor esteja familiarizado com as propriedades elementares dos números reais):

a) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$;

b) $1+2\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$;

c) $1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\frac{t^n-1}{t-1}$ $(t\in\boldsymbol{R},\ t\neq 1)$.

d) $(1+t)(1+t^2)(1+t^4)\cdots(1+t^{2^{n-1}})=\frac{t^{2^n}-1}{t-1}$ $(t\in\boldsymbol{R},\ t\neq 1)$.

69. Verificar, por indução finita, as seguintes igualdades

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$;

b) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

70. Determinar a soma dos cubos dos n primeiros números ímpares.

71. Se a é um número real e se $a\geq -1$, mostrar que $(1+a)^n\geq 1+na$, para todo número natural $n\geq 1$.

72. Verificar, por indução finita, as seguintes desigualdades

a) $n<2^n$;

b) $2^n<n!$, para $n\geq 4$.

73. Demonstrar, por indução finita, o seguinte teorema da Geometria Plana: a soma das medidas dos ângulos de um polígono de n lados $(n\geq 3)$ é igual a $(n-2)\cdot 180°$.

74. Determinar o êrro da seguinte «demonstração» da proposição $P(n)$: n elementos quaisquer são iguais entre si. É imediato que $P(1)$ é verdadeira. Supondo-se que $n\geq 1$ e que $P(n)$ seja verdadeira, consideremos $n+1$ elementos $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$; conforme hipótese de indução os elementos $a_1,a_2,\cdots,a_n$ são iguais entre si e o mesmo é verdadeiro para os elementos $a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$, portanto, $a_1=a_2=\cdots=a_n=a_{n+1}$, ou seja, $P(n+1)$ é verdadeira. «Concluímos» assim que, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n\geq 1$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

75. Indiquemos por Q_+ o conjunto de todos os números racionais não negativos e sôbre êste conjunto consideremos a operação usual de adição e a ordem habitual. Mostrar que $(Q_+, +, \leqslant)$ satisfaz os axiomas G1, G4, O1, O2, O3, O4, OA, N1, N2 e N3 mas não satisfaz o axioma N4.

76. O conjunto $E = \boldsymbol{N} - \{1\}$ é fechado em relação à adição e é totalmente ordenado pela ordem induzida pela ordem definida sôbre $\boldsymbol{N}$. Mostrar que $(E, +, \leqslant)$ satisfaz os axiomas G1, G4, O1, O2, O3, O4, OA, N1, N2 e N4 mas não satisfaz o axioma N3.

77. Demonstrar que se um semi-grupo aditivo e totalmente ordenado $(E, +, \leqslant)$ satisfaz os axiomas N1, N2, N3 e N4, então, a operação + é comutativa.

78. Demonstrar que se $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ é uma família de números naturais tais que $a_k < a_{k+1}$ para $k = 0,1,\cdots,n-1$, então, a família dos intervalos inteiros $([a_{k-1}+1, a_k])_{1\leqslant k\leqslant n}$ é uma partição do intervalo inteiro $[a_0+1, a_n]$.

79. O teorema geral de associatividade é enunciado sob a forma: seja $(E,\cdot)$ um semi-grupo, seja $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ (onde $n\in\boldsymbol{N}^*$) uma família de elementos de E e seja $(s_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ uma família de números naturais tais que $s_i < s_{i+1}$, para $i = 0,1,\cdots,n-1$, $s_0 = 0$ e $s_m = n$. Nestas condições pondo-se

$$b_i = \prod_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} a_j$$

para $i = 1,2,\cdots,m$, tem-se

$$\prod_{i=1}^{m} b_i = \prod_{k=1}^{n} a_k \qquad (43).$$

Sugestões para a demonstração: Indica-se por S o conjunto de todos os números naturais $n\in\boldsymbol{N}^*$ tais que (43) seja verdadeira para tôda família $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de elementos de E e tôda família $(s_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ de números naturais tais que $s_i < s_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$, $s_0 = 0$ e $s_m = n$. É fácil verificar que $1\in S$; supõe-se, então, que $n\in S$. Considera-se a seguir uma família $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ de elementos de E e uma família $(s_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ de números naturais tais que $s_i < s_{i+1}$, para $i = 0,\cdots,m-1$, $s_0 = 0$ e $s_m = n+1$; nota-se que $s_{m-1} \leqslant n$ e distinguem-se, então, dois casos: a) $s_{m-1} = n$ e b) $s_{m-1} < n$. No primeiro caso deduz-se que (43) é verdadeira para $n+1$ utilizando-se, simplesmente, a definição de produto de uma família de elementos. No caso b), coloca-se $b'_m = a_{s_{m-1}+1}\cdots a_n$ e utiliza-se o fato que $n\in S$, a definição de produto de uma família de elementos e a propriedade associativa da multiplicação para deduzir que (43) é verdadeira para $n+1$.

80. O teorema geral de comutatividade é enunciado sob a forma: seja $(E,\cdot)$ um semi-grupo e seja $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ (onde $n\in\boldsymbol{N}^*$) uma família de elementos de E. Se $a_i a_j = a_j a_i$, para $i,j = 1,2,\cdots,n$ e se σ é uma permutação qualquer do conjunto $[1,n] = \{1,2,\cdots,n\}$, tem-se

$$a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(n)} = a_1 a_2 \cdots a_n. \qquad (44)$$

Sugestões para demonstração: Indica-se por S o conjunto de todos os

números naturais $n\in\boldsymbol{N}^*$ tais que (44) seja verdadeira para tôda família $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de elementos de E permutáveis dois a dois e para tôda permutação σ do intervalo $[1,n]$. É imediato que $1\in S$; supõe-se, então, que $n\in S$. Considera-se a seguir uma família $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ de elementos de E tais que $a_i a_j = a_j a_i$, para $i,j = 1,2,\cdots,n+1$, e uma permutação σ do intervalo $[1,n+1]$. Distinguem-se, então, três casos: a) $\sigma(n+1) = n+1$; b) $\sigma(1) = n+1$ e c) $\sigma(m) = n+1$ para algum $m\in[2,n+1]$. Em a) basta notar que a restrição de σ ao intervalo $[1,n]$ é uma permutação dêste intervalo, aplicar a definição de composto de uma família de elementos e a hipótese de indução. No caso b) considera-se a permutação τ de $[1,n]$ definida por $\tau(k) = \sigma(k+1)$ para $k = 1,2,\cdots,n$ e utiliza-se o exercício anterior e o teorema 30. Em c) define-se a permutação τ do intervalo $[1,n+1]$ por meio de $\tau(k) = \sigma(k)$ para $k = 1,2,\cdots,m-1$, $\tau(k) = \sigma(k+1)$, para $k = m,m+1,\cdots,n$ e $\tau(n+1) = n+1$; observa-se que τ satisfaz as hipóteses do caso a) e utilizam-se o exercício anterior e o teorema 30.

CAPÍTULO III

NÚMEROS INTEIROS

No §1 dêste Capítulo construiremos o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros a partir do conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais pelo processo de simetrização da adição definida sôbre $\boldsymbol{N}$; mostraremos que $\boldsymbol{N}$ pode ser considerado como uma parte de $\boldsymbol{Z}$ e estenderemos diversas propriedades do conjunto $\boldsymbol{N}$ para o conjunto $\boldsymbol{Z}$. Terminaremos êste parágrafo com o estudo das potências com expoentes negativos de elementos de um monóide multiplicativo.

No §2 daremos algumas noções elementares da Teoria dos Números; entre os resultados mais importantes dêste parágrafo podemos destacar: o algoritmo da divisão, o teorema sôbre máximo divisor comum (teorema 21) e o teorema fundamental da Aritmética. Terminaremos êste parágrafo com uma introdução à teoria das congruências. Êstes resultados serão generalizados no Capítulo VII para outros tipos de anéis de integridade como, por exemplo, os anéis de polinômios com coeficientes num corpo, ao estudarmos os anéis fatoriais.

§1 - O ANEL $\boldsymbol{Z}$ DOS NÚMEROS INTEIROS

Conforme resultados estabelecidos no §2.1 do Capítulo II, dados dois números naturais a e b existe um número natural x tal que $b+x=a$ se, e sòmente se, $b\leqslant a$; portanto, só se pode considerar a diferença $a-b$, em $\boldsymbol{N}$, quando $b\leqslant a$. Para eliminar estas restrições mostraremos que se pode construir um conjunto $\boldsymbol{Z}$, ampliação de $\boldsymbol{N}$, onde seja sempre possível considerar a diferença $a-b$ de dois números naturais quaisquer; de fato, a diferença $a-$b estará definida para todos os elementos de $\boldsymbol{Z}$. Notemos, desde já, que a diferença $a-b$ $(b\leqslant a)$ satisfaz a equação $d+x=c$ $(d\leqslant c)$ se, e sòmente se, $a+d=b+c$; isto nos mostra que não basta introduzir os novos elementos como pares ordenados de números naturais, sendo necessário estabelecer um critério para que dois pares ordenados representem a mesma diferença.

Um outro modo de considerar o problema acima é o seguinte: notamos, inicialmente, que 0 é o único elemento de $\boldsymbol{N}$ simetrizável para a adição; procura-se, então, ampliar o conjunto $\boldsymbol{N}$ com a introdução de novos elementos de modo que todo número natural seja simetrizável. Trata-se, portanto, de construir um conjunto $\boldsymbol{Z}$, ampliação de $\boldsymbol{N}$, de definir uma operação de adição sôbre $\boldsymbol{Z}$ extensão da operação de adição sôbre $\boldsymbol{N}$, de modo que todo número natural seja simetrizável para esta nova operação de adição; deve-se impôr também que $\boldsymbol{Z}$ seja o menor conjunto satisfazendo estas condições. Uma vez feita a construção dêste conjunto $\boldsymbol{Z}$ poderemos definir a diferença $a-b$ entre dois números naturais quaisquer a e b por meio de $a-b=a+(-b)$, onde o oposto de b está considerado em $\boldsymbol{Z}$. A construção acima é conhecida sob o nome de simetrização de uma operação e pode ser desenvolvida para um semi-grupo $(E,+)$ desde que a operação + seja comutativa e satisfaça a lei do cancelamento.

Ao fazer a ampliação de $\boldsymbol{N}$ para $\boldsymbol{Z}$ estenderemos também a operação de multiplicação sôbre $\boldsymbol{N}$ para $\boldsymbol{Z}$ e procederemos do mesmo modo em relação à ordem $\leqslant$ definida sôbre $\boldsymbol{N}$.

1.1 - CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO $\boldsymbol{Z}$ DOS NÚMEROS INTEIROS

Consideremos o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais e seja $E=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ o produto cartesiano de $\boldsymbol{N}$ por si mesmo, logo E é o conjunto de todos os pares ordenados (a,b), onde a e b são números naturais. Já sabemos que sôbre $\boldsymbol{N}$ estão definidas operações de adição e de multiplicação que satisfazem os axiomas enunciados no §2.4 do Capítulo II; para facilitar as referências repetiremos aqui os axiomas que serão utilizados nesta secção:

A1: $(a+b)+c=a+(b+c)$	M1: $(ab)c=a(bc)$
A2: $a+b=b+a$	M2: $ab=ba$
A3: $a+0=a$	M3: $a\cdot 1=a$
LCA: $a+b=a+c\Longrightarrow b=c$	

D: $a(b+c)=ab+ac$.

Definiremos uma relação R sôbre o conjunto $E = N \times N$ do seguinte modo

DEFINIÇÃO 1 - Se (a,b) e (c,d) são dois elementos quaisquer de E, então, colocaremos

$$(a,b)R(c,d)$$

se, e sòmente se,

$$a+d=b+c.$$

Por exemplo, temos $(a,a)R(b,b)$ quaisquer que sejam os números naturais a e b.

TEOREMA 1 - A relação R, introduzida pela definição 1, é uma relação de equivalência sôbre E.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar as condições E1, E2 e E3 da definição de relação de equivalência (definição 6 do §2.3, Capítulo I).

E1: Para todo elemento (a,b) de E temos $(a,b)R(a,b)$, pois $a+b=b+a$ em virtude do axioma A2.

E2: Sejam (a,b) e (c,d) dois elementos quaisquer de E e suponhamos que $(a,b)R(c,d)$, ou seja, que $a+d=b+c$; daqui resulta pelo axioma A2, $d+a=c+b$, ou, $c+b=d+a$, portanto,

$$(c,d)R(a,b).$$

E3: Sejam (a,b), (c,d) e (e,f) três elementos quaisquer de E e suponhamos que $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$, logo,

$$a+d=b+c \qquad (1)$$

e

$$c+f=d+e \qquad (2).$$

Consideremos, então, o número natural $(a+d)+f$; conforme os axiomas A1 e A2 e as igualdades (1) e (2), temos

$$(a+f)+d=a+(f+d)=a+(d+f)=(a+d)+f=$$
$$=(b+c)+f=b+(c+f)=b+(d+e)=b+(e+d)=(b+e)+d;$$

portanto, de acôrdo com o axioma LCA, teremos $a+f=b+e$, logo, $(a,b)R(e,f)$. ∎

Se (a,b) é um elemento qualquer de E indicaremos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência módulo R determinada por (a,b), isto é,

$$\overline{(a,b)}=\{(x,y)\in E \mid (x,y)R(a,b)\}.$$

O conjunto quociente de E pela relação de equivalência R será indicado por $\boldsymbol{Z}$, isto é, $\boldsymbol{Z}=E/R=(N\times N)/R$. Conforme o teorema 4 do Capítulo I, temos $\overline{(a,b)}=\overline{(c,d)}$ se, e sòmente se, $(a,b)R(c,d)$ e lembremos que o conjunto $\boldsymbol{Z}$, de tôdas as classes de equivalência módulo R, é uma partição de $E=N\times N$.

Dados dois elementos quaisquer $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ de $\boldsymbol{Z}$, colocaremos, por definição,

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)} \qquad (3).$$

Precisamos verificar, inicialmente, que a soma de $\overline{(a,b)}$ com $\overline{(c,d)}$ está bem definida, isto é, que a definição acima não depende dos representantes (a,b) e (c,d) das classes de equivalência, $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, ou seja, precisamos demonstrar que se

$$\overline{(a,b)}=\overline{(a',b')} \quad \text{e} \quad \overline{(c,d)}=\overline{(c',d')} \qquad (4),$$

então,

$$\overline{(a+c,b+d)}=\overline{(a'+c',b'+d')} \qquad (5).$$

Ora, de (4) resulta $(a,b)R(a',b')$ e $(c,d)R(c',d')$, logo,

$$a+b'=b+a' \quad \text{e} \quad c+d'=d+c',$$

de onde vem, conforme os axiomas A1 e A2:

$$(a+c)+(b'+d')=((a+c)+b')+d'=(a+(c+b'))+d'=$$
$$=(a+(b'+c))+d'=((a+b')+c)+d'=((b+a')+c)+d'=$$
$$=(b+a')+(c+d')=(b+a')+(d+c')=b+(a'+(d+c'))=$$
$$=b+((a'+d)+c')=b+((d+a')+c')=b+(d+(a'+c'))=(b+d)+(a'+c'),$$

logo, $(a+c,b+d)R(a'+c',b'+d')$ e então vale a fórmula (5).

Fica assim definida uma operação de adição

$$(\overline{(a,b)},\overline{(c,d)})\mapsto\overline{(a+c,b+d)}$$

sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ e suas propriedades mais importantes estão dadas pelo seguinte

TEOREMA 2 - A operação de adição define uma estrutura de grupo comutativo sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$ são elementos quaisquer de $\boldsymbol{Z}$ temos, conforme a definição (3) e os axiomas A1 e A2 aplicados a elementos de $\boldsymbol{N}$:

A1: $$(\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)})+\overline{(e,f)}=\overline{(a+c,b+d)}+\overline{(e,f)}=$$
$$=\overline{((a,c)+e,(b+d)+f)}=\overline{(a+(c+e),b+(d+f))}=$$
$$=\overline{(a,b)}+\overline{(c+e,d+f)}=\overline{(a,b)}+(\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}).$$

A2: $$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}=\overline{(c+a,d+b)}=\overline{(c,d)}+\overline{(a,b)}.$$

A3: Considerando-se a classe de equivalência $0'=\overline{(0,0)}$ temos, para todo elemento $\overline{(a,b)}$ de $\boldsymbol{Z}$:

$$\overline{(a,b)}+0'=\overline{(a,b)}+\overline{(0,0)}=\overline{(a+0,b+0)}=\overline{(a,b)};$$

portanto, $0'=\overline{(0,0)}$ é o elemento neutro para a operação de adição definida sôbre $\boldsymbol{Z}$. Notemos que um par ordenado (x,y) pertence à classe de equivalência $0'=\overline{(0,0)}$ se, e sòmente se, $x=y$.

A4: Seja $\overline{(a,b)}$ um elemento qualquer de $\boldsymbol{Z}$ e consideremos a classe de equivalência $\overline{(b,a)}$; temos

$$\overline{(a,b)}+\overline{(b,a)}=\overline{(a+b,b+a)}=\overline{(a+b,a+b)}=\overline{(0,0)}=0',$$

portanto, $\overline{(b,a)}$ é o oposto de $\overline{(a,b)}$: $\overline{(b,a)}=-\overline{(a,b)}$. ∎

De acôrdo com o teorema acima e o teorema 6 do Capítulo II resulta que é válida em $\boldsymbol{Z}$ a lei do cancelamento da adição.

Dados dois elementos quaisquer (a,b) e (c,d) de $\boldsymbol{Z}$ colocaremos, por definição,

$$\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)} \qquad (6).$$

Precisamos verificar que a definição acima não depende dos representantes (a,b) e (c,d) das classes de equivalência $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, isto é, se

$$\overline{(a,b)}=\overline{(a',b')} \quad \text{e} \quad \overline{(c,d)}=\overline{(c',d')} \qquad (7),$$

então,

$$\overline{(ac+bd,ad+bc)}=\overline{(a'c'+b'd',a'd'+b'c')} \qquad (8).$$

Ora, de (7) resulta que $(a,b)R(a',b')$ e $(c,d)R(c',d')$, logo,

$$a+b'=b+a' \quad \text{e} \quad c+d'=d+c',$$

de onde vem,

$$c(a+b')+a'(c+d')+d(b+a')+b'(d+c')=$$
$$=c(b+a')+a'(d+c')+d(a+b')+b'(c+d');$$

portanto, conforme os axiomas A1, A2, M2, D e LCA, teremos

$$(ac+bd)+(a'd'+b'c')=(ad+bc)+(a'c'+b'd'),$$

ou seja, $(ac+bd,ad+bc)R(a'c'+b'd',a'd'+b'c')$ e então vale a fórmula (8).

Fica assim definida uma operação de multiplicação

$$(\overline{(a,b)},\overline{(c,d)})\longmapsto\overline{(ac+bd,ad+bc)}$$

sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ e suas propriedades mais importantes são dadas pelo seguinte

TEOREMA 3 - A operação de multiplicação, definida sôbre $\boldsymbol{Z}$, satisfaz os axiomas M1, M2, M3 e D.

DEMONSTRAÇÃO - Verificaremos os axiomas M3 e D e deixaremos os outros a cargo do leitor.

M3: Consideremos a classe de equivalência $1'=\overline{(1,0)}$; temos, para todo elemento $\overline{(a,b)}$ de $\boldsymbol{Z}$:

$$\overline{(a,b)}\cdot 1'=\overline{(a,b)}\cdot\overline{(1,0)}=\overline{(a\cdot 1+b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 1)}=\overline{(a,b)};$$

portanto, $1'=\overline{(1,0)}$ é o elemento neutro para a multiplicação.

D: Se $\overline{(a,b)},\overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$ são elementos quaisquer de $\boldsymbol{Z}$ teremos, conforme as fórmulas (3) e (6) e os axiomas D, A1 e A2 aplicados a elementos de $\boldsymbol{N}$:

$$\overline{(a,b)}(\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)})=\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c+e,d+f)}=$$
$$=\overline{(a(c+e)+b(d+f),a(d+f)+b(c+e))}=$$
$$=\overline{((ac+bd)+(ae+bf),(ad+bc)+(af+be))}=$$
$$=\overline{(ac+bd,ad+bc)}+\overline{(ae+bf,af+be)}=\overline{(a,b)}\overline{(c,d)}+\overline{(a,b)}\overline{(e,f)}.$$ ∎

Os elementos do conjunto $\boldsymbol{Z}$, construído acima, passam a ser denominados *números inteiros* e diremos, então, que $\boldsymbol{Z}$ é o *conjunto dos números inteiros.*

EXERCÍCIOS

1. Verificar os axiomas M1 e M2 para a operação de multiplicação definida sôbre $\boldsymbol{Z}$.

2. Mostrar que $(a,b)R(a+c,b+c)$, quaisquer que sejam os números naturais a, b e c.

3. Mostrar que $x,y\in\overline{(1,0)}=1'$ se, e sòmente se, $y=x+1$.

4. Mostrar que $\overline{(a,b)}\cdot 0'=0'$, para todo inteiro $\overline{(a,b)}$.

5. Se x e y são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{Z}$, então, valem as seguintes fórmulas (regra dos sinais):

$$(-x)y=-(xy)=x(-y) \quad \text{e} \quad (-x)(-y)=xy.$$

6. Verificar que a multiplicação é distributiva em relação à subtração, isto é, que $x(y-z)=(xy)-(xz)$, quaisquer que sejam x, y e z em $\boldsymbol{Z}$.

7. Utilizando o exercício anterior, mostrar que $x\cdot 0'=0'$, para todo número inteiro x.

8. Representar no plano da Geometria Analítica as classes de equivalência pertencentes a $\boldsymbol{Z}$.

1.2 - RELAÇÃO DE ORDEM SÔBRE $\boldsymbol{Z}$

Já sabemos que sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais está definida uma relação $\leqslant$ que satisfaz os axiomas enunciados no §2.4 do Capítulo II; para facilitar as referências repetiremos aqui os axiomas que serão utilizados nesta secção. Se a, b e c são números naturais, temos

O1: $a\leqslant a$;

O2: $a\leqslant b$ e $b\leqslant a \Longrightarrow a=b$;

O3: $a\leqslant b$ e $b\leqslant c \Longrightarrow a\leqslant c$;

O4: $a\leqslant b$ ou $b\leqslant a$;

OA: $a\leqslant b \Longrightarrow a+c\leqslant b+c$; OA': $a<b \Longrightarrow a+c<b+c$;

OM: $a\leqslant b$ e $0\leqslant c \Longrightarrow ac\leqslant bc$; OM': $a<b$ e $0<c \Longrightarrow ac<bc$.

Procuraremos estender estas propriedades ao conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros e com êste objetivo daremos, inicialmente, a seguinte

DEFINIÇÃO 2 - Diz-se que um número inteiro $x=\overline{(a,b)}$ é *menor do que* um número inteiro $y=(c,d)$ (em símbolos: $x\leqslant y$) se, e sòmente se, $a+d\leqslant b+c$.

É necessário verificar que a definição acima não depende dos representantes (a,b) e (c,d) das classes de equivalência $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c\cdot d)}$, isto é, se

$$(a,b)R(a',b') \quad \text{e} \quad (c,d)R(c',d')$$

e se $a+d\leqslant b+c$, então $a'+d'\leqslant b'+c'$. Com efeito, por hipótese, temos $a+b'=b+a'$, $c+d'=d+c'$ e $a+d\leqslant b+c$, portanto, de acôrdo com os axiomas A1, A2, O3 e OA, aplicados a elementos de $\boldsymbol{N}$, teremos

$$(a'+d')+(a+d)\leqslant(a'+d')+(b+c)=(a'+b)+(d'+c)=$$
$$=(a+b')+(d+c')=(b'+c')+(a+d),$$

de onde vem, conforme o teorema 13 do Capítulo II, $a'+d'\leqslant b'+c'$.

TEOREMA 4 - A relação $\leqslant$ define sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ uma estrutura de ordem total compatível com a adição.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos, simplesmente, mostrar que a relação $\leqslant$ satisfaz os axiomas O1, O2, O3, O4 e OA. Consideremos, então, três números inteiros quaisquer

$$x=\overline{(a,b)},\quad y=\overline{(c,d)} \quad \text{e} \quad z=\overline{(e,f)}.$$

O1: Temos $x\leqslant x$, pois, $a+b\leqslant b+a$.

O2: De $x\leqslant y$ e $y\leqslant z$ resulta, conforme a definição 2, $a+d\leqslant b+c$ e $c+b\leqslant d+a$, portanto, de acôrdo com os axiomas A2 e O2, teremos $a+d=b+c$, logo, $(a,b)R(c,d)$, de onde vem, $x=y$.

O3: De $x\leqslant y$ e $y\leqslant z$ resulta, conforme a definição 2, $a+d\leqslant b+c$ e $c+f\leqslant d+e$, logo, pelo princípio da soma de desigualdades, temos $(a+d)+(c+f)\leqslant(b+c)+(d+e)$, de onde concluímos que $a+f\leqslant b+e$ (pela aplicação dos axiomas A1 e A2 e pelo teorema 13 do Capítulo II); portanto, $x\leqslant z$.

O4: Basta notar que $a+d\leqslant b+c$ ou $b+c\leqslant a+d$, pois, a ordem sôbre $\boldsymbol{N}$ é total.

OA: De $x\leqslant y$ resulta $a+d\leqslant b+c$, logo, $(a+d)+(e+f)\leqslant(b+c)+(e+f)$, de onde vem pelos axiomas A1 e A2, $(a+e)+(d+f)\leqslant(b+f)+(c+e)$; portanto, $x+z\leqslant y+z$. ∎

COROLÁRIO 1 - A operação de adição e a relação de ordem, definidas sôbre $\boldsymbol{Z}$, definem uma estrutura de grupo comutativo totalmente ordenado sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros.

É uma conseqüência imediata do teorema 3 e do teorema acima.

Portanto, de acôrdo com o teorema 9 do Capítulo II, temos

COROLÁRIO 2 - As seguintes propriedades são equivalentes entre si (x, y e z indicam números inteiros):

a) $x<y$;
b) $x+z<y+z$;
c) $-y<-x$;
d) $x-y<0'$;
e) $0'<y-x$.

As partes a) e b) nos mostram que o axioma OA' é verdadeiro em $\boldsymbol{Z}$.

TEOREMA 5 - Vale em $\boldsymbol{Z}$ o axioma OM':

$$x<y \text{ e } 0'<z \Longrightarrow xz<yz.$$

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $x=\overline{(a,b)}$, $y=\overline{(c,d)}$ e $z=\overline{(e,f)}$; de $x<y$ e $0'<z$, resulta,

$$a+d<b+c \quad \text{e} \quad f<e,$$

logo, existem números naturais não nulos g e h tais que

$$b+c=a+d+g \quad \text{e} \quad e=f+h.$$

Destas igualdades concluímos que

$$be+ce=ae+de+ge,$$
$$bf+cf=af+df+gf$$

e

$$ge=gf+gh \tag{9},$$

logo,

$$ae+de+ge+bf+cf=af+df+gf+be+ce \tag{10},$$

de onde vem (utilizando-se (9) e LCA)

$$ae+de+bf+cf+gh=af+df+be+ce,$$

ou

$$(ae+bf)+(cf+de)+gh=(af+be)+(ce+df),$$

ou seja, $xz<yz$. ∎

TEOREMA 6 - Valem, em $\boldsymbol{Z}$, as seguintes propriedades:

a) $0'<x$ e $0'<y \Longrightarrow 0'<xy$;
b) $x<0'$ e $0'<y \Longrightarrow xy<0'$;
c) $x<0'$ e $y<0' \Longrightarrow 0'<xy$.

DEMONSTRAÇÃO

a) De acôrdo com o teorema 5, aplicado às desigualdades $0'<x$ e $0'<y$, resulta, $0'\cdot y<xy$ e como $0'\cdot y=0'$ (ver o exercício 7), teremos $0'<xy$.

b) De $x<0'$ resulta, conforme o corolário 2 do teorema 4, $0'<-x$ e como $0'<y$ teremos, em virtude da parte a), $0'<(-x)y$; por outro lado, $(-x)y=-(xy)$ (ver o exercício 5), logo, $0'<-(xy)$ de onde vem, pelo corolário 2 do teorema 4, $xy<0'$.

c) De $x<0'$ e $y<0'$ resulta $0'<-x$ e $0'<-y$, logo, em virtude da parte a), $0'<(-x)(-y)$; mas $(-x)(-y)=xy$ (ver o exercício 5), portanto, $0'<xy$. ∎

COROLÁRIO 1 - Em $\boldsymbol{Z}$ vale a lei do anulamento do produto: se x e y são dois números inteiros e se $xy=0'$, então $x=0$ ou $y=0'$.

É uma conseqüência imediata das partes a), b) e c) do teorema anterior e do fato que a ordem sôbre $\boldsymbol{Z}$ é total.

COROLÁRIO 2 - Todo número inteiro não nulo é regular para a multiplicação, ou seja, vale em $\boldsymbol{Z}$ a lei restrita do cancelamento da multiplicação.

LCM: se x, y e z são números inteiros tais que $xy=xz$ e se $x\neq 0'$, então $y=z$.

Com efeito, de $xy=xz$ resulta $xy-xz=0'$, de onde vem $x(y-z)=0'$ (ver o exercício 6) e como, por hipótese, $x\neq 0'$ teremos, em virtude do corolário anterior, $y-z=0'$ e então $y=z$. ∎

DEFINIÇÃO 3 - Diz-se que um número inteiro x é *positivo* (resp., *negativo*) se, e sòmente se, $0'\leqslant x$ (resp., $x\leqslant 0'$). Se x é positivo (resp., negativo) e se $x\neq 0'$ diremos que x é *estritamente positivo* (resp., *estritamente* positivo).

Notemos que de acôrdo com a lei de tricotomia todo número inteiro é estritamente negativo ou é nulo ou é estritamente positivo, sendo que cada um dêstes casos exclui os outros dois. Conforme a propriedade antisimétrica (O3), $0'$ é o único número inteiro que é positivo e negativo.

Indicaremos por $\boldsymbol{N}'$ o conjunto de todos os números inteiros positivos e colocaremos $\boldsymbol{N}'^*=\boldsymbol{N}'-\{0'\}$, logo, $\boldsymbol{N}'^*$ é o conjunto de todos os números inteiros estritamente positivos. De acôrdo com o corolário 2 do teorema 4, temos que um número inteiro x é positivo se, e sòmente se, seu oposto $-x$ é negativo; isto justifica a notação $-\boldsymbol{N}'$ (resp., $-\boldsymbol{N}'^*$) para indicar o conjunto de todos os inteiros negativos (resp., estritamente negativos). Conforme as observações acima temos

$$\boldsymbol{Z}=(-\boldsymbol{N}'^*)\cup\{0'\}\cup\boldsymbol{N}'^*,$$

onde $(-\boldsymbol{N}'^*,\{0'\},\boldsymbol{N}'^*)$ é uma partição do conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros.

Vejamos mais algumas propriedades do conjunto $\boldsymbol{N}'$ dos números inteiros positivos, propriedades estas que nos permitirão identificar o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais com $\boldsymbol{N}'$; para isso precisamos demonstrar que $\boldsymbol{N}'$ satisfaz os axiomas que foram utilizados para definir $\boldsymbol{N}$ (ver o §2.1 do Capítulo I). Inicialmente observamos que se $0'\leqslant x$ e $0'\leqslant y$, então, $0'\leqslant x'+y'$, logo, $\boldsymbol{N}'$ é fechado em relação a adição e, portanto, podemos considerar sôbre $\boldsymbol{N}'$ a operação de adição + induzida pela operação de adição de $\boldsymbol{Z}$. É imediato que $(\boldsymbol{N}',+)$ é um semi-grupo comutativo. A relação de ordem total $\leqslant$, definida sôbre $\boldsymbol{Z}$, induz, evidentemente, uma ordem total sôbre $\boldsymbol{N}'$ que será indicada com o mesmo símbolo $\leqslant$; é imediato que $(\boldsymbol{N}',+,\leqslant)$ é um semi-grupo comutativo totalmente ordenado e que os axiomas N1 e N2 são válidos em $\boldsymbol{N}'$. Observemos que o axioma N3 também é válido em $\boldsymbol{N}'$, pois, se x e y são elementos de $\boldsymbol{N}'$ tais que $y\leqslant x$, temos $y=x+(y-x)$ e basta notar que $y-x\in\boldsymbol{N}'$ em virtude do corolário 2 do teorema 4. Conforme as considerações que desenvolveremos abaixo resultará, em particular, que $(\boldsymbol{N}',+,\leqslant)$ também satisfaz o axioma N4.

Notemos que todo número inteiro $\overline{(n,0)}$, com $n\in\boldsymbol{N}$, é positivo, logo, $\overline{(n,0)}\in\boldsymbol{N}'$; recìprocamente, se $\overline{(a,b)}$ é positivo, temos $b\leqslant a$, logo, existe $n\in\boldsymbol{N}$ tal que $a=b+n$ e observando-se que $(a,b)R(n,0)$ resulta $\overline{(a,b)}=\overline{(n,0)}$. Portanto, $\boldsymbol{N}'$ é o conjunto de todos os números inteiros da forma $\overline{(n,0)}$, onde n percorre $\boldsymbol{N}$. Com estas notações demonstraremos o seguinte

TEOREMA 7 - A aplicação $f:\boldsymbol{N}\longrightarrow\boldsymbol{N}'$ definida por $f(n)=\overline{(n,0)}$ é uma bijeção que satisfaz as condições:

a) para todos m e n em $\boldsymbol{N}$, tem-se $f(m+n)=f(m)+f(n)$;

b) quaisquer que sejam m e n em $\boldsymbol{N}$, tem-se $m\leqslant n$ se, e sòmente se, $f(m)\leqslant f(n)$.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o que observamos acima f é sobrejetora; por outro lado, de $\overline{(n,0)}=\overline{(n',0)}$ resulta $n=n'$, logo, f é injetora e, portanto, f é uma bijeção de $\boldsymbol{N}$ sôbre $\boldsymbol{N}'$

a) Temos $f(m+n)=\overline{(m+n,0)}=\overline{(m,0)}+\overline{(n,0)}=f(m)+f(n)$.

b) Conforme a definição 2, a desigualdade $m\leqslant n$ é equivalente à desigualdade $\overline{(m,0)}\leqslant\overline{(n,0)}$; portanto, temos $m\leqslant n$ se, e sòmente se, $f(m)\leqslant f(n)$. ∎

Do teorema anterior resulta, imediatamente, que $(N',+,\leqslant)$ satisfaz o axioma N4; deixaremos os detalhes desta verificação a cargo do leitor. O teorema acima afirma que a aplicação f é um isomorfismo ordenado de N em N' (ver a observação do §2.5 do Capítulo II); portanto, o semi-grupo comutativo totalmente ordenado $(N',+,\leqslant)$ é um outro «modêlo» do semi-grupo comutativo totalmente ordenado $(N,+,\leqslant)$. No que se segue identificaremos N com N' por meio da aplicação f, isto é, poremos

$$n=\overline{(n,0)},$$

para todo número natural n, ou seja, todo número natural n fica assim identificado com o inteiro positivo $\overline{(n,0)}$. Uma vez feita esta identificação temos $N\subset Z$, $0=0'$ e $1=1'$. Além disso, se x é um inteiro estritamente negativo, então $-x$ é estritamente positivo, logo, $-x\in N^*$ e como $x=-(-x)$ temos que todo inteiro estritamente negativo é o oposto (determinado em Z) de um número natural não nulo. Portanto, o conjunto Z dos números inteiros é constituído pelos elementos

$$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots.$$

Observemos ainda que todo número natural n é simetrizável para a operação de adição definida sôbre Z, operação esta que é uma extensão da adição definida sôbre N.

Seja $x=\overline{(a,b)}$ um número inteiro e notemos que

$$x=\overline{(a,b)}=\overline{(a,0)}+\overline{(0,b)}=\overline{(a,0)}+[-\overline{(b,0)}];$$

ora, em virtude da identificação feita acima, temos $\overline{(a,0)}=a$ e $\overline{(b,0)}=b$, logo,

$$x=a+(-b)=a-b,$$

ou seja, todo número inteiro é igual à diferença (determinada em Z) de dois números naturais.

Finalmente demonstraremos a seguinte propriedade que resolve o problema proposto na introdução do §1: se a e b são dois números naturais quaisquer, então existe um único número inteiro x tal que $b+x=a$. Com efeito, a unicidade de x é assegurada pela lei do cancelamento da adição; para a existência, basta notar que $a-b$ satisfaz a igualdade $b+(a-b)=a$. Temos assim que a diferença $a-b$ é o único número inteiro tal que $b+(a-b)=a$, sendo que esta diferença está determinada

em Z; se $b\leqslant a$, temos $0\leqslant a-b$, logo, $a-b$ é um número natural e se $a<b$, temos $a-b<0$, logo, $a-b$ é o oposto de um número natural não nulo.

Daremos, a seguir, um resumo das propriedades mais importantes do conjunto Z do números inteiros. Notemos, inicialmente, que

$$Z=(-N^*)\cup\{0\}\cup N^*,$$

onde os conjuntos $-N^*$, $\{0\}$ e N^* são disjuntos dois a dois.

As operações de adição $(a,b)\mapsto a+b$ e de multiplicação $(a,b)\mapsto ab$ satisfazem os seguintes axiomas (x, y e z são números inteiros):

A1: $(x+y)+z=x+(y+z)$	M1: $(xy)z=x(yz)$
A2: $x+y=y+x$	M2: $xy=yx$
A3: $x+0=x$	M3: $x\cdot 1=x$
A4: $x+(-x)=0$	LCM: $xy=xz$ e $x\neq 0 \Rightarrow y=z$

D: $x(y+z)=xy+xz$.

Observação - Deixamos de mencionar a lei do cancelamento da adição, pois, ela é agora uma conseqüência dos axiomas A1, A2, A3 e A4. Pelo fato de estarem verificados os axiomas A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3 e D diremos que Z é um *anel comutativo com elemento unidade*, sendo que os qualificativos «comutativo» e «elemento unidade» se referem, respectivamente, aos axiomas M2 e M3. Como o axioma LCM também está satisfeito diz-se que Z é um *anel de integridade*. Notemos que a lei do anulamento do produto é agora uma conseqüência do axioma LCM.

Está definida sôbre Z uma relação $\leqslant$ que satisfaz os axiomas (onde x, y e z são números inteiros)

O1: $x\leqslant x$

O2: $x\leqslant y$ e $y\leqslant x \Rightarrow x=y$

O3: $x\leqslant y$ e $y\leqslant z \Rightarrow x\leqslant z$

O4: $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$

OA: $x\leqslant y \Rightarrow x+z\leqslant y+z$	OM: $x\leqslant y$ e $0\leqslant z \Rightarrow xz\leqslant yz$
OA′: $x<y \Rightarrow x+z<y+z$	OM′: $x<y$ e $0<z \Rightarrow xz<yz$

N4: o conjunto dos inteiros positivos é bem ordenado pela ordem $\leqslant$.

Observação - O axioma OA diz que a relação de ordem é compatível com a adição; apesar de haver a restrição $0\leqslant z$ no axioma OM, diz-se também que a relação de ordem é

compatível com a multiplicação. Pelo fato de estarem verificados todos os axiomas A1-A4, M1-M3, D, LCM, O1-O4, OA e OM diremos que $(\mathbf{Z},+,\leqslant)$ é um *anel de integridade ordenado* e para mencionar que N4 também é verdadeiro diremos que $(\mathbf{Z},+,\leqslant)$ é um *anel de integridade bem ordenado.*

EXERCÍCIOS

9. Mostrar que o axioma N4 (princípio da boa ordem) não é verdadeiro em $\mathbf{Z}$.

10. Deduzir a lei de anulamento do produto a partir dos axiomas A1-A4, M1-M3, LCM e D.

11. Mostrar que $0\leqslant x^2$ para todo número inteiro x e que $0<x^2$ para todo inteiro $x\neq 0$.

12. Verificar que, para todo número inteiro n, não existe um número inteiro x tal que $n<x<n+1$.

13. Demonstrar que a aplicação f, definida no teorema 7, satisfaz a condição: c) $f(mn)=f(m)f(n)$, quaisquer que sejam os números naturais m e n.

14. Mostrar que a aplicação idêntica de $\mathbf{Z}$ é a única aplicação $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ tal que $f(1)=1$ e $f(a+b)=f(a)+f(b)$, quaisquer que sejam os números inteiros a e b.

15. Demonstrar que as desigualdades $x\leqslant y$ e $z\leqslant 0$ implicam $yz\leqslant xz$; anàlogamente, se $x<y$ e se $z<0$, então, $yz<xz$.

1.3 - PRINCÍPIO DO MENOR INTEIRO

O princípio do menor número natural ou princípio da boa ordem é estendido para o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros do seguinte modo

TEOREMA 8 (*princípio do menor inteiro*) - Todo subconjunto S de $\mathbf{Z}$, que é não vazio e minorado, possui um mínimo.

DEMONSTRAÇÃO - Seja b um minorante de S, logo, $b\leqslant s$ para todo s em S e consideremos o conjunto M de todos os números inteiros da forma $s-b$ com s em S; é imediato que M é um subconjunto não vazio do conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais, logo, de acôrdo com o princípio do menor número natural, existe $m'=minM$; portanto, existe $m\in S$ tal que $m'=m-b$. Se s é um elemento qualquer de S temos $s-b\in M$, logo, $m-b\leqslant s-b$, de onde vem, $m\leqslant s$; portanto, m é o mínimo de S. ∎

Podemos agora estender os corolários do teorema 17 do Capítulo II para o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros. Se a é um número inteiro, colocaremos

$$I_a=\{x\in\mathbf{Z}\mid a\leqslant x\}\quad\text{e}\quad I_a^*=\{x\in\mathbf{Z}\mid a<x\};$$

se a e b são dois inteiros quaisquer indicaremos por $[a,b]$ o conjunto $\{x\in\mathbf{Z}\mid a\leqslant x \text{ e } x\leqslant b\}$ e quando $a\leqslant b$ diremos que êste conjunto é o intervalo inteiro (fechado) de extremidades a e b. Define-se, anàlogamente, o conjunto $[a,b]$.

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA - Seja a um número inteiro e seja S um subconjunto de I_a tal que

a) $a\in S$;

b) para todo número inteiro n, se $a\leqslant n$ e se $n\in S$, então $n+1\in S$.

Nestas condições, temos $S=I_a$.

DEMONSTRAÇÃO 2 Suponhamos, por absurdo, que $S\neq I_a$ e indiquemos por S' o complementar de S em I_a; por hipótese, S' é não vazio e a é um minorante de S', logo, o princípio do menor inteiro nos mostra que existe $m=minS'$ e temos $a<m$, pois, $a\in S$. De $a<m$ resulta $a\leqslant m-1<m$, logo, $m-1\notin S'$, ou seja, $m-1\in S$; neste caso, a condição b) nos garante que $m=(m-1)+1\in S$ e chegamos assim a uma contradição, pois, $m\in S'$. ∎

TEOREMA 9 - Seja S um subconjunto do intervalo inteiro $[a,b]$ $(a\leqslant b)$ tal que

a) $a\in S$;

b) para todo número inteiro n, se $n<b$ e se $n\in S$, então $n+1\in S$.

Nestas condições, temos $S=[a,b]$.

Com efeito, o subconjunto $S_1=S\cup I_b^*$ satisfaz as condições a) e b) do teorema anterior, portanto, $S_1=I_a=[a,b]\cup I_b^*$ e como $S\cap I_b^*=\emptyset$, teremos $S=[a,b]$. ∎

Anàlogamente demonstra-se o seguinte

TEOREMA 10 - Seja a um número natural e seja S um subconjunto de I_a tal que

a) $a\in S$;

b) para todo número inteiro n, se $a\leqslant n$ e se $[a,n]\subset S$, então $n\in S$.

Nestas condições, temos $S=I_a$.

Os teoremas 8, 9 e 10 nos permitem generalizar, para o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros, os teoremas 31, 32 e 33 do Capítulo II; deixaremos isso a cargo do leitor. Portanto, o primeiro e o segundo princípio de indução finita são válidos em $\mathbf{Z}$.

EXERCÍCIOS

16. Demonstrar o teorema 10.

17. Enunciar o primeiro e o segundo princípio de indução finita para números inteiros.

18. Demonstrar que todo subconjunto S, de $\mathbf{Z}$, não vazio e majorado, possui um máximo.

19. Seja a um número inteiro, seja $P(n)$ uma propriedade (verdadeira ou falsa) associada a cada número inteiro $n \leq a$ e suponhamos que a) $P(a)$ é verdadeira; b) para todo número inteiro n, se $n \leq a$ e se $P(n)$ é verdadeira, então, $P(n-1)$ também é verdadeira. Nestas condições, demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todo número inteiro $n \leq a$.

1.4 - VALOR ABSOLUTO

DEFINIÇÃO 4 - Chama-se *valor absoluto* de um número inteiro x ao número inteiro $|x|$ (leia-se: valor absoluto de x) definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Notemos que $|x| = max\{-x, x\}$, para todo número inteiro x. Outras propriedades do valor absoluto estão dadas no seguinte

TEOREMA 11 - Para todo número inteiro x, temos

1) $0 \leq |x|$;
2) $|x| = 0$ se, e sòmente se, $x = 0$;
3) $x \leq |x|$;
4) $|-x| = |x|$;
5) $-|x| \leq x \leq |x|$.

As verificações destas propriedades são imediatas e serão deixadas a cargo do leitor.

TEOREMA 12 - No conjunto $\mathbf{Z}$ valem as propriedades:

1) se y é positivo, então, $|x| \leq y$ se, e sòmente se, $-y \leq x \leq y$ e $|x| < y$ se, e sòmente se, $-y < x < y$;
2) $|x+y| \leq |x| + |y|$;
3) $|xy| = |x||y|$.

DEMONSTRAÇÃO

1) Se $0 \leq x$, temos, por definição, $|x| = x$, logo, $x \leq y$; desta última igualdade resulta, em virtude do corolário 2 do teorema 4, $-y \leq -x$ e como $-x \leq 0 \leq x$, teremos $-y \leq x \leq y$. Anàlogamente, se $x < 0$, temos $0 < -x$ e $|x| = -x$, logo, $-x \leq y$, de onde vem, $-y \leq x$ e como $x \leq y$, teremos $-y \leq x \leq -y$. Recìprocamente, suponhamos que $-y \leq x \leq y$, com y positivo. Se $0 \leq x$, temos $|x| = x$, portanto, $|x| \leq y$; se $x < 0$, temos $|x| = -x$, de onde resulta pelo corolário 2 do teorema 4, $|x| \leq y$. A segunda parte desta propriedade é uma conseqüência imediata da primeira.

2) De acôrdo com a parte 5) do teorema anterior, temos

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{e} \quad -|y| \leq y \leq |y|,$$

de onde vem, pelo princípio da soma de desigualdades,

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

portanto, em virtude da parte 1) dêste teorema, temos

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

3) É uma conseqüência imediata do teorema 6 e das fórmulas $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ e $(-x)(-y) = xy$. ∎

EXERCÍCIOS

20. Mostrar que $|x| - |y| \leq |x-y|$, quaisquer que sejam os números inteiros x e y.

21. Demonstrar que $||x| - |y|| \leq |x-y|$, quaisquer que sejam os números inteiros x e y.

22. Se $|x+y| = |x| + |y|$, o que se conclui sôbre os números inteiros x e y?

23. Demonstrar que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \quad \text{e} \quad \left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|,$$

para tôda família $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de números inteiros.

24. Se x e y são dois números inteiros quaisquer, colocaremos $d(x,y) = |x-y|$. Verificar as seguintes propriedades:

a) $0 \leq d(x,y)$ e $d(x,y) = 0$ se, e sòmente se, $x = y$;
b) $d(x,y) = d(y,x)$;
c) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$;
d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

1.5 - POTÊNCIAS COM EXPOENTES NEGATIVOS

Examinaremos, neste parágrafo, as propriedades das potências com expoentes negativos de elementos simetrizáveis de um monóide multiplicativo $(E,\cdot)$ e faremos a transcrição dos resultados obtidos para o caso de um monóide aditivo.

DEFINIÇÃO 5 - Seja a um elemento inversível de um monóide multiplicativo E e seja n um número natural não nulo; colocaremos, por definição,

$$a^{-n} = (a^{-1})^n \qquad (11).$$

Diz-se, neste caso, que a^{-n} é a *potência de a com expoente negativo* $-n$; os elementos a e $-n$ passam a ser denominados, respectivamente, *base* e *expoente* da potência a^{-n}.

No caso da notação aditiva escreveremos $(-n)a$ no lugar de a^{-n} e diremos que $(-n)a$ é o múltiplo de a segundo o inteiro negativo $-n$; a correspondente da fórmula (11) é

$$(-n)a = n(-a) \qquad (12).$$

Conforme o teorema 31 do Capítulo II (ou, então, pode-se fazer uma verificação direta por indução finita sôbre $n \in \boldsymbol{N}$) tem-se que a^n é inversível e

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n;$$

portanto, a fórmula (11) pode ser escrita sob a forma

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (13).$$

Para a notação aditiva, temos

$$(-n)a = n(-a) = -(na) \qquad (14).$$

O teorema 27 do Capítulo II pode ser generalizado para potências com expoentes inteiros quaisquer desde que a base a seja um elemento inversível do monóide multiplicativo E. Precisamente, temos o seguinte

TEOREMA 13 - Quaisquer que sejam os números inteiros m e n e para todo elemento inversível do monóide multiplicativo E, tem-se

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \qquad (15)$$

e

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m \qquad (16).$$

DEMONSTRAÇÃO - Para simplificar as notações faremos a verificação de (15) adotando a notação aditiva: portanto, a é um elemento simetrizável do monóide aditivo E e vamos mostrar que

$$(m+n)a = ma + na \qquad (17),$$

quaisquer que sejam os números inteiros m e n. Distinguiremos três casos: a) m e n são positivos; b) $m \geqslant 0$, $n < 0$, e $m+n \geqslant 0$; c) m e n são inteiros quaisquer. No caso a) a fórmula (17) é verdadeira em virtude do teorema 27 do Capítulo II. b) Ponhamos $n = -p$, logo, $p > 0$ e notemos que $pa + na = 0$ (fórmula (14)); teremos, de acôrdo com o caso a),

$$(m+n)a = (m+n)a + 0 = (m+n)a + (pa + na) = [(m+n)a + pa] + na =$$
$$= [(m+n)+p]a + na = [m+(n+p)]a + na = (m+0)a + na = ma + na.$$

c) Consideremos um inteiro positivo p tal que $m+p \geqslant 0$, $n+p \geqslant 0$ e $(m+n)+p \geqslant 0$; teremos, de acôrdo com os casos a) e b):

$$(m+n)a = (m+n)a + 0 = (m+n)a + [pa + (-p)a] = [(m+n)a + pa] + (-p)a =$$
$$= [(m+n)+p]a + (-p)a = [m+(n+p)]a + (-p)a = [ma + (n+p)a] + (-p)a =$$
$$= [ma + (na + pa)] + (-p)a = [(ma + na) + pa] + (-p)a =$$
$$= (ma + na) + [pa + (-p)a] = (ma + na) + 0 = ma + na,$$

o que termina a verificação de (17).

Mostraremos a seguir que

$$a^{mn} = (a^m)^n \qquad (18),$$

onde a é um elemento inversível do monóide multiplicativo E e m e n são números inteiros quaisquer. Distiguiremos três casos: a) $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$; b) $m < 0$ e $n \geqslant 0$; c) $m < 0$ e $n < 0$. No caso a), o teorema 27 do Capítulo II nos mostra que vale a fórmula (18). b) Ponhamos $m = -p$, logo, $p > 0$ e notemos que $mn = (-p)n = -(np)$, onde $np \geqslant 0$; teremos, conforme o caso a) e a fórmula (13):

$$a^{mn} = a^{-(pn)} = (a^{pn})^{-1} = [(a^p)^n]^{-1} = [(a^p)^{-1}]^n = (a^{-p})^n = (a^m)^n.$$

c) Ponhamos $m = -p$ e $n = -q$, logo, $p > 0$ e $q > 0$ e notemos que $mn = (-p)(-q) = pq > 0$; teremos, conforme o caso a) e a fórmula (13): $a^{mn} = a^{pq} = (a^p)^q = [(a^{-p})^{-1}]^q = [(a^m)^{-1}]^q = (a^m)^{-q} = (a^m)^n$.

A segunda parte da fórmula (16) é agora uma conseqüência imediata de (18) e do fato que a multiplicação sôbre $\boldsymbol{Z}$ é comutativa. ∎

No caso da notação aditiva, a fórmula (16) é escrita sob a forma

$$(mn)a = n(ma) = m(na) \qquad (19),$$

onde a é simetrizável e m e n são inteiros quaisquer.

O teorema 28 do Capítulo II também pode ser generalizado para potências com expoentes negativos desde que a e b sejam permutáveis e inversíveis; precisamente, temos o seguinte

TEOREMA 14 - Se a e b são dois elementos permutáveis e inversíveis de um monóide multiplicativo E, então, temos para todo $m \in \mathbf{Z}$ e para todo $n \in \mathbf{Z}$:

$$a^m \cdot b^n = b^n \cdot a^m \tag{20}$$

e

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{21}.$$

DEMONSTRAÇÃO - O teorema 28 do Capítulo II nos mostra que a fórmula (20) é verdadeira para $m \geq 0$ e $n \geq 0$; faremos a verificação de (20) quando $m < 0$ e $n < 0$ e deixaremos os outros casos a cargo do leitor. Pondo-se $m = -p$ e $n = -q$, logo, $p > 0$ e $q > 0$, e notando-se que a^{-1} e b^{-1} são permutáveis (teorema 4 do Capítulo II), teremos

$$a^m b^n = a^{-p} b^{-q} = (a^{-1})^p (b^{-1})^q = (b^{-1})^q (a^{-1})^p = b^{-q} a^{-p} = b^m a^n .$$

A fórmula (21) é verdadeira para $n \geq 0$ (teorema 28 do Capítulo II); suponhamos, então, que $n < 0$ e coloquemos $n = -p$, logo, $p > 0$. Temos, levando-se em conta que a^{-1} e b^{-1} são permutáveis, $(ab)^n = (ab)^{-p} = [(ab)^{-1}]^p = (b^{-1}a^{-1})^p = (a^{-1}b^{-1})^p =$

$$= (a^{-1})^p (b^{-1})^p = a^n b^n ,$$

o que termina a demonstração do teorema acima. ∎

As correspondentes das fórmulas (20) e (21), para elementos permutáveis e simetrizáveis de um monóide aditivo E, são as seguintes

$$ma + nb = nb + ma \tag{22}$$

e

$$n(a+b) = na + nb \tag{23}$$

EXERCÍCIOS

25. Seja a um elemento inversível de um monóide multiplicativo E; mostrar que $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$ para todo número inteiro n.

26. Completar a demonstração do teorema 13.

27. Seja $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ uma família de elementos inversíveis de um monóide multiplicativo E; se os elementos $a_1, a_2, \cdots, a_p$ são permutáveis dois a dois, vale a seguinte propriedade

$$\left(\prod_{i=1}^{p} a_i\right)^n = \prod_{i=1}^{p} a_i^n ,$$

para todo número inteiro n.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §1

28. Repetir o processo de simetrização da adição para $(\mathbf{Z},+)$ considerando o produto cartesiano $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, a relação R definida por $(a,b) R (c,d)$ se, e sòmente se, $a+d = b+c$ e a operação de adição definida sôbre o conjunto quociente E/R por $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$. Mostrar que a aplicação $f: \mathbf{Z} \to E/R$, definida por $f(a) = \overline{(a,0)}$ é uma bijeção que satisfaz a propriedade $f(a+b) = f(a) + f(b)$, quaisquer que sejam a e b em $\mathbf{Z}$.

29. Seja $(E,+,\leq)$ um grupo comutativo totalmente ordenado e seja $N' = \{x \in E \mid 0 \leq x\}$. Supondo-se que o conjunto E tenha pelo menos dois elementos e que N' seja bem ordenado pela ordem induzida, demonstrar que a aplicação $f: \mathbf{Z} \to E$, definida por $f(n) = n \cdot 1'$, onde $1' = min(N' - \{0\})$ é uma bijeção que satisfaz as condições: a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$, quaisquer que sejam a e b em $\mathbf{Z}$; b) $a \leq b$ se, e sòmente se, $f(a) \leq f(b)$.

30. Seja a um número inteiro e consideremos a operação $*$, sôbre $\mathbf{Z}$, definida por $x * y = xay$, quaisquer que sejam x e y em $\mathbf{Z}$. a) Mostrar que a operação $*$ é associativa, comutativa e é distributiva em relação à adição (isto é, $x*(y+z) = x*y + x*z$, quaisquer que sejam x, y e z em $\mathbf{Z}$). b) Em que condições sôbre o número inteiro a esta operação admite elemento neutro? c) Se α é uma operação sôbre $\mathbf{Z}$ que é distributiva em relação à adição, mostrar que existe um número inteiro a tal que $x \alpha y = xay$, quaisquer que sejam x e y em $\mathbf{Z}$.

§2 - NOÇÕES SÔBRE A TEORIA DOS NÚMEROS

2.1 - DIVISORES E NÚMEROS PRIMOS

DEFINIÇÃO 6 - Sejam a e b dois números inteiros; diz-se que b *é um divisor de* a se, e sòmente se, existe um inteiro c tal que $a = bc$.

Usaremos a notação $b|a$ para indicar que b é um divisor de a; neste caso, também se diz que b *divide* a ou que b *é um fator de* a ou que a *é um múltiplo de* b. A negação de $b|a$ será indicada por $b \nmid a$ (leia-se: b não divide a). A relação «b é divisor de a», que está sendo indicada com o símbolo $|$, é denominada *relação de divisibilidade* (sôbre $\mathbf{Z}$). Notemos que $a|0$ para todo número inteiro a e que $0|a$ se, e sòmente se, $a = 0$; por causa desta última propriedade costuma-se excluir o caso em que o divisor é nulo, isto é, considera-se a restrição da relação de divisibilidade ao subconjunto $\mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}$, onde $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$.

TEOREMA 15 - Quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c, tem-se

1) $a|a$;
2) se $a|b$ e se $b|c$, então $a|c$;
3) se $a|b$ e se $a|c$, então $a|(b \pm c)$;
4) se $a|b$, então $(ac)|(bc)$.

DEMONSTRAÇÃO

1) Basta notar que $a = a \cdot 1$.

2) Por hipótese existem números inteiros d e d' tais que $b = ad$ e $c = bd'$, logo, $c = (ad)d' = a(dd')$, de onde vem, $a|c$.

3) Com as notações da parte anterior temos $b \pm c = ad \pm ad' = a(d \pm d')$; portanto, $a|(b \pm c)$.

4) Temos $b = ad$, de onde vem, $bc = (ac)d$, logo, $(ac)|(bc)$. ∎

O teorema acima nos mostra que a relação de divisibilidade é reflexiva e transitiva (partes 1 e 2) e é compatível com a multiplicação (parte 4); notemos que não vale a propriedade simétrica, pois, por exemplo $2|(-2)$ e $(-2)|2$, com $2 \neq -2$. A parte 4) do teorema anterior pode ser completada pelo seguinte

COROLÁRIO - Se a, b e c são números naturais e se $c \neq 0$, então, $a|b$ se, e sòmente se, $(ac)|(bc)$.

Com efeito, de $(ac)|(bc)$ vem $bc = (ac)d$, com $d \in \mathbf{Z}$, logo, $bc = (ad)c$ e como $c \neq 0$ teremos, pela lei restrita do cancelamento da multiplicação, $b = ad$; portanto, $a|b$. ∎

Para todo número inteiro a indicaremos por $D(a)$ o conjunto de todos os divisores de a, isto é,

$$D(a) = \{x \in \mathbf{Z} \mid x|a\}.$$

Notemos que $D(0) = \mathbf{Z}$ e que para todo $a \in \mathbf{Z}$ os números $1, -1, a, -a$ são elementos de $D(a)$; além disso, temos $D(a) = D(-a)$. Quando a é não nulo, o conjunto $D(a)$ é finito conforme o seguinte

TEOREMA 16 - Para todo número inteiro $a > 0$, temos $D(a) \subset [-a, a]$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $b \in D(a)$, existe um número inteiro c tal que $a = bc$, de onde vem, $a = |a| = |b||c|$ e como $1 \leqslant |c|$, pois, $a > 0$, temos $|b| \leqslant |b||c| = a$; portanto, em virtude da parte 1) do teorema 12, resulta $-a \leqslant b \leqslant a$. ∎

Observemos que o teorema acima nos mostra que se b é um divisor de a, com $a \neq 0$, então, $1 \leqslant |b| \leqslant |a|$; portanto, se $a > 0$ e se b é um divisor positivo de a, teremos $1 \leqslant b \leqslant a$.

COROLÁRIO - $D(1) = \{-1, 1\}$.

Se a é um número inteiro não nulo, então os números inteiros 1, -1, a e $-a$, são divisores de a, que são denominados *divisores impróprios* de a. Todo fator de a, distinto de 1, -1, a e $-a$ é chamado *divisor próprio* de a. O corolário acima nos mostra que o número 1 (ou -1) só admite divisores impróprios. Notemos que se $a \neq 0$ e se b é um divisor próprio de a, então temos $1 < |b| < |a|$; em particular, se $a > 0$, todo divisor positivo e próprio b, de a, satisfaz necessàriamente as desigualdades $1 < b < a$.

DEFINIÇÃO 7 - Diz-se que um número inteiro p é *primo* se, e sòmente se, p satisfaz as seguintes condições

1) $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$;

2) Os únicos divisores de p são -1, 1, p e $-p$.

DEFINIÇÃO 8 - Diz-se que um número inteiro a é *composto* se, e sòmente se, a satisfaz as seguintes condições

1) $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$;

2) a admite pelo menos um divisor próprio.

Como $D(a) = D(-a)$ temos que a é primo (resp., composto) se e sòmente se, $-a$ é primo (resp. composto). Observemos ainda que um número $p > 1$ é primo se, e sòmente se, os únicos divisores positivos de p são 1 e p. Um número inteiro a, com $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$, é composto se, e sómente se, existe um divisor b, de a, tal que $1 < |b| < |a|$; portanto, em particular, um número $a > 1$ é composto se, e sòmente se, existe um divisor positivo b, de a, tal que $1 < b < a$ e, neste caso, a pode ser representado sob a forma $a = bc$, onde c é necessàriamente um divisor positivo e próprio de a, logo, $1 < c < a$.

TEOREMA 17 - Todo número inteiro a, com $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$, é igual a um produto de números primos.

DEMONSTRAÇÃO - Basta demonstrar o teorema acima quando a é positivo, logo, $a > 1$, o que faremos utilizando o segundo princípio de indução finita. Indiquemos por S o conjunto de todos os números inteiros $a \geqslant 2$ que são produtos de números primos e notemos que $2 \in S$, pois 2 é primo (ver o exercício 52 do Capítulo II). Seja $a > 2$ e suponhamos que o teorema acima seja verdadeiro para todo número inteiro r tal que $2 \leqslant r < a$. Se a é primo temos, evidentemente, $a \in S$; se a não é primo, existem inteiros b e c tais que $a = bc$, com $2 \leqslant b < a$ e $2 \leqslant c < a$, portanto, b e c são elementos de S, ou seja, b e c são produtos de números primos, de onde resulta que $a = bc$ tam-

bém é um produto de números primos, isto é, $a \in S$. Em virtude do segundo princípio de indução finita, todo número inteiro $a \geq 2$ pertence a S, ou seja, todo número inteiro $a \geq 2$ é um produto de números primos. ∎

COROLÁRIO 1 - Todo número inteiro $a \geq 2$ é igual a um produto de números primos positivos.

COROLÁRIO 2 - Todo número inteiro a, com $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$, admite pelo menos um fator primo positivo.

O seguinte teorema é devido a Euclides (III século A.C.):

TEOREMA 18 - Existem infinitos números primos.

DEMONSTRAÇÃO - Basta, evidentemente, demonstrar que existem infinitos números primos positivos. Suponhamos, por absurdo, que exista sòmente um número finito de números primos positivos $p_1, p_2, \cdots, p_s$ e consideremos, então, o número inteiro

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s + 1 \qquad (24);$$

temos $a > 1$, logo, em virtude do corolário 2 do teorema anterior, o número a admite pelo menos um fator primo positivo p e êste número p deve, necessàriamente, coincidir com um dos números $p_1, p_2, \cdots, p_s$: $p = p_i$ $(1 \leq i \leq s)$. Portanto, temos $p \mid a$ e $p \mid (p_1 p_2 \cdots p_s)$, de onde vem pela fórmula (24), $p \mid 1$, o que é absurdo. ∎

EXERCÍCIOS

31. Mostrar que as seguintes condições sôbre os números inteiros a e b são equivalentes entre si: 1) $a \mid b$; 2) $(-a) \mid b$; 3) $a \mid (-b)$; 4) $(-a) \mid (-b)$.

32. Demonstrar que os números inteiros 3, 5 e 7 são primos (ver o exercício 50 do Capítulo II).

33. Se $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ $(n \neq 0)$ é uma família de números inteiros e se $b \in \mathbf{Z}$ é um divisor de um a_i $(1 \leq i \leq n)$, então, $b \mid (a_1 a_2 \ldots a_n)$.

34. Determinar o conjunto $D(a)$ dos divisores de a nos seguintes casos: 1) $a = 10$; 2) $a = 16$; 3) $a = 28$; 4) $a = 29$; 5) $a = p^3$, onde p é um número primo positivo.

35. Mostrar que se $b \neq 0$ é um divisor de $a \in \mathbf{Z}$, então, existe um único número inteiro c tal que $a = bc$. Neste caso, c é denominado quociente de a por b e será indicado por $\frac{a}{b}$ (leia-se: a sôbre b).
Verificar as seguintes propriedades dos quocientes:
1) $b \cdot \frac{a}{b} = a$; 2) $\frac{a}{1} = a$; 3) $\frac{a}{a} = 1$; 4) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ $(c \neq 0)$; 5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e sòmente se, $ad = bc$ $(d \neq 0)$; 6) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; 7) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

36. Demonstrar que $a \mid b$ e $b \mid a$ se, e sòmente se, $a = \pm b$.

37. Verificar se a relação $\sim$, sôbre $\mathbf{Z}$, definida por $a \sim b$ se, e sòmente se, $a \mid b$ e $b \mid a$, é uma relação de equivalência. Determinar o conjunto quociente $\mathbf{Z} / \sim$.

38. Demonstrar que para todo número natural n, o número $n!+1$ admite um fator primo $p > n$.

39. Dar uma outra demonstração do teorema de Euclides a partir do exercício anterior.

40. Demonstrar que se um número inteiro $p > 1$ é um divisor de $(p-1)!+1$, então p é primo.

41. Seja $p > 1$ um número inteiro e seja a o maior inteiro positivo tal que $a^2 < p$; mostrar que se $[2, a] \cap D(p) = \emptyset$, então, p é primo.

2.2 - ALGORÍTMO DA DIVISÃO

TEOREMA 19 - Se a e b são dois números inteiros quaisquer, com $b \neq 0$, existe um único par (q, r), de números inteiros, tal que

$$a = bq + r \qquad (25),$$

onde

$$0 \leq r < |b| \qquad (26).$$

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, inicialmente, que $b > 0$ e consideremos o conjunto S de todos os números inteiros positivos que são da forma $a - bx$, com $x \in \mathbf{Z}$. Notemos que S é não vazio, pois, para $x = -|a|$, temos $a - bx = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0$; como S é minorado existe o mínimo r de S e temos $r \geq 0$ e $r = a - bq$, ou seja, $a = bq + r$, onde $q \in \mathbf{Z}$. Se, por absurdo, $b \leq r$ temos $r = b + r'$, onde $r' \geq 0$ e como $b > 0$ teremos $r' < r$, portanto, $r' \notin S$; mas, por outro lado,

$$r' = r - b = a - bq - b = a - b(q+1),$$

logo, $r' \in S$ e chegamos assim a uma contradição. No caso em que $b < 0$, existem números inteiros q' e r', tais que $a = (-b)q' + r' = b(-q') + r'$, onde $0 \leq r' < -b = |b|$; portanto, basta escolher $q = -q'$ e $r = r'$ para que sejam verdadeiras as fórmulas (25) e (26).

Finalmente, se (q_1, r_1) é um outro par de números inteiros tal que $a = bq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < |b|$, teremos $b(q - q_1) = r_1 - r$, de onde vem, $|b||q - q_1| = |r_1 - r|$. Se $r \neq r_1$, temos $|q - q_1| \geq 1$, logo, $|b||q - q_1| \geq |b|$ e, por outro lado, $|r_1 - r| < |b|$, o que é absurdo; portanto, $r = r_1$ e então $q = q_1$. ∎

Os números inteiros q e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$ são, respectivamente, denominados *quociente* e *resto da divisão euclidiana de a por b*. Notemos que b é divisor de a se,

e sòmente se, o resto da divisão euclidiana de a por b é nulo; neste caso, q coincide com o quociente de a por b como foi definido no exercício 35.

O teorema acima nos permite estabelecer o processo usual de representação de um número natural no sistema decimal; realmente, daremos a representação de todo número natural no sistema de base $m>1$. Neste caso, os números naturais $0,1,2,\cdots,m-1$ (que foram definidos no exercício 50 do Capítulo II) são denominados *algarismos* do sistema de numeração de base m e vamos demonstrar, inicialmente, que todo número natural $a\geq 1$ pode ser representado sob a forma

$$a = a_s m^s + a_{s-1} m^{s-1} + \cdots + a_1 m + a_0 \qquad (27),$$

onde $a_s, a_{s-1}, \cdots, a_1, a_0$ são algarismos m-ádicos (isto é, $0\leq a_i<m$) e $a_s \neq 0$. Diremos, então, que a igualdade (27) é o *desenvolvimento m-ádico do número natural* $a\geq 1$ ou que esta igualdade representa o número a no sistema de numeração de base m. Para simplificar a linguagem indicaremos por $P(a)$ a proposição: o número natural $a\geq 1$ admite uma representação da forma (27), onde $0\leq a_i<m$, para $i=0,1,\cdots,s$ e $a_s\neq 0$. Indiquemos por S o conjunto de todos os números naturais $a\geq 1$ tais que $P(a)$ seja verdadeira e notemos que $1\in S$, pois, basta escolher $s=0$ e $a_0=1$. Suponhamos, então, que $a>1$ e que a proposição $P(a')$ seja verdadeira para todo número natural a' tal que $1\leq a'\leq a$ e vamos demonstrar que $P(a+1)$ também é verdadeira. De acôrdo com o teorema 19, existem números inteiros q e r tais que

$$a+1 = qm+r,$$

onde $0\leq r<m$ e podemos supor $q\neq 0$, pois, para $q=0$ a proposição $P(a+1)$ é verdadeira bastando para isso escolher $s=0$ e $a_0=a+1$. Como $a+1>0$ e $0\leq r$ resulta, fàcilmente, desta igualdade $q\geq 0$, logo, $q>0$. Notemos que se $a<q$, teríamos $a+1\leq q$ e como $1<m$ resultaria $a+1<qm$, logo, $qm+r<qm$ e então $r<0$, contra a hipótese; portanto, $q\leq a$. Em resumo, temos $1\leq q\leq a$, portanto, $P(q)$ é verdadeira, isto é, q admite um desenvolvimento m-ádico

$$q = a_s m^{s-1} + \cdots + a_2 m + a_1$$

e teremos

$$a+1 = qm+r = a_s m^s + \cdots + a_1 m + r,$$

onde $0\leq r<m$, logo, $a+1$ também admite um desenvolvimento m-ádico, ou seja $P(a+1)$ é verdadeira. De acôrdo com o segundo princípio de indução finita, $P(a)$ é verdadeira para todo número natural $a\geq 1$.

Observaremos, a seguir, que da igualdade (27) resulta

$$m^s \leq a < m^{s+1} \qquad (28).$$

Com efeito, temos, notando-se que $0\leq a_i\leq m-1$ e $1\leq a_s\leq m-1$,

$$a = a_s m^s + a_{s-1} m^{s-1} + \cdots + a_1 m + a_0 \geq a_s m^s \geq m^s$$

e

$$a = a_s m^s + a_{s-1} m^{s-1} + \cdots + a_1 m + a_0 \leq$$

$$\leq (m-1)m^s + (m-1)m^{s-1} + \cdots + (m-1)m + (m-1) = m^{s+1} - 1 < m^{s+1}.$$

Podemos agora demonstrar que o desenvolvimento m-ádico (27) do número natural $a\geq 1$ é único, isto é, se

$$a = b_t m^t + b_{t-1} m^{t-1} + \cdots + b_1 m + b_0 \qquad (29)$$

também é um desenvolvimento m-ádico de a (logo, $b_t\neq 0$ e $0\leq b_i<m$ para $i=0,1,\cdots,t$), então, $s=t$ e $a_i=b_i$ para $i=0,1,\cdots,s$. Com efeito, de acôrdo com a fórmula (28), aplicada à igualdade (29), temos $m^t\leq a<m^{t+1}$. Se, por exemplo, $s<t$, teríamos $s+1\leq t$ e então $m^{s+1}\leq m^t\leq a$, logo, $m^{s+1}\leq a$ contra o fato que $a<m^{s+1}$; anàlogamente, a hipótese $t<s$ nos leva a uma contradição, portanto, $s=t$. De (27) e (29) resulta

$$(a_s-b_s)m^s + (a_{s-1}-b_{s-1})m^{s-1} + \cdots + (a_1-b_1)m + (a_0-b_0) = 0;$$

supondo-se, por absurdo, que exista um índice i $(0\leq i\leq s)$ tal que $a_i-b_i\neq 0$ e indicando-se por r o menor índice satisfazendo esta condição, temos $r<s$ e então

$$(a_s-b_s)m^{s-r} + \cdots + (a_{r+1}-b_{r+1})m + (a_r-b_r) = 0,$$

de onde resulta $m\mid(a_r-b_r)$, o que é impossível, pois, $0<|a_r-b_r|<m$. Portanto, $a_i=b_i$, para $i=0,1,\cdots,s$.

Demonstramos acima o seguinte

TEOREMA 20 - Se a e m são dois números naturais tais que $a>0$ e $m>1$, então existe um único número natural s e uma única família $(a_i)_{0\leq i\leq s}$, de números naturais, que satisfazem as seguintes condições

$$a = a_s m^s + a_{s-1} m^{s-1} + \cdots + a_1 m + a_0,$$

$$0\leq a_i<m \text{ para } i=0,1,\cdots,s$$

$$a_s\neq 0.$$

Em outros têrmos, todo número natural não nulo admite um único desenvolvimento m-ádico.

Ficam assim construídos símbolos para representar todos os números naturais; simplifica-se a notação escrevendo-se $(a_s a_{s-1}\cdots a_1 a_0)_m$ ou $(a_s a_{s-1}\cdots a_1 a_0)$ ou ainda $a_s a_{s-1}\cdots a_1 a_0$ no lugar do segundo membro de (27). O caso mais comum é o da *numeração de base* 10: escolhem-se para algarismos os números

naturais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, como foram definidos no exercício 50 do Capítulo II, e coloca-se $m = 9+1 = 10$. Obtém-se assim o sistema de numeração decimal e o teorema acima nos mostra que todo número natural $a \geq 1$ pode ser representado de modo único sob a forma

$$a = a_s \cdot 10^s + a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \qquad (30),$$

onde $a_s \neq 0$ e $a_0, a_1, \cdots, a_{s-1}, a_s$ são algarismos decimais. Por exemplo, quando se escreve 8128 estamos usando uma notação abreviada para indicar o número natural

$$8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8.$$

Para escrever êste número na base 7 procede-se do seguinte modo

$$8128 = (1161) \cdot 7 + 1$$
$$1161 = (165) \cdot 7 + 6$$
$$165 = (23) \cdot 7 + 4$$
$$23 = (3) \cdot 7 + 2$$

de onde resulta por substituições sucessivas

$$8128 = 3 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 1.$$

Na prática usa-se o seguinte dispositivo de cálculo

8128	7				
11	1161	7			
42	46	165	7		
08	41	25	23	7	
1	6	4	2	3	

e escrevem-se os restos obtidos na ordem inversa para ter a representação de $(8128)_{10}$ na base 7 (notar que o último quociente 3 é o resto da divisão de 3 por 7, divisão esta que não foi indicada): $(8128)_{10} = (32461)_7$.

EXERCÍCIOS

42. Justificar as regras usuais de soma e de produto de números naturais representados no sistema de base 10 por intermédio do desenvolvimento (30).

43. Escrever os seguintes números, representados no sistema decimal, 127, 496, 8128 e 4096 nas bases 2, 5, 6 e 8.

44. Determinar, no sistema decimal, os seguintes números $(111111000000)_2$, $(325610)_7$ e $(2ab39)_{12}$ (onde $a=10$ e $b=11$).

45. Construir as táboas de adição e de multiplicação para o sistema de base 7 e calcular

a) $(1212)_7 + (2356)_7 + (42631)_7 + (6235)_7$;

b) $(1654)_7 \cdot (2306)_7$.

2.3 - MÁXIMO DIVISOR COMUM

Se a e b são dois números inteiros então, todo inteiro c tal que $c|a$ e $c|b$ é denominado *divisor comum* de a e b; conforme a notação introduzida no §2.1, $D(a) \cap D(b)$ é o conjunto de todos os divisores comuns de a e b. Quando um dos inteiros a ou b é não nulo, por exemplo, $a \neq 0$, o conjunto $D(a)$ é finito (teorema 16), logo, $D(a) \cap D(b)$ também é finito e, portanto, existe $d = max(D(a) \cap D(b))$, número êste que passa a ser denominado *máximo divisor comum de a e b* e será indicado por $d = mdc(a,b)$. Neste caso, temos $d > 0$ e $d|a$, $d|b$; além disso, para todo divisor comum c de a e b, temos $c \leq d$. Supondo-se ainda que a e b não sejam simultâneamente nulos, é imediato que o máximo divisor comum de a e b coincide com o máximo do conjunto $D_+(a) \cap D_+(b)$, onde $D_+(a)$ (resp., $D_+(b)$) indica o conjunto de todos os divisores positivos de a (resp., b) e isto nos mostra que para determinar $d = mdc(a,b)$ basta considerar os divisores comuns e positivos de a e b.

Para determinar o máximo divisor comum de dois números inteiros a e b, não nulos simultâneamente, não é recomendável utilizar a definição acima, pois, em geral, a construção dos conjuntos $D(a)$ e $D(b)$ é bastante complicada e, além disso, não é necessário conhecer *todos* os divisores comuns de a e b para calcular seu máximo divisor comum (ver o processo das divisões sucessivas que será dado mais adiante).

TEOREMA 21 - Sejam a e b dois números inteiros não nulos simultâneamente e seja $d = mdc(a,b)$; nestas condições, existem números inteiros r e s tais que

$$d = ra + sb \qquad (31).$$

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto S de todos os inteiros estritamente positivos que são da forma $xa+yb$, com x e y inteiros; notando-se que os números $-a$, a, $-b$ e b são da forma acima e que pelo menos um dêles é estritamente positivo resulta que S é não vazio, portanto, existe $d_1 = min S > 0$. Ora, d_1 é um elemento de S, logo, existem números inteiros r e s tais que

$$d_1 = ra + cb \qquad (32)$$

e observando-se que $d|a$ e $d|b$ resulta $d|d_1$, portanto, $d \leq d_1$. Afirmamos que $d_1|a$. Com efeito, se $d_1 \nmid a$ existiriam, conforme o teorema 19, números inteiros q e t tais que $a = qd_1 + t$, onde $0 < t < d_1$; desta igualdade e de (32) viria

$$t = a - qd_1 = a - q(ra+sb) = (1-qr)a + (-qs)b$$

e como $t>0$ teríamos $t \in S$, contra o fato que $0<t<d_1 = min S$. Demonstra-se, anàlogamente, que $d_1|b$ e, portanto, d_1 é um divisor comum positivo de a e b, logo, $d_1 \leq d$ e então $d_1 = d$. ∎

TEOREMA 22 - Se a e b são dois números inteiros não nulos simultâneamente e se d é um inteiro estritamente positivo, então d é o máximo divisor comum de a e b se, as seguintes condições estão verificadas

D1: $d|a$ e $d|b$;

D2: para todo inteiro d', se $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $d = mdc(a,b)$, então, d é um divisor comum de a e b, portanto, está satisfeita a condição D1; por outro lado, se d' é um número inteiro tal que $d'|a$ e $d'|b$, a igualdade (31) nos mostra que $d'|d$, logo, a condição D2 também está satisfeita. Recìprocamente, suponhamos que as condições D1 e D2 estejam verificadas para o número inteiro $d>0$ e coloquemos $d_1 = mdc(a,b)$. A condição D1 nos mostra que d é um divisor comum de a e b, logo, $d \leq d_1$; por outro lado, temos $d_1|a$ e $d_1|b$, logo, em virtude da condição D2, teremos $|d_1|d$, de onde vem, $d_1 \leq d$ e, portanto, $d = d_1$. ∎

Notemos que o teorema acima caracteriza o máximo divisor comum de a e b sem utilizar a ordem definida sôbre $\mathbf{Z}$ e nos permitirá, então, estender o conceito de máximo divisor comum para outros tipos de anéis de integridade (Capítulo VII). Para que nossa exposição seja uniforme colocaremos, então, a seguinte

DEFINIÇÃO 9 - Diz-se que um número inteiro d é um *máximo divisor comum* de dois números inteiros a e b se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

D1: $d|a$ e $d|b$;

D2: para todo número inteiro d', se $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$.

Por exemplo, se $a = b = 0$, então $d = 0$ é o único número inteiro que satisfaz as condições D1 e D2, logo, $mdc(0,0) = 0$. Observemos que se a e b não são simultâneamente nulos e se d e d_1 são máximos divisores comuns de a e b, segundo a definição acima, então, $d|d_1$ e $d_1|d$, portanto, $d_1 = \pm d$ (ver o exercício 36); isto nos mostra que o máximo divisor comum de a e b não é determinado de modo único pela definição 9. Finalmente, notemos que o teorema 22 afirma a existência de um máximo divisor comum positivo (segundo a definição 9) de a e b; portanto, há coincidência entre duas definições no caso em que a e b não sejam simultâneamente nulos, desde que se imponha a condição $d>0$ na definição 9.

DEFINIÇÃO 10 - Diz-se que dois números inteiros a e b são *primos entre si* se, e sòmente se, $mdc(a,b) = 1$.

Por exemplo, se p é um número primo e se $p|a$ $(a \in \mathbf{Z})$, então a e p são primos entre si. Com efeito, pondo-se $d = mdc(a,p)$, temos $d>0$, $d|a$ e $d|p$; desta última relação vem $d = 1$ ou $d = |p|$ e êste segundo caso está excluído, pois, $p|a$. Portanto, $d = 1$, isto é, a e p são primos entre si.

TEOREMA 23 - Os números inteiros a e b são primos entre si, se, e sòmente se, existem números inteiros r e s tais que

$$ra + sb = 1. \tag{33}$$

DEMONSTRAÇÃO - Uma parte dêste teorema é conseqüência imediata da definição anterior e do teorema 21. Recìprocamente, se a igualdade (33) é verdadeira e se $d = mdc(a,b)$, temos $d|a$ e $d|b$, logo, $d|1$ e, portanto, $d = 1$. ∎

TEOREMA 24 - Sejam a e b dois números inteiros não nulos simultâneamente e seja $d>0$ um divisor comum de a è b. Nestas condições, $d = mdc(a,b)$ se, e sòmente se, os quocientes de a e b por d são primos entre si.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese temos $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$, onde a_1 e b_1 são, respectivamente, os quocientes de a e b por d (ver o exercício 35). Se $d = mdc(a,b)$, então existem números inteiros r e s tais que $ra+sb = d$, de onde vem, $ra_1+sb_1 = 1$, portanto, a_1 e b_1 são primos entre si. Recìprocamente, se a_1 e b_1 são primos entre si, então existem inteiros r e s tais que $ra_1+sb_1 = 1$, de onde vem, $ra+sb = d$ e daqui resulta que se $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|b$, portanto, d é o máximo divisor comum de a e b. ∎

TEOREMA 25 - Se a, b e c são números inteiros tais que $a|(bc)$ e se a e b são primos entre si, então $a|c$.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme o teorema 23 existem números inteiros r e s tais que $ra+sb = 1$, de onde vem, $r(ac)+s(bc) = c$ e como $a|(bc)$, teremos $a|c$. ∎

COROLÁRIO - Um número inteiro p, com $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$, é primo se, e sòmente se, a seguinte condição está verificada: quaisquer que sejam os números inteiros a e b, se $p|(ab)$, então $p|a$ ou $p|b$.

Com efeito, se p é primo e se $p|a$, então a e p são primos entre si e, neste caso, o teorema anterior nos garante que $p|b$. Recìprocamente, suponhamos que a condição acima seja verdadeira para o número inteiro $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$; se $p = ab$, com a e b inteiros, temos, evidentemente, $p|(ab)$ e então $p|a$ ou $p|b$, ou seja, $(ab)|a$ ou $(ab)|b$, de onde vem (corolário do teorema 15), $b|1$ ou $a|1$ e, portanto, p é primo. ∎

TEOREMA 26 - Se a, b e c são números inteiros tais que $a|c$, $b|c$ e se a e b são primos entre si, então $(ab)|c$.

DEMONSTRAÇÃO - Em virtude do teorema 23 existem números inteiros r e s tais que $ra+sb=1$, de onde vem, $r(ac)+s(bc)=c$. De $a|c$ e $b|c$ resulta $(ab)|(ac)$ e $(ab)|(ac)$, portanto, de acôrdo com a igualdade acima, temos $(ab)|c$. ∎

Veremos a seguir o processo das divisões sucessivas para a determinação do máximo divisor comum positivo de dois números inteiros não nulos a e a_1; de início notemos que basta considerar o caso em que a e a_1 são positivos, pois, $mdc(a,a_1) = mdc(|a|,|a_1|)$ (ver o exercício 46) e, além disso suporemos que $a \geq a_1$. Demonstraremos, inicialmente, o seguinte

TEOREMA 27 - Com as notações acima, se a_2 é o resto da divisão euclidiana de a por a_1, então $mdc(a,a_1) = mdc(a_1,a_2)$.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese, temos

$$a = q_1 a_1 + a_2 \qquad (34),$$

com $0 \leq a_2 > a_1$. Se $d = mdc(a,a_1)$, então $d|a$ e $d|a_1$, logo, por (34), $d|a_2$ e, portanto, está satisfeita a condição D1 da definição 10. Para todo inteiro d', se $d'|a_1$ e $d'|a_2$, então por (34), $d'|a$; logo, $d'|a$ e $d'|a_1$, de onde vem, $d'|d$, pois, $d = mdc(a,a_1)$, portanto, está satisfeita a condição D2 da definição 10. Fica assim demonstrado que d é o máximo divisor comum de a_1 e a_2. ∎

Supondo-se agora que $a_2 \neq 0$ e aplicando-se o teorema 19 aos inteiros a_1 e a_2 teremos $a_1 = q_1 a_2 + a_3$, onde $0 \leq a_3 < a_2 < a_1$; se $a_3 \neq 0$, pode-se repetir o mesmo processo para os números a_2 e a_3 e assim por diante chegaremos, certamente, a uma divisão exata e teremos, então, as seguintes relações

$$\begin{aligned}
a &= q_1 a_1 + a_2 && 0 < a_2 < a_1 \\
a_1 &= q_2 a_2 + a_3 && 0 < a_3 < a_2 \\
a_2 &= q_3 a_3 + a_4 && 0 < a_4 < a_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
a_{n-1} &= q_n a_n + a_{n+1} && 0 < a_{n+1} < a_n \\
a_n &= q_{n+1} a_{n+1}
\end{aligned} \qquad (35).$$

Nestas condições, o teorema anterior nos mostra que

$$mdc(a,a_1) = mdc(a_1,a_2) =$$

$$= mdc(a_2,a_3) = \cdots = mdc(a_{n-1},a_n) = mdc(a_n,a_{n+1}) = a_{n+1}.$$

É usual dispor os cálculos dados por (35) do seguinte modo

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$		q_n	q_{n+1}
a	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}
a_2	a_3	a_4		$\cdots$	a_{n+1}	0	

Obtém-se assim um processo prático para determinar o máximo divisor comum positivo de dois inteiros estritamente positivos a e a_1, chamado *processo das divisões sucessivas.*

EXEMPLO 1 - Determinar o máximo divisor comum positivo dos números inteiros 12740 e 7260. Temos, conforme o processo das divisões sucessivas

	1	1	3	12	1	2	2
12740	7260	5480	1780	140	100	40	20
5480	1780	140	100	40	20	0	

portanto, $mdc(12740,7260) = 20$.

As igualdades (35) também nos dão um processo para determinar inteiros r e s tais que $ra+sa_1 = mdc(a,a_1) = a_{n+1}$, Com efeito, da primeira igualdade (35) vem $a_2 = a + (-q_1)a_1$, isto é, a_2 é uma «combinação linear com coeficientes inteiros de a e a_1»; anàlogamente, temos $a_3 = a_1 + (-q_2)a_2 = (-q_2)a + (1+q_1q_2)a_1$, isto é, a_3 também é combinação linear de a e a_1. Repetindo-se êste processo chegaremos a uma relação da forma $a_{n+1} = ra + sa_1$, com r e s inteiros.

EXEMPLO 2 - Determinar dois inteiros r e s tais que $r \cdot 12740 + s \cdot 7260 = mdc(12740,7260) = 20$.

De acôrdo com os cálculos feitos no exemplo 1, temos

$$20 = \underline{100} - 2\times\underline{40}$$
$$\underline{40} = \underline{140} - \underline{100}$$
$$\underline{100} = \underline{1780} - 12\times\underline{140}$$
$$\underline{140} = \underline{5480} - 3\times\underline{1780}$$
$$\underline{1780} = \underline{7260} - \underline{5480}$$
$$\underline{5480} = \underline{12740} - \underline{7260},$$

logo,

$$\underline{20} = \underline{100} - 2\times\underline{40} = \underline{100} - 2(\underline{140} - \underline{100}) = 3\times\underline{100} - 2\times\underline{140} =$$
$$= 3(\underline{1780} - 12\times\underline{140}) - 2\times\underline{140} = 3\times\underline{1780} - 38\times\underline{140} = 3\times\underline{1780} -$$
$$-38(\underline{5480} - 3\times\underline{1780}) = 117\times\underline{1780} - 38\times\underline{5480} = 117(\underline{7260} - \underline{5480}) -$$
$$-38\times\underline{5480} = 117\times\underline{7260} - 155\times\underline{5480} = 117\times\underline{7260} - 155(\underline{12740} - \underline{7260}) =$$
$$= (-155)\times 12740 + 272\times 7260,$$

portanto, $r = -155$ e $s = 272$.

Resolveremos, a título de aplicação dos resultados obtidos nesta secção, o seguinte problema: dados três números inteiros a, b e c, determinar todos os pares ordenados $(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ tais que $ax+by=c$ (36).

Êste problema é conhecido sob o nome de *equação diofantina* (*) *do primeiro grau a duas incógnitas* x e y. Indicaremos por A o conjunto de todos os pares ordenados $(x_0,y_0)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ tais que $ax_0+by_0=c$; todo elemento de A é chamado *solução inteira* da equação diofantina (36) e A é denominado *conjunto-solução* de (36). No que se segue suporemos sempre que a e b não sejam simultâneamente nulos, pois, se $a=b=0$ o problema acima tem solução se, e sòmente se, $c=0$ e, neste caso, $A=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Daremos, inicialmente, uma condição para que o conjunto-solução A seja não vazio:

TEOREMA 28 - O conjunto-solução A da equação diofantina (36) é não vazio se, e sòmente se, $d=mdc(a,b)$ é um divisor de c.

DEMONSTRAÇÃO - Se $A\neq\emptyset$, existe um par ordenado $(x_0,y_0)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ tal que $ax_0+by_0=c$ e desta igualdade concluímos que d é um divisor de c, pois, $d|a$ e $d|b$. Recìprocamente, se $d|c$ temos $c=c_1d$, com c_1 inteiro; de acôrdo com o teorema 21 existem números inteiros r e s tais que $ar+bs=d$, de onde vem $a(rc_1)+b(sc_1)=c_1d=c$, portanto, $(rc_1,sc_1)\in A$. ∎

COROLÁRIO - Se a e b são primos entre si e se c é um inteiro qualquer, então, o conjunto-solução da equação diofantina $ax+by=c$ é não vazio.

(*) - Ver a Nota 4 dada no fim dêste Capítulo.

Suponhamos agora que a equação diofantina (36) tenha solução, logo, $d=mdc(a,b)$ é um divisor de c; pondo-se $a=a_1d$, $b=b_1d$ e $c=c_1d$, é imediato que o conjunto-solução de (36) coincide com o conjunto-solução da equação diofantina $a_1x+b_1y=c_1$, onde a_1 e b_1 são primos entre si (teorema 24). Portanto, basta limitar nossas considerações ao caso em que a e b são primos entre si.

Se (x_0,y_0) é uma solução inteira de (36), onde $mdc(a,b)=1$, então, todo par ordenado (x_0+bt,y_0-at), com $t\in\mathbf{Z}$, também é uma solução da mesma equação. Com efeito, temos

$$a(x_0+bt)+b(y_0-at)=ax_0+by_0=c.$$

Recìprocamente, se (x_0,y_0) e (x_1,y_1) são soluções inteiras da equação (35), onde $mdc(a,b)=1$ e $a\neq 0$, então existe um número inteiro t tal que $x_1=x_0+bt$ e $y_1=y_0-at$. Com efeito, por hipótese, temos

$$ax_0+by_0=c \quad\text{e}\quad ax_1+by_1=c,$$

de onde vem,

$$a(x_1-x_0)=b(y_0-y_1) \qquad (37)$$

e daqui concluímos, em virtude do teorema 25, que $a|(y_0-y_1)$, logo, $y_0-y_1=at$, com $t\in\mathbf{Z}$ e então $y_1=y_0-at$. A iguldade (37) pode agora ser posta sob a forma $a(x_1-x_0)=abt$ e como $a\neq 0$, teremos $x_1-x_0=bt$ ou $x_1=x_0+bt$. Isto completa a verificação da afirmação feita acima; notemos que chegaríamos ao mesmo resultado se tivéssemos suposto $b\neq 0$ em lugar de $a\neq 0$. Demonstrámos assim o seguinte

TEOREMA 29 - Se (x_0,y_0) é uma solução inteira da equação diofantina $ax+by=c$, com $mdc(a,b)=1$, então $(x_1,y_1)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ é uma solução da mesma equação se, e sòmente se, existe um número inteiro t tal que

$$x_1=x_0+bt \quad\text{e}\quad y_1=y_0-at.$$

O teorema acima determina o conjunto-solução da equação diofantina $ax+by=c$, no caso em que $mdc(a,b)=1$, a partir de uma solução particular (x_0,y_0) da mesma equação.

EXEMPLO 3 - Determinar tôdas as soluções inteiras da equação diofantina $143x+17y=132$ (38).

Determinamos, inicialmente, o máximo divisor comum de 143 e 17 pelo processo das divisões sucessivas

	8	2	2
143	17	7	3
7	3	1	

portanto, $1 = mdc(143,17)$ e o corolário do teorema 28 nos mostra que a equação (38) tem solução. Conforme o teorema 29 basta determinar uma solução particular de (38), o que faremos pelo processo indicado no exemplo 2. Temos

$$7 = \underline{143} - 8\times\underline{17}$$
$$3 = \underline{17} - 2\times\underline{7}$$
$$1 = \underline{7} - 2\times\underline{3},$$

de onde vem,

$$1 = \underline{7} - 2\times\underline{3} = \underline{7} - 2(\underline{17} - 2\times\underline{7}) = 5\times\underline{7} - 2\times\underline{17} =$$
$$= 5(\underline{143} - 8\times\underline{17}) - 2\times\underline{17} = 5\times\underline{143} - 42\times\underline{17},$$

logo,

$$143(5\times 132) + 17(-42\times 132) = 132,$$

portanto, o par ordenado (663,-5554) é uma solução inteira de (37). Qualquer outra solução inteira (x,y) de (37) é da forma $x = 660 + 17t$ e $y = -5554 - 143t$, onde t é um inteiro arbitrário.

Exemplo 4 - Resolver a equação diofantina

$$12740x + 7260y = 136.$$

De acôrdo com o que vimos no exemplo 1, temos $mdc(12740,7260) = 20$ e como $20 \nmid 136$ concluímos que esta equação não tem solução.

Exemplo 5 - Resolver a equação diofantina

$$12740x + 7260y = 60 \qquad (39).$$

Já sabemos que $mdc(12740,7260) = 20$ e como $20 \mid 60$ resulta que esta equação tem solução. Para determinar tôdas as soluções de (39) basta considerar a equação diofantina

$$637x + 363y = 3 \qquad (40),$$

onde agora os coeficientes 637 e 363 são primos entre si. Temos

	1	1	3	12	1	2
637	363	274	89	7	5	2
274	89	7	5	2	1	

logo,

$$\underline{274} = \underline{637} - \underline{363}$$
$$\underline{89} = \underline{363} - \underline{274}$$
$$\underline{7} = \underline{274} - 3\times\underline{89}$$
$$\underline{5} = \underline{89} - 12\times\underline{7}$$
$$\underline{2} = \underline{7} - \underline{5}$$
$$\underline{1} = \underline{5} - 2\times\underline{2},$$

de onde vem,

$$1 = \underline{5} - 2\times\underline{2} = \underline{5} - 2(\underline{7} - \underline{5}) = 3\times\underline{5} - 2\times\underline{7} = 3(\underline{89} - 12\times\underline{7}) - 2\times\underline{7} =$$
$$= 3\times\underline{89} - 38\times\underline{7} = 3\times\underline{89} - 38(\underline{274} - 3\times\underline{89}) = 117\times\underline{89} - 38\times\underline{274} =$$
$$= 117(\underline{363} - \underline{274}) - 38\times\underline{274} = 117\times\underline{363} - 155\times\underline{274} =$$
$$= 117\times\underline{363} - 155(\underline{637} - \underline{363}) = (-155)\times\underline{637} + 272\times\underline{363},$$

portanto,

$$637(-465) + 363(816) = 3,$$

ou seja, (-465,816) é uma solução inteira da equação (40). Daqui resulta, conforme o teorema 29, que tôdas as soluções inteiras (x,y), de (40), são dadas por

$$x = -465 + 363t \quad \text{e} \quad y = 816 - 637t,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

Exemplo 6 - Determinar o menor inteiro positivo que tem para restos 1 e 8 quando dividido, respectivamente, por 1000 e 761.

Se N é o número procurado, devemos ter $N = 1000x + 1$ e $N = 761y + 8$, logo, $1000x + (-761)y = 7$.

Segundo os cálculos feitos abaixo os números 1000 e -761 são primos entre si, portanto, esta equação tem solução inteira. Temos

	-1	-4	1	4	2	3	6
1000	-761	239	195	44	19	6	1
239	195	44	19	6	1	0	

logo,

$$1 = \underline{19} - 3\times\underline{6}$$
$$\underline{6} = \underline{44} - 2\times\underline{19}$$
$$\underline{19} = \underline{195} - 4\times\underline{44}$$
$$\underline{44} = \underline{239} - \underline{195}$$
$$\underline{195} = -\underline{761} + 4\times\underline{239},$$
$$\underline{239} = \underline{1000} + (-\underline{761}),$$

de onde vem,

$$1 = \underline{19} - 3\times\underline{6} = \underline{19} - 3(\underline{44} - 2\times\underline{19}) = 7\times\underline{19} - 3\times\underline{44} =$$
$$= 7(\underline{195} - 4\times\underline{44}) - 3\times\underline{44} - 7\times\underline{195} - 31\times\underline{44} =$$
$$= 7\times\underline{195} - 31(\underline{239} - \underline{195}) = 38\times\underline{195} - 31\times\underline{239} =$$
$$= 38(-\underline{761} + 4\times\underline{239}) - 31\times\underline{239} = 121(\underline{1000} + (-\underline{761})) + 38(-\underline{761}) =$$
$$= 121\times\underline{1000} + 159(-\underline{761});$$

portanto, o par ordenado (847,1113) é uma solução da equação acima. A solução geral é dada por

$$x = 847 + 761t \quad \text{e} \quad y = 1113 + 847t,$$

onde t é um inteiro arbitrário, logo,

$$N = 1000x + 1 = 847001 + 761000t$$

e como estamos determinando o menor inteiro positivo N que satisfaz as condições do problema devemos escolher $t=-1$ e teremos $N=86001$.

EXERCÍCIOS

46. Mostrar que $mdc(a,b)=mdc(|a|,|b|)$, quaisquer que sejam os números inteiros a e b.

47. Mostrar que $mdc(ac,bc)=|c|mdc(a,b)$, quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c.

48. Mostrar que a operação de máximo divisor comum $(a,b)\mapsto mdc(a,b)$ definida sôbre $\boldsymbol{N}$ é associativa, comutativa e tem elemento neutro. Estabelecer resultados análogos para a operação $(a,b)\mapsto mdc(a,b)$ definida sôbre $\boldsymbol{Z}$.

49. Se $a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(n\geqslant 1)$ são números inteiros e se p é um número primo tal que $p|(a_1a_2\cdots a_n)$, então existe um índice i, com $1\leqslant i\leqslant n$, tal que $p|a_i$.

50. Se os números primos p e q são fatôres de um número inteiro a e se $|p|\neq|q|$, então pq também é fator de a.

51. Determinar o máximo divisor comum positivo d dos inteiros a e b nos seguintes casos:

1) $a=252$ e $b=1325$;
2) $a=221$ e $b=195$;
3) $a=4148$ e $b=7684$;
4) $a=-7293$ e $b=3640$;
5) $a=76084$ e $b=-63020$.

Nos casos 3), 4) e 5) determinar os números inteiros r e s tais que $ra+sb=d$.

52. Determinar as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas

1) $31x+7y=2$;
2) $7x+19y=1921$;
3) $91x-221y=1053$;
4) $7469x+2387y=308$;
5) $7293x-364y=4732$.

53. Determinar (caso existam) as soluções inteiras positivas (x,y) (isto é, $x\geqslant 0$ e $y\geqslant 0$) das equações diofantinas do exercício anterior.

54. Determinar as soluções inteiras (x,y) das equações diofantinas 2) e 4) do exercício 50, de modo que a soma $x+y$ seja positiva e mínima.

55. Exprimir o número 100 como soma de 2 inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo por 11. (Euler)

56. Determinar duas frações positivas que tenham 13 e 17 para denominadores e cuja soma seja igual a $\frac{305}{221}$.

57. Determinar o menor inteiro positivo que tem para restos 16 e 27 quando dividido, respectivamente, por 39 e 56.

58. Determinar todos os números inteiros positivos a e b tais que $a\leqslant 20$, $b\leqslant 20$ e $mdc(a,b)=1$.

59. Demonstrar que se a, b e c são números inteiros tais que $a|b$ e $mdc(b,c)=1$, então $mdc(a,c)=1$.

60. Se x e y são números inteiros tais que $2x+3y$ seja um múltiplo de 17, então $9x+5y$ também é um múltiplo de 17.

2.4 - MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Para todo inteiro a indicaremos por $M(a)$ (resp., $M_+(a)$) o conjunto de todos os números inteiros (resp., inteiros positivos) que são múltiplos de a. Por exemplo, temos $M(0)=\{0\}$ e $M(-1)=M(1)=\boldsymbol{Z}$. Se a e b são dois números inteiros, então todo elemento c de $M(a)\cap M(b)$ satisfaz as condições $a|c$ e $b|c$; diz-se, neste caso, que c é um *múltiplo comum de a e b*. O conjunto $M_+(a)\cap M_+(b)$ é não vazio e minorado, portanto, existe o mínimo dêste conjunto, que passa a ser denominado *mínimo múltiplo comum de a e b* e será indicado por $mmc(a,b)$; é imediato que se c é um múltiplo comum de a e b, então $m\leqslant|c|$.

TEOREMA 30 - Quaisquer que sejam os números inteiros a e b, tem-se $mdc(a,b)\cdot mmc(a,b)=|ab|$.

DEMONSTRAÇÃO - É evidente que basta verificar a igualdade acima para $a>0$ e $b>0$ e neste caso precisamos demonstrar que $dm=ab$, onde $d=mdc(a,b)$ e $m=mmc(a,b)$. Notemos que o produto ab é múltiplo de d, logo, $ab=dm_1$, onde m_1 é um inteiro positivo. Pondo-se $a=a_1d$ e $b=b_1d$ teremos $a_1b_1d=m_1$, ou seja $ab_1=m_1=a_1b$, de onde resulta que m_1 é um múltiplo comum de a e b; portanto, $m\leqslant m_1$. Por outro lado, temos $m=m'd$ e como $a|m$ e $b|m$ teremos $(a_1d)|(m'd)$ e $(b_1d)|(m'd)$, logo, $a_1|m'$ e $b_1|m'$, de onde vem pelo teorema 26, $(a_1b_1)|m'$ e então $(a_1b_1d)|(m'd)$, ou seja, $m_1|m$ e, portanto, $m_1\leqslant m$. Fica assim demonstrado que $m_1=m$ e, portanto, $ab=dm$. ∎

COROLÁRIO - Se a e b são números inteiros positivos e primos entre si, então $mmc(a,b)=ab$.

TEOREMA 31 - Um número inteiro positivo m é o mínimo múltiplo comum de dois números inteiros a e b se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

M1: $a|m$ e $b|m$;

M2: para todo número inteiro m', se $a|m'$ e se $b|m'$, então $m|m'$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $m = mmc(a,b)$ e mostremos que as condições M1 e M2 são verdadeiras.

M1. É imediata, pois, m é múltiplo comum de a e b.

M2. Se $m = 0$ temos, necessàriamente, $a = 0$ ou $b = 0$ e neste caso m' também é nulo, logo, $m' | m$. Portanto, podemos supor que $m > 0$. Consideremos, então, um número inteiro m' tal que $a | m'$ e $b | m'$; de acôrdo com o algoritmo da divisão, temos $m' = qm + r$, onde $0 \leq r < m$ e daqui resulta que r é múltiplo comum de a e b, portanto, temos $r = 0$ e então $m | m'$.

Recìprocamente, suponhamos que sejam válidas as condições M1 e M2 e indiquemos por m_1 o mínimo múltiplo comum de a e b. Temos $a | m_1$ e $b | m_1$, logo, por M2, $m | m_1$ e como m e m_1 são positivos, teremos $m \leq m_1$, de onde resulta que $m = m_1$, pois, m é múltiplo comum de a e b e $m_1 = mmc(a,b)$. ∎

Notemos que o teorema acima caracteriza o mínimo múltiplo comum de a e b sem utilizar a ordem definida sôbre $\boldsymbol{Z}$ e nos permitirá, então, estender o conceito de mínimo múltiplo comum para outros tipos de anéis de integridade (ver o Capítulo VII). Para que nossa exposição seja uniforme colocaremos, então, a seguinte

DEFINIÇÃO 11 - Diz-se que um número natural m é um *mínimo múltiplo comum* de dois números inteiros a e b se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

M1: $a | m$ e $b | m$;

M2: para todo número inteiro m', se $a | m'$ e se $b | m'$, então $m | m'$.

Observemos que se $a = 0$ ou $b = 0$, então $m = 0$ é o único número que satisfaz as condições acima. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e se m e m_1 são mínimos múltiplos comuns de a e b, segundo a definição acima, então $m | m_1$ e $m_1 | m$, logo, $m_1 = \pm m$ (exercício 36); isto nos mostra que se impuzermos, na definição 11, a condição $m \geq 0$, então o único número inteiro m que satisfaz as condições M1 e M2 é o mínimo múltiplo comum de a e b como foi definido no início desta secção.

EXEMPLO 7 - Determinar o mínimo múltiplo comum positivo dos números inteiros 486 e 288. Temos

	1	1	2	5
486	288	198	90	18
198	90	18	0	

logo, $mdc(486,288) = 18$ e pela aplicação do teorema 30, temos $18m = 486 \times 288$, logo, $m = 7488$.

EXERCÍCIOS

61. Mostrar que $mmc(a,b) = mmc(|a|,|b|)$, quaisquer que sejam os números inteiros a e b:

62. Mostrar que a operação de mínimo múltiplo comum $(a,b) \mapsto mmc(a,b)$, definida sôbre $\boldsymbol{N}$, é associativa, comutativa e tem elemento neutro. Estabelecer resultados análogos para a operação $(a,b) \mapsto mmc(a,b)$ definidas sôbre $\boldsymbol{Z}$.

63. Verificar que $mmc(ac,bc) = |c| mmc(a,b)$, quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c.

64. Determinar $mmc(a,b)$, onde a e b são os inteiros considerados nas partes 1), 2) e 4) do exercício 51.

65. Determinar todos os inteiros positivos x e y tais que $mmc(x,y) = 18$ e $mmc(x,y) = 72$.

2.5 - TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

O teorema 17 nos mostra que todo número inteiro $n \neq 0$ e $n \neq \pm 1$ é igual a um produto de números primos

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s \qquad (41);$$

diz-se, então, que n *está decomposto num produto de fatôres primos*, ou, (41) *é uma decomposição de* n *em fatôres primos*. Se $s > 1$ podemos obter outras decomposições em fatôres primos do número n do seguinte modo: 1.º) mudando-se um número par de fatôres primos pelos seus opostos; 2.º) alterando-se a ordem dos fatôres primos $p_1, p_2, \cdots, p_s$ em (41). Por exemplo, se $n = 30$, temos $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, que é uma decomposição de 30 num produto de fatôres primos; a partir desta decomposição obtemos as seguintes $30 = (-2)(-3)5 = (-2)3(-5) = 2(-3)(-5)$ e depois podemos alterar em cada uma destas decomposições a ordem dos fatôres primos; dêste modo, o número 30 pode ser decomposto de 24 modos diferentes como um produto de números primos. O teorema fundamental da Aritmética nos mostra, em resumo, que dada uma decomposição de n num produto de fatôres primos, então, tôdas as outras decomposições de n serão determinadas pelo caso 1.º ou pelo caso 2.º. Incluiremos no enunciado dêste teorema a parte de existência e que já foi vista no teorema 17. Precisamente, temos

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA - Todo número inteiro n, com $n \neq 0$ e $n \neq \pm 1$, é igual a um produto de números primos; além disso, se $n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t$ são duas decomposições de n, como produtos de fatôres primos, então $s = t$ e usando-se uma notação conveniente temos $p_i = \pm q_i$, para $i = 1, 2, \cdots, s$.

DEMONSTRAÇÃO - Só falta demonstrar a segunda parte do teorema acima, o que faremos por indução finita sôbre s. Se $s = 1$, temos $p_1 = q_1 q_2 \cdots q_t$ e como p_1 é primo teremos necessàriamente $t = 1$ e então $p_1 = q_1$. Suponhamos que $s > 1$ e que a segunda parte do teorema acima seja verdadeira para $s-1$. De

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t$$

resulta que p_1 é um divisor do produto $q_1 q_2 \cdots q_t$, portanto p_1 é um divisor de um dos fatôres q_j (ver o exercício 49); usando-se uma notação conveniente podemos supor que $p_1 | q_2$, logo, $p_1 = \pm q_1$, pois, p_1 e q_1 são números primos. Consideremos, então, o número inteiro $n' = n/p_1$; temos $n' \neq 0$ e $n' \neq \pm 1$ e

$$n' = p_2 p_3 \cdots p_s = (\pm q_2) q_3 \cdots q_t,$$

portanto, de acôrdo com a hipótese de indução, teremos $s-1 = t-1$, logo, $s = t$, e, usando-se uma notação conveniente,

$$p_2 = \pm q_2, \quad p_3 = \pm q_3, \quad \cdots, \quad p_s = \pm q_s.$$

Em resumo, demonstramos que $s = t$ e $p_i = \pm q_i$, para $i = 1, 2, \cdots, s$, ou seja, a segunda parte do teorema fundamental da Aritmética é verdadeira. ∎

Daremos, a seguir, uma outra demonstração, devida a Zermelo (1871-1956), da segunda parte do teorema fundamental da Aritmética, demonstração esta que não utiliza os resultados estabelecidos sôbre máximo divisor comum e números primos entre si.

O corolário 1 do teorema 17 nos mostra que todo número inteiro $n > 1$ é igual a um produto de números primos positivos: $n = p_1 p_2 \cdots p_s$; se $n = q_1 q_2 \cdots q_t$ é uma outra decomposição de n em fatôres primos, diremos que a primeira decomposição é distinta da segunda se, e sòmente se, existe um fator p_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ tal que $p_i \neq q_j$, para $j = 1, 2, \cdots, t$. Consideremos, então, o conjunto S de todos os números inteiros n tais que: $n > 1$ e n admite decomposições distintas como produtos de fatôres primos (positivos). A segunda parte do teorema fundamental da Aritmética estará demonstrada se provarmos que S é

vazio. Suponhamos, por absurdo, que S não seja vazio; de acôrdo com o princípio do menor inteiro, S tem um mínimo n. Temos $n > 1$ e n admite pelo menos duas decomposições distintas em fatôres primos positivos

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

logo, existe um p_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ tal que $p_i \neq q_j$, para $j = 1, 2, \cdots, t$, onde podemos escolher a notação de modo que

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_s \quad \text{e} \quad q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_t.$$

É imediato que $s > 1$ e $t > 1$ e vamos mostrar que $p_1 \neq q_1$. Com efeito, se $p_1 = q_1$, o número inteiro

$$n' = p_2 p_3 \cdots p_s = q_2 q_3 \cdots q_t$$

é estritamente maior do que 1 e admite duas decomposições distintas como produto de fatôres primos positivos, logo, $n' \in S$; isto é absurdo, pois, $n' < n$ e $n = min S$. Suponhamos que $p_1 < q_1$ (se $q_1 < p_1$ a demonstração é completamente análoga a que desenvolveremos abaixo). Consideremos, então, o número inteiro

$$m = n - (p_1 q_2 \cdots q_t);$$

temos

$$m = (q_1 - p_1) q_2 \cdots q_t \tag{42}$$

e

$$m = p_1 (p_2 \cdots p_s - q_2 \cdots q_t) \tag{43}.$$

Da igualdade (42) concluímos que $0 < m < n$, pois, $1 < q_1 - p_1 < q_1$, logo, $m \notin S$. Portanto, m não admite decomposições distintas como produtos de fatôres primos positivos; ora, conforme (43), p_1 é um fator primo positivo de m, logo, p_1 também comparece na decomposição do segundo membro de (42) e como $p_1 < q_j$, para $j = 2, \cdots, t$, concluímos que $p_1 | (q_1 - p_1)$, de onde vem, $p_1 | q_1$ e chegamos assim a uma contradição, pois, q_1 é primo e $1 < p_1 < q_1$. Portanto, o conjunto S é vazio e com isto fica terminada a demonstração.

COROLÁRIO - Todo número inteiro, estritamente maior do que 1, pode ser representado de modo único (a menos da ordem dos fatôres) como um produto de números primos positivos.

Seja a um número inteiro; se $a > 1$, existem números positivos $q_1, q_2, \cdots, q_t$ $(t \geqslant 1)$ tais que $a = q_1 q_2 \cdots q_t$ e nesta decomposição os fatôres primos não são, necessàriamente, distintos dois a dois. Indiquemos por s o número de elementos do conjunto $\{q_1, q_2, \cdots, q_t\}$ e representemos êste conjunto por $\{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$,

onde cada p_i é um número primo positivo e $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\cdots,s)$. Com estas notações, temos

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \qquad (44),$$

onde $\alpha_i \geqslant 1$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = t$. Se

$$a = p_1'^{\alpha_1'} p_2'^{\alpha_1'} \cdots p_r'^{\alpha_r'}$$

é uma decomposição do mesmo número a, onde cada p_i' é um número primo positivo, cada α_i' é um número inteiro $\geqslant 1$ e $p_i' \neq p_j'$ se $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\cdots,r)$, então, o teorema fundamental da Aritmética nos mostra que $s = r$, $p_i' = p_i$ para $i = 1,2,\cdots,s$ (usando-se uma notação conveniente) e $\alpha_i = \alpha_i'$ para $i = 1,2,\cdots,s$.

Seja b um outro inteiro, com $b > 1$; usando-se uma notação conveniente (tanto para a como para b) podemos escrever

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s} \qquad (45),$$

onde temos, em (44) e em (45), $\alpha_i \geqslant 0$ e $\beta_i \geqslant 0$, para $i = 1,2,\cdots,s$. De (44) e (45) resulta, imediatamente, que $b \mid a$ se, e sòmente se, $\alpha_i \leqslant \beta_i$, para, $i = 1,2,\cdots,s$.

Pondo-se $\delta_i = min\{\alpha_i, \beta_i\}$, para $i = 1,2,\cdots,s$, é fácil verificar que o número inteiro

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_s^{\delta_s}$$

é o máximo divisor comum positivo de a e b. anàlogamente, se $\mu_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}$, para $i = 1,2,\cdots,s$, o número inteiro

$$m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_s^{\mu_s}$$

é o mínimo múltiplo comum positivo de a e b. Obtivemos assim as regras usuais para a determinação do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum de a e b, a partir das decomposições dêstes inteiros em fatôres primos positivos.

EXERCÍCIOS

66. Determinar a decomposição em fatôres primos positivos dos seguintes números inteiros: 360, 8128, 15625 e 33550336.

67. Determinar todos os fatôres positivos do número $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ onde $p_1, p_2, \cdots, p_s$ são números primos positivos, distintos dois a dois, e $\alpha_i \geqslant 1$ para $i = 1,2,\cdots,s$.

68. Demonstrar que se a e b são números positivos e primos entre si e se $ab = n^2$, onde $n > 1$, então a e b são quadrados de números inteiros.

2.6 - CONGRUÊNCIAS

DEFINIÇÃO 12 - Sejam a, b e m três números inteiros; diz-se que a *é congruente a* b *módulo* m se, e sòmente se, m é um divisor da diferença $a-b$.

Usaremos a notação $a \equiv b \pmod{m}$ para indicar que a é congruente a b, módulo m; a notação $a \not\equiv b \pmod{m}$ significa que a não é congruente a b módulo m.

EXEMPLO 8 - Temos $16 \not\equiv -4 \pmod{10}$, pois, $16-(-4) = 20$ é um múltiplo de 10; por outro lado, $16 \equiv 1 \pmod{10}$, pois, $16-1 = 15$ não é um múltiplo de 10.

EXEMPLO 9 - Observemos que $a \equiv b \pmod{0}$ se, e sòmente se, $a = b$; por causa disto costuma-se excluir o caso em que o módulo m é nulo.

EXEMPLO 10 - Notemos que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e sòmente se, $a \equiv b \pmod{-m}$; por causa disto costuma-se considerar sòmente o caso em que o módulo m é positivo e, portanto, $m > 0$ (exemplo anterior).

A relação «a é congruente a b módulo m», que está sendo indicada por $a \equiv b \pmod{m}$ é denominada *congruência módulo* m *sôbre* $\mathbf{Z}$ ou, simplesmente, *congruência* quando o módulo m está fixado.

TEOREMA 32 - A congruência módulo m, sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros, é uma relação de equivalência que é compatível com a adição e com a multiplicação.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar as condições E1, E2 e E3 da definição de relação de equivalência (ver a definição 6 do §2.3 do Capítulo I) e as condições CA e CM que serão enunciadas abaixo.

E1: Para todo número inteiro a, temos $a \equiv a \pmod{m}$, pois, $a - a = 0 \cdot m$.

E2: Sejam a e b dois números inteiros quaisquer e suponhamos que $a \equiv b \pmod{m}$, logo, existe $q \in \mathbf{Z}$ tal que $a - b = qm$; daqui resulta $b - a = (-q)m$, portanto, $b \equiv a \pmod{m}$.

E3: Sejam a, b e c três inteiros quaisquer e suponhamos que $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, logo, existem inteiros q_1 e q_2 tais que $a - b = q_1 m$, e $b - c = q_2 m$, de onde vem,

$$a - c = (a-b) - (b-c) = (q_1 - q_2)m;$$

portanto, $a \equiv c \pmod{m}$,

CA: Quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c, se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a+c \equiv b+c \pmod{m}$. Com efeito, por hipótese, existe um número inteiro q tal que $a-b=qm$ e então $(a+c)-(b+c)=a-b=qm$; portanto, $a+c \equiv b+c \pmod{m}$.

CM: Quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c, se $a \equiv b \pmod{m}$, então $ac \equiv bc \pmod{m}$. Com efeito, por hipótese, existe um inteiro q tal que $a-b=qm$ e então $ac-bc=(a-b)c=(qm)c=(qc)m$; portanto, $ac \equiv bc \pmod{m}$.

COROLÁRIO 1 - Se a, b e c são números inteiros quaisquer e se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ e $ac \equiv bd \pmod{m}$ (princípios da soma e do produto de congruências módulo m).

É uma conseqüência imediata de CA, CM e E3. Por indução finita sôbre o número natural n pode-se demonstrar, a partir do corolário anterior, o seguinte

COROLÁRIO 2 - Se $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ e $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ são duas famílias quaisquer de números inteiros e se $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ para $i=1,2,\cdots,n$, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \pmod{m} \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}.$$

Em particular, tem-se o

COROLÁRIO 3 - Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, para todo número natural n.

No que se segue suporemos, sem perda de generalidade (em virtude dos exemplos 9 e 10), que o módulo m seja estritamente positivo.

TEOREMA 33 - Dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se, e sòmente se, a e b têm o mesmo resto quando divididos por m.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $a \equiv b \pmod{m}$, logo, $a-b=qm$ com $q \in \mathbf{Z}$, e seja r o resto da divisão euclidiana de b por m, logo, $b=q'm+r$, onde $0 \leq r < m$; neste caso, temos $a=qm+b=(q+q')m+r$, portanto, conforme o teorema 19, r é o resto da divisão euclidiana de a por m. Reciprocamente, de $a=q_1m+r$, e $b=q_2m+r$, onde $0 \leq r < m$, resulta $a-b=(q_1-q_2)m$, logo, $a \equiv b \pmod{m}$. ∎

COROLÁRIO - Todo inteiro a é congruente módulo m a um e sòmente um dos inteiros $0,1,2,\cdots,m-1$.

Com efeito, basta observar que $i \equiv j \pmod{m}$, para $i,j=0,1,\cdots,m-1$ e $i \neq j$ e que $a \equiv r \pmod{m}$, onde r é o resto da divisão euclidiana de a por m. ∎

EXEMPLO 11 - Determinar o resto da divisão de 37^{13} por 17.

Temos $37 \equiv 3 \pmod{17}$, $37^2 \equiv 9 \pmod{17}$, $37^4 \equiv 81 \equiv 13 \pmod{17}$ e $37^8 \equiv 169 \equiv 16 \pmod{17}$, logo,

$$37^{13} \equiv 3 \cdot 13 \cdot 16 \equiv 5 \cdot 16 \equiv 80 \equiv 12 \pmod{17};$$

portanto, o resto da divisão de 37^{13} por 17 é igual a 12.

EXEMPLO 12 - Mostrar que o número Fermat $F_5=2^{(2^5)}+1$ é divisível por 641. (Euler)

Com efeito, temos $2^2=4$, $2^4=16$, $2^8=256$, $2^{16}=65536 \equiv 154 \pmod{641}$, $2^{32} \equiv 154^2 \equiv 23716 \equiv 640 \pmod{641}$, logo, $2^{32}+1 \equiv 641 \equiv 0 \pmod{641}$, isto é, $641 \mid F_5$.

EXEMPLO 13 - Mostrar que o número de Mersenne $M_{83}=2^{83}-1$ é divisível por 167.

Temos $2^2=4$, $2^4=16$, $2^8=256 \equiv 89 \pmod{167}$, $2^{16} \equiv 7921 \equiv 72 \pmod{167}$, $2^{32} \equiv 5184 \equiv 7 \pmod{167}$, $2^{64} \equiv 49 \pmod{167}$, logo, $2^{83}=2^{64} \cdot 2^{16} \cdot 2^3 \equiv 49 \cdot 72 \cdot 8 \equiv 21 \cdot 8 \equiv 168 \equiv 1 \pmod{167}$, de onde vem $167 \mid M_{83}$.

Para todo número inteiro a, colocaremos

$$\bar{a}=\{x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv a \pmod{m}\},$$

logo, $\bar{a}$ é a classe de equivalência determinada por a segundo a relação de congruência módulo m; diremos, neste caso, que *$\bar{a}$ é a classe equivalência módulo m determinada pelo inteiro a*, ou, que *$\bar{a}$ é a classe de restos módulo m determinada pelo inteiro a*. O conjunto quociente de $\mathbf{Z}$ pela relação de congruência módulo m será indicado por $\mathbf{Z}_m$; portanto, $\mathbf{Z}_m$ é o conjunto de tôdas as classes de equivalência módulo m. Lembremos que $\mathbf{Z}_m$ é uma partição de $\mathbf{Z}$ e que $\bar{a}=\bar{b}$ se, e sòmente se, $a \equiv b \pmod{m}$. O corolário do teorema 33 nos mostra que as classes de restos $\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{m-1}$ são distintas duas a duas e, além disso, se $\bar{a}$ é uma classe de restos módulo m, então existe um inteiro r, com $0 \leq r \leq m-1$, tal que $\bar{a}=\bar{r}$; portanto, temos

$$\mathbf{Z}_m=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{m-1}\}.$$

EXEMPLO 14 - Para $m=2$ só temos duas classes de restos módulo 2: $\bar{0}$ e $\bar{1}$; a primeira é formada por todos os inteiros pares e a segunda por todos os inteiros ímpares:

$$\bar{0}=\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots\}$$
$$\bar{1}=\{-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}.$$

Temos $\bar{0}\cap\bar{1}=\emptyset$, $\bar{0}\cup\bar{1}=\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$.

EXEMPLO 15 - Tomando-se $m=5$ e observando-se que o resto da divisão de um inteiro por 5 só pode assumir um dos valores 0, 1, 2, 3 e 4, temos

$$\mathbf{Z}_5=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\},$$

onde $\bar{i}\cap\bar{j}=\emptyset$ se $i\neq j$ $(0\leqslant i,j\leqslant 4)$ e $\mathbf{Z}=\bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3}\cup\bar{4}$; além disso, $\bar{i}$ $(0\leqslant i\leqslant 4)$ é o conjunto de todos os inteiros x que têm i para resto quando divididos por 5.

A lei do cancelamento da multiplicação não é, em geral, verdadeira para as congruências; por exemplo, temos $4\cdot 8\equiv 4\cdot 5$ (mod. 12) e no entanto $8\equiv 5$ (mod. 12). Para ver em que condições é possível efetuar êste cancelamento demonstraremos o seguinte

TEOREMA 34 - Se a, b e c são números inteiros tais que $ac\equiv bc$ (mod. m) e se $d=mdc(c,m)$, então $a\equiv b$ (mod. m_1), onde $m\equiv m_1 d$.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese temos $ab-bc=qm$, onde q é um número inteiro; por outro lado, d é um divisor de c, logo, $c=c_1 d$ e então $ac_1-bc_1=(a-b)c_1=qm_1$. Daqui resulta que m_1 é um divisor do produto $(a-b)c_1$ e como m_1 e c_1 são primos entre si (teorema 24), teremos, conforme o teorema 25, $m_1|(a-b)$, portanto, $a\equiv b$ (mod. m). ∎

COROLÁRIO 1 - Se a, b e c são números inteiros tais que $ac\equiv bc$ (mod. m) e se c e m são primos entre si, então $a\equiv b$ (mod. m).

Êste corolário nos mostra de que a lei do cancelamento é estendida para congruências: podemos cancelar os fatôres que são primos com o módulo. Como caso particular do corolário acima, temos

COROLÁRIO 2 - $ac\equiv bc$ (mod. p), onde p é um número primo, e se $p|c$, então $a\equiv b$ (mod. p).

EXERCÍCIOS

69. Mostrar que o número $27195^8-10887^8+10152^8$ é divisível por 26460.

70. Determinar o resto da divisão por 7 do seguinte número

$$10^{10}+10^{(10^2)}+10^{(10^3)}+\cdots+10^{(10^{10})}.$$

71. Determinar o último algarismo de cada um dos seguintes números $9^{(9^9)}$ e $7^{(7^7)}$.

72. Calcular os dois últimos algarismos do número

$$7^{(7^{1000})}.$$

73. Mostrar que o número $3^{6n}-2^{6n}$ é divisível por 35, para todo número natural n.

74. Mostrar que o número $2222^{5555}+5555^{2222}$ é divisível por 231.

75. Verificar que o número de Mersenne $M_{911}=2^{911}-1$ é divisível por 1823.

76. Mostrar que os números $1,2,3^2,\cdots,3^{16}$ formam um sistema de representantes das classes de resto módulo 17.

77. Determinar o resto da divisão de $1+2!+3!+\cdots+(10^{10})!$ por 24.

78. Mostrar que todo número inteiro é congruente módulo 11 a um e sòmente um dos seguintes números inteiros 121, 7, -1321, 8, 9, 15, 1334, 126, -20, -10 e -115.

79. Demonstrar que todo número primo ímpar é de uma das seguintes formas $4n-1$ ou $4n+1$, onde n é um número inteiro.

80. Mostrar que se $m>4$ é composto, então $(m-1)!\equiv 0$ (mod. m).

81. Seja N um número natural estritamente maior do que 1 e seja $N=a_s a_{s-1}\cdots a_1 a_0$ sua representação do sistema decimal. Verificar que valem os seguintes critérios de divisibilidade:

a) $2|N$ se, e sòmente se, a_0 é par;

b) $3|N$ se, e sòmente se, $a_s+a_{s-1}+\cdots+a_1+a_0$ é divisível por 3

c) $5|N$ se, e sòmente se, $a_0=0$ ou $a_0=5$;

d) $9|N$ se, e sòmente se, $a_s+a_{s-1}+\cdots+a_1+a_0$ é divisível por 9;

e) $11|N$ se, e sòmente se, $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^s a_s$ é divisível por 11.

82. Representando o número N, do exercício anterior, no sistema de base 1000, deduzir critérios de divisibilidade por 7 e por 13.

2.7 - CONGRUÊNCIAS LINEARES

Consideremos o seguinte problema: dados dois números inteiros a e b e um número inteiro não nulo m, determinar todos os números inteiros x tais que $ax\equiv b$ (mod. m). Tal problema é conhecido sob o nome de *congruência do primeiro grau módulo m ou congruência linear módulo m*. Evidentemente poderemos supor que o módulo m seja estritamente positivo e em tudo o que se segue esta hipótese estará sempre subentendida.

Consideremos, então, a congruência linear módulo m

$$ax\equiv b \text{ (mod. } m) \qquad (46),$$

onde $m>0$. Diz-se que um inteiro x_0 é uma solução de (46) se, e sòmente se, $ax_0 \equiv b \pmod{m}$. O conjunto de todos os números inteiros que satisfazem esta condição é denominado *conjunto-solução* da congruência linear (46).

Se x_0 é uma solução da congruência (46), temos $ax_0+(-m)q=b$, com q inteiro, logo, a equação diofantina $ax+(-m)y=b$ admite o par ordenado (x_0,q) como solução; recìprocamente, se esta equação diofantina tem solução, é imediato que a congruência (46) também tem solução. Portanto, conforme o teorema 27, temos o seguinte

TEOREMA 35 - A congruência linear (46) tem solução se, e sòmente se, $mdc(a,m)$ é divisor de b.

Suponhamos que a congruência linear (46) tenha solução x_0 e indiquemos por A seu conjunto-solução. É imediato que se x_1 é um inteiro qualquer tal que $x_1 \equiv x_0 \pmod{m}$, então x_1 também é solução da congruência (46), isto é, todos os números inteiros pertencentes à classe de restos módulo m determinado por x_0 são soluções da congruência (46), ou seja $\overline{x}_0 \subset A$. Vamos completar êste resultado demonstrando o seguinte

TEOREMA 36 - Se a congruência linear (46) tem solução x_0, então o conjunto-solução A desta congruência é igual à reunião de d classes de restos módulo m e disjuntas duas a duas

$$A = \overline{x}_0 \cup \overline{x}_1 \cup \cdots \cup \overline{x}_{d-1},$$

onde $x_i = x_0 + im_1$ para $i = 1,2,\cdots,d-1$, $d = mdc(a,m)$ e $m = m_1 d$.

DEMONSTRAÇÃO - Pondo-se $a = a_1 d$, temos

$$ax_i = ax_0 + ia_1 m \equiv ax_0 \equiv b \pmod{m},$$

portanto x_i é solução de (46) para $i = 1,2,\cdots,d-1$, de onde vem, $\overline{x}_0 \cup \overline{x}_1 \cup \cdots \cup \overline{x}_{d-1} \subset A$. Por outro lado, se $x' \in \mathbf{Z}$ é uma solução de (46), existe $y_0 \in \mathbf{Z}$ tal que $ax'+(-m)y_0 = b$; pondo-se $b = b_1 d$, temos $a_1 x'+(-m_1)y_0 = b_1$, portanto, conforme o teorema 29, existe um número inteiro t tal que $x' = x_0 - m_1 t$ e indicando-se por i o resto da divisão euclidiana de $-t$ por d teremos $-t = i+sd$ $(s \in \mathbf{Z})$ e então

$$x' = x_0 + m_1(i+sd) = x_0 + im_1 + sm \equiv x_0 + im_1 \pmod{m},$$

ou seja $\overline{x'} = \overline{x}_i$. Fica assim demonstrado que $A \subset \overline{x}_0 \cup \overline{x}_1 \cup \cdots \cup \overline{x}_{d-1}$, portanto, vale a igualdade $A = \overline{x}_0 \cup \overline{x}_1 \cup \cdots \cup \overline{x}_{d-1}$. Finalmente, falta demonstrar que as classes de restos $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_{d-1}$ são disjuntas duas a duas; ora, de $\overline{x}_i \cap \overline{x}_j \neq \emptyset$, onde $0 \leq j < i \leq d-1$,

resulta $x_i \equiv x_j \pmod{m}$, de onde vem $(i-j)m_1 \equiv 0 \pmod{m}$, logo, $d \mid (i-j)$ e isto é absurdo, pois, $0 < i-j < d$. ∎

COROLÁRIO 1 - Se a e m são primos entre si, então a congruência linear (46) admite uma solução x_0 e, além disso, seu conjunto-solução é a classe de restos $\overline{x}_0$ módulo m.

Por causa dêste resultado, diz-se que a congruência linear (46) tem uma única solução módulo m.

Como caso particular do corolário 1, temos o

COROLÁRIO 2 - Se p é um número primo e se $p \nmid a$ $(a \in \mathbf{Z})$, então, para todo número inteiro b a congruência linear $ax \equiv b \pmod{p}$ tem uma solução x_0 e seu conjunto-solução é a classe de restos $\overline{x}_0$ módulo p.

Consideremos, novamente, a congruência linear (46) e suponhamos que $d = mdc(a,m)$ seja um divisor de b, logo, esta congruência tem uma solução $x_0 \in \mathbf{Z}$, portanto, $ax_0 \equiv b$ $(mdc.\ m)$, de onde vem, de acôrdo com o teorema 34, $a_1 x_0 \equiv b_1 \pmod{m_1}$, ou seja, x_0 também é solução da congruência linear

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1} \qquad (47).$$

Fica assim demonstrado que tôda solução de (46) também é solução de (47). Por outro lado, se $z_0 \in \mathbf{Z}$ é uma solução qualquer de (47), temos $a_1 z_0 = b_1 + tm_1$, com $t \in \mathbf{Z}$, de onde vem, $a_1 dz_0 = b_1 d + tm_1 d$, ou, $az_0 = b + tm$ então $az_0 \equiv b \pmod{m}$, ou seja, z_0 é solução da congruência linear (46). Em resumo, as congruências lineares (46) e (47) têm o mesmo conjunto-solução, desde que $d = mdc(a,m)$ seja um divisor de b. Daqui resulta, conforme o corolário 1 do teorema 37, aplicado à congruência (47), que o conjunto-solução de (46) é a classe de restos $\overline{\overline{x}}_0$ módulo m_1 e, em particular, temos

$$\overline{\overline{x}}_0 = \overline{x}_0 \cup \overline{x}_1 \cup \cdots \cup \overline{x}_{d-1},$$

onde $x_i = x_0 + im_1$ para $i = 1,2,\cdots,d-1$. Portanto, podemos dizer que a congruência linear (46) tem d soluções não congruentes duas a duas módulo m ou que tem uma única solução módulo m_1. Conforme o problema que se considera há necessidade de distinguir estas duas formulações do conjunto-solução da congruência linear (46).

Quando o módulo m é pequeno pode-se verificar por tentativas se a congruência linear (46) tem ou não tem solução experimentando quais dos números $0,1,\cdots,m-1$ satisfazem aquela congruência. Êste processo deve ser substituído pelo

processo de resolução de equações diofantinas quando o módulo m é grande. Os exemplos abaixo esclarecem melhor êstes métodos.

Exemplo 16 - Resolver a congruência $5x \equiv 6 \pmod{12}$.

Como 5 e 12 são primos entre si, esta congruência tem uma única solução módulo 12 (corolário 1 do teorema 36). Por tentativas, temos $5\cdot 0 = 0$, $5\cdot 1 = 5$, $5\cdot 2 = 10$, $5\cdot 3 = 15 \equiv 3 \pmod{12}$, $5\cdot 4 = 20 \equiv 8 \pmod{12}$, $5\cdot 5 = 25 \equiv 1 \pmod{12}$, $5\cdot 6 = 30 \equiv 6 \pmod{12}$, portanto, 6 é uma solução da congruência acima e seu conjunto-solução é a classe de restos 6 módulo 12.

Exemplo 17 - Resolver a congruência linear

$$315x \equiv 12 \pmod{501} \qquad (48).$$

Temos

	1	1	1	2	3	1	4
501	315	186	129	57	15	12	3
186	129	57	15	12	3	0	

logo, $mdc(315,501) = 3$ e como $3 \mid 12$ a congruência acima tem solução. Para determinar uma solução resolveremos a equação diofantina $315x - 501y = 12$. Temos

$$3 = \underline{15} - \underline{12} = \underline{15} - (\underline{57} - 3\times\underline{12}) = 4\times\underline{15} - \underline{57} = 4(\underline{129} - 2\times\underline{57}) - \underline{57} =$$
$$= 4\times\underline{129} - 9\times\underline{57} = 4\times\underline{129} - 9(\underline{186} - \underline{129}) = 13\times\underline{129} - 9\times\underline{186} =$$
$$= 13(\underline{315} - \underline{186}) - 9\times\underline{186} = 13\times\underline{315} - 22\times\underline{186} = 13\times\underline{315} - 22(\underline{501} - \underline{315}) =$$
$$= \underline{315}\times 35 - \underline{501}\times 22,$$

logo,

$$315\times 140 - 501\times 88 = 12;$$

portanto, $x_0 = 140$ é uma solução da congruência (48). Conforme o teorema 36 o conjunto-solução desta congruência é $\overline{x}_0 \cup \overline{x}_1 \cup \overline{x}_2$, onde $x_i = x_0 + im_1 = 140 + i\cdot 167$ para $i = 1,2$, logo $x_1 = 307$ e $x_2 = 474$; portanto, o conjunto-solução da congruência linear (48) é a reunião das classes de restos módulo 501: $\overline{140}$, $\overline{307}$ e $\overline{474}$. Também podemos resolver a congruência (48) do seguinte modo: conforme os cálculos acima sabemos que $mdc(501,315) = 3$ é um divisor de 12, portanto, basta resolver a congruência

$$105x \equiv 4 \pmod{167}.$$

Já sabemos que 140 é uma solução desta congruência, logo, seu conjunto-solução, que coincide com o conjunto-solução de (48), é a classe de restos módulo 167 determinada por 140, ou seja, a solução geral de (48) é

$$x = 140 + 167t,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

Exemplo 18 - Resolver a congruência $315x \equiv 20 \pmod{501}$.

Temos $mdc(501,315) = 3$ e $3 \nmid 20$; portanto, de acôrdo com o teorema 35, esta congruência não tem solução.

Exemplo 19 - Resolver a congruência

$$1164x \equiv 60 \pmod{3684} \qquad (49).$$

Determinaremos, inicialmente, o máximo divisor comum de 3684 e 1164 pelo processo das divisões sucessivas

	3	6	16
3684	1164	192	12
192	12	0	

e como $12 \mid 60$, a congruência acima tem 12 soluções módulo 3684 ou então tem uma única solução módulo 307. O conjunto-solução de (49) é o mesmo que o conjunto-solução da congruência

$$97x \equiv 5 \pmod{307} \qquad (50)$$

e basta então determinar uma solução da equação diofantina

$$97x - 307y = 5 \qquad (51).$$

Temos

	3	6
307	97	16
16	1	

logo,

$$1 = \underline{97} - 6\times\underline{16} = \underline{97} - 6(\underline{307} - 3\times\underline{97}) = \underline{97}\times 19 - \underline{307}\times 6,$$

portanto, $(95,30)$ é uma solução da equação diofantina (51). Daqui resulta que 95 é uma solução da congruência (50) e, portanto, a solução geral de (49) é dada por

$$x = 95 + 307t,$$

onde t é um inteiro arbitrário. Para determinar as soluções de (49) módulo 3684 basta atribuir a t os valores $0,1,2,\cdots,11$ e, neste caso, o conjunto-solução de (49) é a reunião das seguintes classes de restos módulo 3684: $\overline{95}$, $\overline{402}$, $\overline{709}$, $\overline{1016}$, $\overline{1323}$, $\overline{1630}$, $\overline{1937}$, $\overline{2244}$, $\overline{2551}$, $\overline{2858}$ e $\overline{3165}$.

Estudaremos a seguir a resolução de um sistema de duas congruências na mesma incógnita x

$$a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad a_2x \equiv b_2 \pmod{m_2} \qquad (52),$$

onde suporemos $m_1 > 0$ e $m_2 > 0$. Indicando-se por A_1 o conjunto solução da primeira congruência e por A_2 o conjunto-solução da segunda, é imediato que $A_1 \cap A_2$ é o conjunto-so-

lução do sistema (52). Suporemos que $A_i \neq \emptyset$ $(i=1,2)$, logo, $d_i = mdc(a_i, m_i)$ é um divisor de b_i; pondo-se $m_i = m_i' d_i'$, $a_i = a_i' d$, e $b_i = b_i' d_i$ $(i=1,2)$, resulta que $A_1 \cap A_2$ é o conjunto-solução do seguinte sistema de congruências

$$a_1' x \equiv b_2' \pmod{m_1'} \quad a_2' x \equiv b_2' \pmod{m_2'} \qquad (53),$$

onde $mdc(a_i', m_i') = 1$ para $i=1,2$. Se x_1 (resp., x_2) é uma solução da primeira (resp., segunda) congruência (53), então $x \in A_1 \cap A_2$ se, e sòmente se,

$$x \equiv x_2 \pmod{m_1'}, \quad x \equiv x_2 \pmod{m_2'} \qquad (54).$$

Portanto, a resolução do sistema de congruência (52), com as hipóteses $A_1 \neq \emptyset$ e $A_2 \neq \emptyset$, reduz-se à resolução do sistema (54), problema êste que consideraremos a seguir e que será reformulado do seguinte modo: dados quatro números inteiros a_1, a_2, m_1 e m_2 com $m_1 > 0$, e $m_2 > 0$, determinar todos os inteiros x tais que

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2} \qquad (55).$$

Inicialmente notemos a seguinte propriedade das congruências

LEMA - Sejam a, b, m_1 e m_2 números inteiros; tem-se $a \equiv b \pmod{m_1}$ e $a \equiv b \pmod{m_2}$, se e sòmente se, $a \equiv b \pmod{m}$, onde $m = mmc(m_1, m_2)$.

Com efeito, de $a \equiv b \pmod{m_i}$ para $i=1,2$, resulta, $m_1 | (a-b)$ e $m_2 | (a-b)$, logo, $m | (a-b)$, ou seja, $a \equiv b \pmod{m}$. Recìprocamente, de $a \equiv b \pmod{m}$ resulta, imediatamente, que $a \equiv b \pmod{m_i}$ para $i=1,2$, pois, $m_1 | m$ e $m_2 | m$. ∎

Demonstraremos a seguir um teorema que nos dá uma condição para que o sistema de congruências (55) tenha solução e ao mesmo tempo determinará seu conjunto-solução:

TEOREMA 37 - O sistema de congruências lineares (55) tem solução x_0 se, e sòmente se, $d = mdc(m_1, m_2)$ é um divisor de $a_1 - a_2$; neste caso, seu conjunto-solução é a classe de restos $\overline{x}_0$ módulo $m = mmc(m_1, m_2)$.

DEMONSTRAÇÃO - Indiquemos por A_1 (resp., A_2) o conjunto-solução da primeira (resp., segunda) congruência linear (55). Suponhamos que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, ou seja, que o sistema (55) admita uma solução x_0, logo, $x_0 \equiv a_1 \pmod{m_1}$ e $x_0 \equiv a_2 \pmod{m_2}$. portanto, $x_0 = a_1 + t_1 m_1$ e $x_0 = a_2 + t_2 m_2$, onde t_1 e t_2 são números inteiros; daqui resulta $t_1 m_1 + (-t_2) m_2 = a_2 - a_1$, de onde concluímos imediatamente que d é um divisor da diferença $a_1 - a_2$;

Recìprocamente, suponhamos que d seja um divisor de $a_1 - a_2$; neste caso, o teorema 27 nos mostra que existe um par ordenado (y_0, z_0), de números inteiros, tal que $m_1 y_0 + (-m_2) z_0 = a_2 - a_1$ e daqui resulta $a_1 + m_1 y_0 = a_2 + m_2 z_0$ e como êste número pertence tanto a A_1 como a A_2 temos $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Finalmente, suponhamos que $x_0 \in \mathbf{Z}$ seja uma solução do sistema (55), logo,

$$x_0 \equiv a_1 \pmod{m_1} \quad \text{e} \quad x_0 \equiv a_2 \pmod{m_2} \qquad (56).$$

Se x é um elemento qualquer de $A_1 \cap A_2$, temos $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ para $i=1,2$, logo, em virtude de (56), teremos $x \equiv x_0 \pmod{m_i}$ para $i=1,2$; neste caso, o lema acima nos mostra que $x \equiv x_0 \pmod{m}$, onde $m = mmc(m_1, m_2)$; portanto, $A_1 \cap A_2 \subset \overline{x}_0$. Recìprocamente, se $x \in \overline{x}_0$, temos $x \equiv x_0 \pmod{m}$ e daqui resulta, pela aplicação do lema acima, que $x \equiv x_0 \pmod{m_i}$ para $i=1,2$, ou seja, $x \in A_1 \cap A_2$ e então $\overline{x}_0 \subset A_1 \cap A_2$. ∎

COROLÁRIO - Se m_1 e m_2 são dois números inteiros estritamente positivos e primos entre si, então o sistema de congruências (55) tem uma solução x_0; além disso, o conjunto-solução dêste sistema é a classe de restos módulo $m_1 m_2$ determinada por x_0.

O corolário acima pode ser estendido, fàcilmente, para um sistema de congruências da forma

$$x \equiv a_i \pmod{m_i} \quad i = 1,2,\cdots,s \qquad (57),$$

onde $m_i > 0$ para $i = 1,2,\cdots,s$ e $mdc(m_i, m_j) = 1$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i,j \leqslant s)$. Indicando-se por A_i o conjunto-solução da congruência $x \equiv a_i \pmod{m_i}$, então o conjunto-solução do sistema (57) é $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_s$; demonstra-se que A é não vazio e se x_0 é um elemento qualquer de A, então A é igual à classe de restos módulo $m_1 m_2 \cdots m_s$ determinada por x_0. Deixaremos a demonstração dêste resultado, que é feita por indução finita sôbre s, a cargo do leitor.

EXEMPLO 20 - Resolver o sistema de congruências lineares

$$x \equiv 15 \pmod{12}, \quad x \equiv 7 \pmod{17}.$$

Conforme o corolário acima êste sistema tem solução x_0 e a classe de restos $\overline{x}_0$ módulo $12 \times 17 = 204$ é seu conjunto-solução. Para determinar uma solução particular x_0 procederemos do seguinte modo: a solução geral da primeira congruência é $x = 5 + 12t$, com t inteiro, e devemos ter $5 + 12t \equiv 7 \pmod{17}$, ou, $6t \equiv 1 \pmod{17}$. Pelo processo das tentativas temos que 3 é uma solução desta última congruência, portanto $x_0 = 5 + 12 \times 3 = 41$

é uma solução particular do sistema dado; sua solução geral é

$$x = 41 + 204y,$$

onde y é um inteiro arbitrário.

EXEMPLO 21 - Resolver o sistema de congruências lineares

$$315x \equiv 12 \pmod{501}, \quad 1164x \equiv 60 \pmod{3684} \qquad (58).$$

Conforme o exemplo 17 a primeira congruência tem solução, pois, $mdc(315,501) = 3$ e $3|12$; de acôrdo com o exemplo 19 a segunda congruência também tem solução, pois, $mdc(3684,1164) = 12$ e $12|60$. Para mostrar que o sistema àcima tem solução precisamos verificar que o máximo divisor comum de 3684 e 501 é um divisor de $60 - 12 = 48$ (teorema 37); ora, temos

	7	2	1	4	1	9
3684	501	177	147	30	27	3
177	147	30	27	3	0	

e de fato $3|48$. Para resolver o sistema (58) vamos reduzí-lo, inicialmente, à forma (55). De acôrdo com os exemplos 17 e 19, o sistema (58) pode ser substituído pelo seguinte

$$x \equiv 140 \pmod{167}, \quad x \equiv 95 \pmod{307} \qquad (59)$$

e como $mdc(167,307) = 1$ resulta, em virtude do corolário do teorema 37, que êste sistema tem uma solução x_0 e seu conjunto-solução é a classe de restos módulo $167 \times 307 = 51269$ determinada por x_0. Portanto, só falta determinar uma solução particular x_0 de (59), o que faremos utilizando o método empregado no exemplo anterior. A solução geral da primeira congruência (59) é $x = 140 + 167t$, onde t é um inteiro arbitrário, e devemos ter $140 + 167t \equiv 95 \pmod{307}$, ou,

$$167t \equiv 262 \pmod{307} \qquad (60),$$

portanto, precisamos resolver a equação diofantina

$$167t - 307u = 262.$$

Temos

	1	1	5	5	2
307	167	140	27	5	2
140	27	5	2	1	

logo,

$$1 = \underline{5} - 2\times\underline{2} = 5 - 2(\underline{27} - 5\times\underline{5}) = 11\times\underline{5} - 2\times\underline{27} = 11(\underline{140} - 5\times\underline{27}) - 2\times\underline{27} =$$
$$= 11\times\underline{140} - 57\times\underline{27} = 11\times\underline{140} - 57(\underline{167} - \underline{140}) = 68\times\underline{140} - 57\times\underline{167} =$$
$$= 68(\underline{307} - \underline{167}) - 57\times\underline{167} = 68\times\underline{307} - 125\times\underline{167}$$

de onde vem

$$167(-125\times262) - 307(-68\times262) = 262,$$

logo, $-125\times262 = -32750$ é uma solução da congruência (60) e como $-32750 \equiv 99 \pmod{307}$ resulta que $t_0 = 99$ é solução de (60); portanto $x_0 = 140 + 167\times99 = 16673$ é uma solução do sistema (59). Em resumo, o conjunto-solução do sistema de congruências (58) é a classe de restos $\overline{16673}$ módulo 51269; portanto, a solução geral de (58) é

$$x = 16673 + 51269t,$$

onde t é um inteiro arbitrário.

EXERCÍCIOS

83. Resolver as seguintes congruências lineares

a) $7x \equiv 5 \pmod{12}$;

b) $252x \equiv 312 \pmod{1325}$;

c) $63020x \equiv 276 \pmod{76084}$;

d) $3640x \equiv 91 \pmod{7293}$;

e) $512x \equiv 130 \pmod{31250}$.

84. Determinar o menor inteiro positivo x tal que

$$1296x \equiv 1105 \pmod{2413}.$$

85. Resolver os seguintes sistemas de congruências lineares

a) $x \equiv 3 \pmod{7}$, $x \equiv 2 \pmod{9}$;

b) $6x \equiv 5 \pmod{11}$, $5x \equiv 6 \pmod{7}$, $x \equiv 6 \pmod{13}$;

c) $7x \equiv 5 \pmod{12}$, $252x \equiv 312 \pmod{1325}$.

86. Determinar o menor inteiro positivo que tem para restos 2, 3 e 2 quando dividido, respectivamente, por 3, 5 e 7 (Sun-Tse, I século).

87. Determinar o menor inteiro positivo que tem para restos 1, 4, 2, 9 e 3 quando dividido, respectivamente, por 3, 5, 7, 11 e 13.

88. Determinar a solução geral do seguinte sistema de congruências $x \equiv b_1 \pmod{25}$, $x \equiv b_2 \pmod{27}$, $x \equiv b_3 \pmod{59}$, onde b_1, b_2 e b_3 são números inteiros dados.

89. Resolver os seguintes sistemas de congruências

a) $5x \equiv 1 \pmod{6}$, $3x \equiv 5 \pmod{8}$;

b) $5x \equiv 3 \pmod{6}$, $8x \equiv 6 \pmod{15}$;

c) $x \equiv 17 \pmod{504}$, $x \equiv 31 \pmod{35}$, $x \equiv 33 \pmod{16}$ (Gauss).

90. Determinar o menor inteiro positivo que tem para restos 5, 4, 3 e 2 quando dividido, respectivamente, por 6, 5, 4 e 3 (Brahmagupta, VII século).

91. Determinar o menor múltiplo positivo de 7 que tem para resto 1 quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6 (Ibn al-Haitan, X século).

92. Resolver o seguinte sistema de congruências lineares nas incógnitas x e y:

$$x + 4y - 29 \equiv 0 \pmod{143}$$
$$2x - 9y + 84 \equiv 0 \pmod{143}.$$

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

93. Demonstrar que se o número $M_n=2^n-1$ $(n>1)$ é primo, então n é primo (teorema de Cataldi-Fermat).

94. Demonstrar que se o número inteiro 2^a+1 $(a\in N)$ é primo, então a é uma potência de 2.

95. Diz-se que um número inteiro $a>1$ é *perfeito* se, e sòmente se, a soma de seus divisores positivos é igual a $2a$. Demonstrar que se o número $M_n=2^n-1$ é primo, então o número $P_n=2^{n-1}M_n$ $(n\in N^*)$ é perfeito. Observação: Pode-se demonstrar que se um número par P é perfeito, então existe um número natural $n>1$ tal que 2^n-1 seja primo e $P=P_n$ (teorema de Euler). Até hoje não se conhece um número perfeito ímpar; sabe-se que se tal número existe, então êle é maior do que 2 200 000 000 000.

96. Demonstrar que se os números a, $a+2$ e $a+4$ são primos, então $a=3$.

97. Demonstrar que para cada número natural $n>1$ existem n números consecutivos e compostos.

98. Demonstrar que existem infinitos números primos positivos da forma $4n-1$. (Sugestão: supondo-se que $p_1,p_2,\cdots,p_k$ sejam os únicos números primos positivos da forma $4n-1$, considerar o número inteiro $4(p_1p_2\cdots p_k)-1$.)

99. Observando-se que o produto de dois números naturais da forma $3n+1$ ainda é da mesma forma, demonstrar que existem infinitos números primos positivos da forma $3n+2$. (Sugestão: supondo-se que $p_1,\cdots,p_k$ sejam os únicos números primos positivos da forma $3n+2$, considerar o número $3(p_1p_2\cdots p_k)-1$.)

100. Consideremos o número de Fermat $F_n=2^{(2^n)}+1$, onde n é um número natural.

a) Demonstrar que se $m<n$, então, F_m é um divisor de F_n-2.

b) Demonstrar que se $m\neq n$, então, F_m e F_n são primos entre si.

c) Dar uma outra demonstração do teorema de Euclides (teorema 18) baseada no resultado anterior.

101. Demonstrar que não existe um número primo positivo p tal que $p^n=2^m-1$, onde m e n são números inteiros positivos.

102. Demonstrar que não existe um número primo positivo p tal que $p^n=2^m+1$, onde m e n são números inteiros estritamente maiores do que 2.

103. Dar uma outra demonstração da parte de existência do teorema 19 baseada no segundo princípio de indução finita. Sugestão: supõe-se $b>0$ e $a\geq 0$; faz-se a demonstração por indução finita sôbre o número inteiro a. Os outros casos $a<0$, $b>0$; a qualquer e $b<0$ resultam do anterior.

104. Demonstrar o corolário 2 do teorema 17 sem utilizar êste teorema. Sugestão: se a é um número inteiro, com $a\neq 0$ e $a\neq\pm 1$, considera-se o conjunto S de todos os divisores b de a tais que $b>1$; mostra-se que S é não vazio e que $p=minS$ é um número primo positivo.

105. Demonstrar o teorema 17 a partir do exercício anterior.

106. Dar uma outra demonstração do teorema 17 baseada no princípio do menor inteiro. Sugestão: Considera-se o conjunto S de todos os números inteiros $a\geq 2$ que não são produtos de números primos; mostrar que a hipótese $S\neq\emptyset$ conduz a uma contradição.

107. Demonstrar que $mdc(a,bc)=mdc(a,b)\cdot mdc(a,c)$ se b e c são primos entre si.

108. Mostrar que a equação diofantina $ax+by=c$, onde a, b e c são números inteiros não nulos, tem solução se, e sòmente se, $mdc(mdc(a,b),c)=mdc(a,b)$.

109. Mostrar que os números inteiros r e s tais que $ra+sb=mdc(a,b)$ (teorema 21) não são determinados de modo único.

110. Demonstrar que se x e y são números inteiros tais que $ax+by=mdc(a,b)$, então, x e y são primos entre si.

111. Estender a definição de máximo divisor comum (definição 9) para uma família $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ $(n\geq 1)$ de números inteiros.

a) Demonstrar que existe um máximo divisor comum positivo d dos números inteiros $a_1,a_2,\cdots,a_n$. Sugestão: Considerar o conjunto S de todos os números inteiros positivos da forma $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n$, onde $x_1,x_2,\cdots,x_n$ são números inteiros; mostrar que $d=minS$ é um máximo divisor comum positivo de $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

b) Demonstrar que existe um único máximo divisor comum positivo $d=mdc(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ dos inteiros $a_1,a_2,\cdots,a_n$ e que existem números inteiros $r_1,r_2,\cdots,r_n$ tais que $r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=d$.

c) Supondo-se que os números inteiros $a_1,a_2,\cdots,a_n$ não sejam simultâneamente nulos, demonstrar que $mdc(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ é o máximo do conjunto dos divisores comuns e positivos de $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

d) Demonstrar que $mdc(a_1,a_2,\cdots,a_n)=mdc(mdc(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}),a_n)$ para $n>1$.

112. Diz-se que os números inteiros $a_1,a_2,\cdots,a_n$ são relativamente primos se, e sòmente se, $mdc(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$. Demonstrar que êstes números são relativamente primos se, e sòmente se, existem números inteiros $r_1,r_2,\cdots,r_n$ tais que $r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=1$.

113. Seja d um divisor comum e positivo dos números inteiros $a_1,a_2,\cdots,a_n$ não nulos simultâneamente e ponhamos $a_i=da_i'$, para $i=1,2,\cdots,n$. Demonstrar que d é o máximo divisor comum positivo de $a_1,a_2,\cdots,a_n$ se, e sòmente se, $a_1',a_2',\cdots,a_n'$ são relativamente primos.

114. Estender os resultados do §2.3 para a equação diofantina $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$, onde $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ são números inteiros.

115. a) Definir o mínimo múltiplo comum positivo de n números inteiros $a_1,a_2,\cdots,a_n$ (isto é, estender a definição 11 para $n\geq 1$).

b) Demonstrar que $mmc(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ é o mínimo do conjunto dos múltiplos comuns e positivos dos números $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

c) Mostrar que $mmc(a_1,a_2,\cdots,a_n) = mmc(mmc(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}),a_n)$, para $n<1$.

116. Demonstrar que se os números inteiros $a_1,a_2,\cdots,a_n$ são tais que $mdc(a_i,a_j)=1$, para $i\neq j$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$, então, $mmc(a_1,a_2,\cdots,a_n) = |a_1a_2\cdots a_n|$.

117. Demonstrar que não existem números inteiros a e b não nulos tais que $a^2=pb^2$, onde p é um número primo positivo. Sugestão: utilizar a decomposição (44) e o correspondente enunciado da unicidade desta decomposição. Observação: O resultado acima nos mostra que para todo número primo $p>1$, o número real $\sqrt{p}$ não é racional.

118. Sejam $m_1,m_2,\cdots,m_s$ números naturais tais que $mdc(m_i,m_j)=1$ para $i\neq j$ $(1\leqslant i,j\leqslant s)$; sejam $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ números inteiros. Demonstrar que o sistema de congruências lineares

$$a_ix \equiv b_i \pmod{m_i}, \quad i=1,2,\cdots,s$$

tem solução se, e sòmente se, $mdc(a_i,m_i)\mid b_i$ para $i=1,2,\cdots,s$. Neste caso, o conjunto-solução do sistema acima é uma classe de restos módulo $m_1m_2\cdots m_s$.

119. Consideremos o sistema de congruências lineares

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \quad i=1,2,\cdots,s,$$

onde $a_i\in\mathbf{Z}$, $m_i\in\mathbf{N}^*$ e $mdc(m_i,m_j)=1$ para $i\neq j$ $(1\leqslant i,j\leqslant s)$. Pondo-se $M=m_1m_2\cdots m_s=m_iM_i$, tem-se $mdc(M_i,m_i)=1$, logo, existe um número inteiro b_i tal que $M_ib_i\equiv 1 \pmod{m_i}$. Com estas notações, demonstrar que o número inteiro $\sum_{i=1}^{s}a_ib_iM_i$ é uma solução do sistema acima.

120. Demonstrar que o sistema de congruências lineares

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \quad i=1,2,\cdots,s$$

onde $a_i\in\mathbf{Z}$ e $m_i\in\mathbf{N}^*$ $(i=1,2,\cdots,s)$ tem solução se, e sòmente se, $mdc(m_i,m_j)\mid(a_i-a_j)$ para $i,j=1,2,\cdots,s$. Neste caso, o conjunto-solução do sistema acima é uma classe de restos módulo $mmc(m_1,m_2,\cdots,m_s)$.

NOTAS SÔBRE O §2

1. O teorema de Euclides nos mostra que dado um número natural $n\geqslant 1$ sempre existe um número primo $p>n$ e modificando-se um pouco a demonstração dêste teorema (ver os exercícios 38 e 39), p pode ser definido como o menor fator estritamente maior do que 1 do número $n!+1$. Portanto, para todo número natural $n\geqslant 1$ tem-se um processo para definir um número primo $p>n$; no entanto, a determinação efetiva dêste fator p não é simples, pois, o número $n!+1$ cresce ràpidamente com n. Até hoje não se conhece uma fórmula que dê, em função de n, o menor número primo maior do que n e também não se conhece uma fórmula que determine o n-ésimo número primo. Um processo para determinar números primos grandes será discutido a seguir ao estudarmos os números de Mersenne $M_n=2^n-1$.

2. A primeira demonstração do teorema fundamental da Aritmética já era, pràticamente, conhecida por Euclides, apesar de que êste matemático grego não deu o enunciado correspondente à unicidade da decomposição em fatôres primos. A demonstração dada no texto, baseada nos conceitos de máximo divisor comum e de números primos entre si, é devida a Gauss (1777-1855). A segunda demonstração é devida a Zermelo e foi publicada em «Göttingen Nachrichten, I (1934), pp. 43-44» e Zermelo afirma que sua demonstração data de 1912. Foram publicadas outras demonstrações antes de 1934, uma dada por H. Hasse em 1928 no trabalho «Über eindeutige Zerlegung in Primelement oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen, Journal für reine und angewandte Mathematik, vol. 159 (1928), pp. 3-12» e outra por F. A. Lindemann, «The unique factorization of a positive integer, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford), vol. 14 (1933), pp. 319-320». Observemos que a demonstração de Zermelo não utiliza a noção de máximo divisor comum e nem o corolário do teorema 25 e, efetivamente, êstes resultados passam a ser conseqüências do teorema fundamental da Aritmética; convém observar, explicitamente, que, no entanto, o teorema 21 é ainda uma conseqüência do algoritmo da divisão. É interessante notar que se passaram mais de 2000 anos para se obter uma demonstração diferente daquela que havia sido esboçada por Euclides. No Capítulo VII teremos a ocasião de mostrar que existem anéis de integridade com máximo divisor comum que não satisfazem o teorema da unicidade da decomposição em fatôres primos.

3. A noção de máximo divisor comum, assim como o processo das divisões sucessivas, já aparecem nas obras de Euclides; o teorema 21, base da demonstração do teorema fundamental da Aritmética, também já era conhecido por êste matemático grego. Parece que Euclides conhecia a parte da unicidade da decomposição de um número natural $a>1$ em fatôres primos e por dificuldades de notação não conseguiu estabelecer a demonstração geral dêste resultado.

4. Diofanto viveu no século III em Alexandria e muito pouco se conhece sôbre sua vida. Estudou, principalmente, a parte de Álgebra e escreveu 13 livros sôbre Aritmética; dêstes livros sòmente 7 chegaram aos nossos tempos. Os problemas estudados por Diofanto são problemas indeterminados que exigem soluções em números inteiros ou racionais (absolutos); são, em geral, problemas de grau superior ao primeiro mas, apesar disso, os problemas indeterminados do primeiro grau (que já eram estudados pelos matemáticos chineses no início de nossa era) são conhecidos sob o nome de problemas diofantinos. Entre os 130 problemas estudados por Diofanto citaremos sòmente dois: 1) Determinar dois números inteiros tais que sua soma esteja numa dada razão para a soma de seus quadrados. 2) Determinar três números tais que cada um deles seja média proporcional entre os outros dois e tais que a diferença (absoluta) entre dois quaisquer deles seja um quadrado perfeito.

5. As congruências foram extensivamente estudadas por Gauss em «Disquisitationes Arithmeticae», obra esta que foi publicada em 1801, quando Gauss tinha apenas 24 anos de idade.

O sistema de congruências considerado na parte final da secção 2.7 já havia sido estudado pelo matemático chinês Sun-Tse (início de nossa era) e a fórmula dada no exercício 119 para resolver tal sistema é conhecida sob o nome de teorema do resto chinês.

6. Os matemáticos gregos definiram os números perfeitos (ver o exercício 95) e demonstraram que os números 6, 28, 496 e 8192 são perfeitos. Euclides demonstrou que se o número 2^n-1 é primo, então $2^{n-1}(2^n-1)$ é perfeito; não determinou outros números perfeitos por causa da dificuldade de obter novos números primos da forma 2^n-1. Notemos que os quatro primeiros números perfeitos são obtidos atribuindo a n os seguintes valores: 2, 3, 5 e 7; o próximo número perfeito é obtido para $n=13$ e não é conhecido quem demonstrou que $2^{13}-1=8191$ é primo. Observemos que, na época em questão, o único processo conhecido para verificar que um dado número inteiro $a>1$ é primo era o processo das divisões de a por todos os números primos p tais que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{a}$ (ver o exercício 41), portanto, no caso do quinto número perfeito $2^{12}(2^{13}-1)=33\,550\,336$ houve necessidade de se construir uma táboa de números primos (que era feita pelo conhecido método do «crivo' de Eratóstenes») menores do que $\sqrt{8191}<91$ e efetuar tôdas as divisões de 8191 por êstes números primos (um total de 24 divisões). O sexto e o sétimo números perfeitos

$$P_{17}=2^{16}(2^{17}-1) \quad \text{e} \quad P_{19}=2^{18}(2^{19}-1)$$

foram determinados por Cataldi em 1548; para isso Cataldi construiu uma táboa de números primos até 750 e no caso do número $2^{19}-1=524\,287$ êle efetuou as divisões dêste número pelos 128 números primos que são menores do que 750. É evidente que êste processo compreende muitos cálculos e não poderia mesmo dar resultados novos para outros números primos da forma $M_p=2^p-1$.

Os números da forma $M_p=2^p-1$ foram estudados por Marin Mersenne (1588-1648) que propôs diversos problemas a outros matemáticos de sua época como P. Fermat (1601-1665), G. Descartes (1596-1650), problemas êstes relacionados com o estudo dos números perfeitos. Por causa disso todo número da forma $M_p=2^p-1$ é conhecido sob o nome de *número de Mersenne*, apesar de que alguns autores chamam números de Mersenne aos números M_p, com $2 \leqslant p \leqslant 257$, pois, Mersenne só havia estudado êstes números. Fermat demonstrou, em 1640, que se o número primo positivo q é fator de um número de Mersenne M_p (p primo), então, q é necessàriamente da forma $2kp+1$, onde $k \geqslant 1$ é um número inteiro. Êste resultado simplifica bastante a tarefa da verificação se um dado número M_p é primo ou não; por exemplo, para $p=23$ só há necessidade de considerar os números primos da forma $46k+1$ e que são menores do que 4096 e tomando-se, por exemplo $k=1$ obtém-se o número 47 e por divisão direta verifica-se que $47 \mid M_{23}$, portanto, P_{23} não é perfeito. Fermat aplicou o mesmo processo para $p=29$ e mostrou que $223 \mid M_{29}$. Note-se que basta considerar os números M_p, com p primo, pois, é imediato que se p não é primo, então, M_p também não é primo; além disso, pode-se demonstrar que se M_n é primo, então, n é primo (teorema de Cataldi-Fermat)

Mersenne, em 1644, afirmou o seguinte: todo número M_p é primo para $p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127$ e 257 e é composto para os outros números primos p tais que $2<p<257$. Como veremos mais adiante esta afirmação é incorreta e mesmo na época de Mersenne ela não foi considerada como sendo verdadeira, pois, não existiam ainda processos práticos para verificar que, por exemplo, o número $M_{31}=2\,147\,483\,647$ era primo ou não; no caso de M_{31} haveria necessidade de se construir uma táboa de números primos até 46 340 e, no entanto, a maior táboa conhecida por Mersenne era a de Cataldi que só continha números primos menores do que 750.

L. Euler (1707-1783) demonstrou em 1788 que o número M_{31} é primo. Utilizando-se apenas o teorema de Fermat para mostrar que M_{31} é primo há necessidade de determinar todos os números primos da forma $62k+1$ que são menores do que 46 340; na época de Euler havia uma táboa de números primos menores do que 100 000, construída por Brancker, e o número total de números primos da forma $62k+1$ é 157, portanto, deveriam ser feitas 157 divisões de M_{31} por êstes números primos. Euler simplificou esta tarefa reduzindo para 84 o total de divisões ao demonstrar o seguinte teorema: se o número $q=2p+1$ é primo e se $q \mid M_p$, então, q é da forma $8k \pm 1$ (neste enunciado p não é, necessàriamente, um número primo). Portanto, de acôrdo com o teorema de Fermat só há necessidade de considerar os números primos que podem ser representados sob as formas $62k+1$ e $8k' \pm 1$ (k e k' são números naturais). O número M_{31} foi o maior número primo conhecido explìcitamente até 1877.

Portanto, Mersenne acertou ao afirmar que M_{31} era primo. O primeiro êrro da afirmação de Mersenne foi descoberto em 1887 por Pervusian e Seelhof quando demonstraram que o número

$$M_{61}=2^{61}-1=2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

é primo. Mais tarde foi demonstrado por Cole, em 1902, que M_{67} é composto e Powers demonstrou em 1911 e 1914, respectivamente, que M_{89} e M_{107} são primos, obtendo assim mais dois êrros na afirmação de Mersenne. O número M_{257} é composto e isto foi demonstrado por Kraitchik em 1926 e depois por H. Lehmer em 1930; é interessante notar que se sabe que M_{257} é composto mas não se conhece nenhum fator primo dêste número. Os resultados acima foram obtidos pelo chamado *teste de Lucas* que enunciaremos abaixo.

E. Lucas (1842-1891) demonstrou, em 1876, o seguinte teorema: se $S_1=4$ e $S_{n+1}=S_n^2-2$ para todo $n \geqslant 1$, então, M_p é primo se, e sòmente se, $M_p \mid S_{p-1}$ (teste de Lucas). Usando êste teste Lucas demonstrou, em 1877, que o número

$$M_{127}=170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

é primo e êste número ficou sendo o maior número primo conhecido explìcitamente até 1952.

Por intermédio do teste de Lucas conseguiu-se, até 1947, determinar todos os números de Mersenne M_p, com p primo e $2 \leqslant p \leqslant 257$, que são primos ou não: M_p é primo sòmente para os seguintes valores de p

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 e 127.

Portanto, até 1947, conheciam-se 12 números perfeitos.

Com o uso dos computadores eletrônicos conseguiram-se novos resultados sôbre os números de Mersenne:

a) Robinson, em 1952, verificou que M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} e M_{2281} são primos e que não existe nenhum outro número primo Mp para $127 \leqslant p \leqslant 2300$. Portanto, em 1952, conheciam-se 17 números perfeitos. O número primo M_{2281} está publicado na revista Scripta Mathematica, vol. 19 (1954) e foi calculado explicitamente por Lehmer. Êste número primo só permaneceu no primeiro pôsto de grandeza durante 5 anos;

b) Em 1957, Riesel verificou que M_{3217} é primo e que M_p (p primo) é composto para todo $p \neq 3217$ tal que $2300 \leqslant p \leqslant 3300$.

c) Em 1961, Hurwitz verificou que M_{4253} e M_{4423} são primos, sendo que M_{4253} foi o primeiro número primo conhecido explìcitamente com mais de mil algarismos no sistema decimal; ao mesmo tempo Hurwitz mostrou que não existem outros números primos M_p, onde $3300 \leqslant p \leqslant 5000$.

Em resumo, conhecem-se atualmente 20 números primos M_p que são determinados atribuindo-se a p os seguintes valores: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253 e 4423. Portanto, são conhecidos até hoje 20 números perfeitos.

OBSERVAÇÃO - O maior número primo conhecido M_{4423}, assim como o maior número perfeito $P_{4423} = 2^{4422}(2^{4423}-1)$ foram calculados, explìcitamente, a pedido do autor, pelo Centro de Cálculo Numérico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo em 1963. A título de curiosidade transcreveremos aqui o maior número primo conhecido atualmente:

$$M_{4423} = 2^{4423} - 1 =$$

285 542 542 228 279 613 901 563 566 102 164 008 326 164 238 644 702 889 199 247 456 602 284 400
390 600 653 875 954 571 505 539 843 239 754 513 915 896 150 297 878 399 377 056 071 435 169 747
221 107 988 791 198 200 988 477 531 339 214 282 772 016 059 009 904 586 686 254 989 084 815 735
422 480 409 022 344 297 588 352 526 004 383 890 632 616 124 076 317 387 416 881 148 592 486 188
361 873 904 175 783 145 696 016 919 574 390 765 598 280 188 599 035 578 448 591 077 683 677 175
520 434 074 287 726 578 006 266 759 615 970 759 521 327 828 555 662 781 678 385 691 581 844 436
444 812 511 562 428 136 742 490 459 363 212 810 180 276 096 088 111 401 003 377 570 363 545 725
120 924 073 646 921 576 797 146 199 387 619 296 560 302 680 261 790 118 132 925 012 323 046 444
438 622 308 877 924 609 373 773 012 481 681 672 424 493 674 474 488 537 770 155 783 006 880 852
648 161 513 067 144 814 790 288 366 664 062 257 274 665 275 787 127 374 649 231 096 375 001 170
901 890 786 263 324 619 578 795 731 425 693 805 073 056 119 677 580 338 084 333 381 987 500 902
968 831 935 913 095 269 821 311 141 322 393 356 490 178 488 728 982 288 156 282 600 813 831 296
143 663 845 945 431 144 043 753 821 542 871 277 745 606 447 858 564 159 213 328 443 580 206 422
714 694 913 091 762 716 447 041 689 678 070 096 773 590 429 808 909 616 750 452 927 258 000 843
500 344 831 628 297 089 902 728 649 981 994 387 647 234 574 276 263 729 694 848 304 750 917 174
186 181 130 688 518 792 748 622 612 293 341 368 928 056 634 384 466 646 326 572 476 167 275 660
839 105 650 528 975 713 899 320 211 121 495 795 311 427 946 254 553 305 387 067 821 067 601 768
750 977 866 100 460 014 602 138 408 448 021 225 053 689 054 793 742 003 095 722 096 732 954 750
721 718 115 531 871 310 231 057 902 608 580 607

7. Os números da forma

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1,$$

onde $n \in N$, são denominados números de Fermat. Êstes números têm importância no problema da divisão de uma circunferência em p partes iguais (p número primo) pela régua e compasso, pois, um dos resultados da teoria de Galois (1811-1832) afirma que tal construção é possível se, e sòmente se, existe um número natural n tal que $p = F_n$. Dêste modo, os polígonos regulares de 3 e 5 lados podem ser inscritos numa circunferência de raio dado por meio da régua e do compasso, resultado êste que já era conhecido pelos matemáticos gregos. A afirmação acima contém novos resultados, pois, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$ são primos. Fermat, em 1640, observou que o número primo F_n é primo para $n = 0,1,2,3,4$ e afirmou: parece-me que F_n é primo para todo número natural n. No entanto, Euler, em 1739, mostrou que o número F_5 é divisível por 641, provando assim que a *conjetura de Fermat* era falsa. Para chegar ao resultado acima Euler demonstrou, em primeiro lugar, que um fator de F_n é da forma $2^{n+2}k+1$ (k inteiro, $k \geqslant 1$), logo, um fator de F_5 é da forma $128k+1$. Os primeiros números primos desta forma são 193, 257, 449, 577 e 641; examinado cada um dêstes casos (como no exemplo 12) conclui-se que 641 é um fator de F_5. Demonstrou-se mais tarde, no comêço dêste século, que os números F_6, F_7, F_8 e F_9 também são compostos e em 1953 mostrou-se que o número F_{10} (que tem 309 algarismos no sistema decimal) é composto; também em 1953, usando-se para os cálculos máquinas eletrônicas, demonstrou-se que o número F_{16} (que tem 19729 algarismos) é composto e é divisível por $2^{18} \cdot 3150 + 1$. Em 1905, Morehead mostrou que o número F_{73} (que tem mais de 10^{20} algarismos) é divisível por $2^{75} \cdot 5 + 1$; o número F_{73} é o maior número de Fermat estudado até hoje. Atualmente sabe-se que F_n é composto para $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 23, 36, 38$ e 73; em cada um dêstes casos conhece-se um fator primo de F_n, exceto para $n = 7$ e $n = 8$. F_{13} é o menor número de Fermat que não se sabe se é primo ou não. Ainda não se conseguiu descobrir um outro número primo de Fermat além dos cinco primeiros; atualmente não se sabe se o número de números de Fermat que são primos é finito ou não.

CAPÍTULO IV

ANÉIS E CORPOS

Neste Capítulo estudaremos duas estruturas fundamentais: anel e corpo. No §1.1 introduziremos, de um modo geral, a definição de anel mas, realmente, só consideraremos um determinado tipo desta estrutura: anel comutativo com elemento unidade. Não teremos ocasião de construir um anel não comutativo como, por exemplo, o anel das matrizes quadradas de ordem $n>1$ sôbre um corpo. A noção de corpo só será definida para o que se pode chamar de «corpo comutativo»; não veremos nenhum exemplo de corpo não comutativo como o «corpo dos quatérnios» que foi construído por Hamilton (1805-1865) nos fins do século passado. Introduziremos também o anel $\boldsymbol{Z}_m$ dos inteiros módulo m completando assim o estudo das congruências iniciado no §2.6 do Capítulo III. No §2 estudaremos o corpo de frações de um anel de integridade e, em particular, construiremos o corpo $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais. Terminaremos êste parágrafo com as importantes noções de característica de um anel e de corpos primos. Finalmente, no §3 estudaremos os anéis e corpos ordenados tendo em vista a construção do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais que será feita no capítulo seguinte.

§1 - ANÉIS

1.1 - DEFINIÇÃO DE ANEL E EXEMPLOS

DEFINIÇÃO 1 - Seja A um conjunto e suponhamos que estejam definidas, sôbre A, duas operações $AXA \xrightarrow{+} A$ e $AXA \xrightarrow{\cdot} A$ denominadas, respectivamente, adição e multiplicação. Diz-se que estas operações definem uma *estrutura de anel sôbre o*

conjunto A ou que *o conjunto* A *é um anel em relação a estas operações* se, e sòmente se, são válidos os seguintes axiomas

A: a operação de adição define uma estrutura de grupo comutativo sôbre o conjunto A;

M1: a operação de multiplicação define uma estrutura de semi-grupo sôbre o conjunto A;

D: quaisquer que sejam a, b e c em A, tem-se (propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição)

$$a(b+c)=(ab)+(ac) \quad \text{e} \quad (b+c)=(ba)+(ca) \qquad (1).$$

Para indicar um anel devemos usar uma notação que destaque o conjunto A e as operações + e · consideradas sôbre A, por exemplo, $(A,+,\cdot)$
e, neste caso, fica subentendido que os axiomas A, M1 e D são verdadeiros, portanto, devemos dizer «consideremos o anel $(A,+,\cdot)$» ou «seja $(A,+,\cdot)$ um anel». Como as operações consideradas sôbre o conjunto A serão, em geral, indicadas por + e · não há necessidade de indicá-las explìcitamente e então diremos, simplesmente, «seja A um anel» ou «consideremos um anel A»; neste caso, fica subentendido que estão fixadas duas operações + e · sôbre o conjunto A e que estas operações satisfazem os axiomas A, M1 e D. Para todo anel A indicaremos por A^* o conjunto dos elementos não nulos de A, isto é, $A^*=A-\{0\}$.

As fórmulas (1) serão escritas sob a forma mais simples

$$a(b+c)=ab+ac \quad \text{e} \quad (b+c)a=ba+ca,$$

onde se faz a convenção usual de que os produtos devem ser efetuados em primeiro lugar e a seguir as somas.

DEFINIÇÃO 2 - Diz-se que um anel A é *comutativo* se, e sòmente se, estiver verificado o seguinte axioma

M2: quaisquer que sejam a e b em A, tem-se $ab=ba$ (propriedade comutativa da multiplicação).

DEFINIÇÃO 3 - Diz-se que um anel A *tem elemento unidade* se, e sòmente se, estiver verificado o seguinte axioma

M3: existe um elemento 1 em A tal que $a\cdot 1=a=1\cdot a$, para todo a em A (existência do elemento unidade da multiplicação).

Finalmente, se um anel A satisfaz os axiomas M2 e M3 diremos que A é um *anel comutativo com elemento unidade.*

Se $(A,+,\cdot)$ é um anel, então $(A,+)$ é um grupo comutativo que é denominado *grupo aditivo do anel* A. Anàlogamente, $(A,\cdot)$ é um semi-grupo (axioma M1) que é denominado *semi-grupo multiplicativo do anel* A. Se $(A,+,\cdot)$ é um anel com elemento unidade obtém-se, então, o *monóide multiplicativo* $(A,\cdot)$ *do anel* A.

Repetiremos aqui, de modo sucinto, os axiomas que definem a noção de anel comutativo com elemento unidade. É dado um conjunto A e sôbre êste conjunto estão definidas operações de adição e de multiplicação

$$(a,b)\mapsto a+b \quad \text{e} \quad (a,b)\mapsto ab$$

que satisfazem os seguintes axiomas (onde a, b e c são elementos quaisquer de A)

A1: $(a+b)+c=a+(b+c)$	M1: $(ab)c=a(bc)$
A2: $a+b=b+a$	M2: $ab=ba$
A3: $a+0=a$	M3: $a\cdot 1=a$
A4: $a+(-a)=0$	

D: $a(b+c)=ab+ac$.

Exemplo 1 - Conforme vimos no §1.2 do Capítuto III, o conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros é um anel comutativo com elemento unidade que passa a ser denominado *anel dos números inteiros*. É evidente que neste caso estamos considerando, sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$, as operações de adição e de multiplicação que foram definidas no §1.1 do Capítulo III.

Exemplo 2 - O conjunto $2\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros pares é fechado em relação às operações do anel $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ e é fácil verificar que as operações induzidas sôbre $2\boldsymbol{Z}$ definem uma estrutura de anel comutativo; notemos que êste anel não tem elemento unidade.

Exemplo 3 - O conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais é um anel comutativo com elemento unidade em relação às operações usuais de adição e de multiplicação (ver o §2.2 dêste Capítulo).

Exemplo 4 - O conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais é um anel comutativo com elemento unidade em relação às operações usuais de adição e de multiplicação (ver o Capítulo V).

Exemplo 5 - Seja A um conjunto unitário e indiquemos por 0 (zero) seu único elemento; é evidente que só existe uma única operação f sôbre A, definida por $0f0=0$. Tomando-se

$f=+=\cdot$, obtém-se uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade $A=\{0\}$. Diz-se, neste caso, que $A=\{0\}$, com estas operações, é um *anel nulo*.

Exemplo 6 - Seja $(A,+)$ um grupo comutativo e coloquemos, por definição, $x\cdot y=0$ quaisquer que sejam x e y em A. É imediato que esta operação de multiplicação satisfaz os axiomas M1, M2 e D, portanto, $(A,+,\cdot)$ é um anel comutativo, que é chamado *anel trivial*. Notemos que vale o axioma M3 se, e sòmente se, o conjunto A é unitário e, neste caso, A é um anel nulo.

Exemplo 7 - Seja $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$ (esta notação será justificada no §1.6) o conjunto de todos os números reais da forma $a+b\sqrt{2}$, com a e b inteiros. É imediato que $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$ é fechado em relação às operações de adição e de multiplicação definidas sôbre $\boldsymbol{R}$ e que êste conjunto é um anel comutativo com elemento unidade.

Exemplo 8 - Consideremos o conjunto A de tôdas as funções reais e contínuas definidas sôbre o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais. Se f e g são dois elementos quaisquer de A definiremos $f+g$ e $f\cdot g$ por

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \text{e} \quad (f\cdot g)(x)=f(x)g(x),$$

para todo x em $\boldsymbol{R}$. As funções $f+g$ e fg pertencem a A, pois, a soma e o produto de duas funções contínuas são funções contínuas e ficam assim definidas operações de adição e de multiplicação sôbre o conjunto A. É fácil verificar que estão satisfeitos os axiomas A1-A4, M1-M3 e D; portanto, estas operações definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sôbre o conjunto A. Notemos que o elemento zero de A é a função constante igual a zero e o elemento unidade de A é a função constante igual a 1.

Exemplo 9 - Consideremos o conjunto $A=\{0,a,b,c\}$ com quatro elementos e definamos as operações de adição e de multiplicação pelas seguintes táboas

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	0	0	0
c	0	a	b	c

Deixaremos a cargo do leitor a verificação de que estas operações definem uma estrutura de anel sôbre o conjunto A; notemos que êste anel não é comutativo e nem tem elemento unidade.

EXEMPLO 10 - Seja X um conjunto não vazio e seja A um anel; indiquemos por $E = A^X$ o conjunto de tôdas as aplicações de X em A. Se f e g são dois elementos quaisquer de E, definiremos $f+g$ e fg por

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{e} \quad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

para todo x em X. É imediato que $f+g$ e fg são elementos de E e ficam assim definidas operações de adição e de multiplicação sôbre o conjunto E. Verifica-se, fàcilmente, que E é um anel em relação a estas operações, que passa a ser denominado *anel das aplicações* (ou funções) *do conjunto* X *no anel* A. Pode-se demonstrar que E é comutativo (resp., tem elemento unidade) se, e sòmente se, A é comutativo (resp., tem elemento unidade).

EXERCÍCIOS

1. Consideremos as operações $\oplus$ e $\odot$, sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros, definidas por

$$x \oplus y = x+y-1 \quad \text{e} \quad x \odot y = x+y-xy,$$

quaisquer que sejam x e y em $\mathbf{Z}$ (ver o exercício 7 do Capítulo II). Mostrar que $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$ é um anel comutativo com elemento unidade.

2. Seja E um conjunto e consideremos sôbre o conjunto $\mathcal{P}(E)$ das partes de E as operações de intersecção $\cap$ e de diferença simétrica Δ (ver o exercício 12 do Capítulo I). Mostrar que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ é um anel comutativo com elemento unidade.

3. Sejam A e B dois anéis e consideremos o produto cartesiano $A \times B$ dos conjuntos A e B; se (a,b) e (c,d) são dois elementos quaisquer de $A \times B$ colocaremos, por definição,

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

e

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac, bd).$$

Mostrar que estas operações definem uma estrutura de anel sôbre $A \times B$, que passa a ser denominado *anel produto dos anéis* A *e* B.

4. Com as notações do exercício anterior, verificar as seguintes propriedades: a) o anel $A \times B$ é comutativo se, e sòmente se, os anéis A e B são comutativos; b) o anel $A \times B$ tem elemento unidade se, e sòmente se, A e B têm elementos unidades.

5. Consideremos o conjunto A, de todos os números reais da forma $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, onde a, b e c são números inteiros. Mostrar que

A é um anel comutativo com elemento unidade em relação às operações induzidas pelas operações de adição e de multiplicação do anel $\mathbf{R}$ dos números reais.

6. Verificar detalhadamente que as operações definidas no exemplo 9 satisfazem os axiomas A, M1 e D.

7. Se $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ são elementos quaisquer de um anel A, mostrar que

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)b = \sum_{i=1}^{n} a_i b \quad \text{e} \quad b(\sum_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} b a_i.$$

8. Se $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ e $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ são duas famílias quaisquer de elementos de um anel A, mostrar que

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_i b_j).$$

1.2 - PROPRIEDADES ELEMENTARES DE UM ANEL

Nesta secção daremos diversas propriedades que são conseqüências imediatas da definição de anel. Podemos, evidentemente, aplicar os resultados estabelecidos no §1 do Capítulo II para os elementos do grupo aditivo $(A,+)$ de um anel A e temos as seguintes propriedades: 1) o elemento zero para a operação de adição é único (diz-se também que 0 é o elemento zero do anel A); 2) o oposto de cada elemento de A é único; 3) quaisquer que sejam a e b em A, tem-se

$$-(-a) = a \quad \text{e} \quad -(a+b) = (-a)+(-b) \tag{2};$$

4) quaisquer que sejam a, x e y em A, se $a+x = a+y$, então, $x = y$ (lei do cancelamento da adição); 5) quaisquer que sejam a e b em A existe um único elemento $x \in A$ tal que $b+x = a$.

O único elemento x de A tal que $b+x = a$ é denominado *diferença entre* a *e* b e é indicado por $a-b$, logo,

$$a-b = a+(-b) \tag{3};$$

notemos que valem as igualdades

$$b+(a-b) = a, \quad 0-a = -a \quad \text{e} \quad a-a = 0 \tag{4},$$

quaisquer que sejam a e b em A. A operação $(a,b) \mapsto a-b$, definida sôbre A, é denominada *subtração.*

Como todo elemento a de A é simetrizável para a adição resulta que está definido o múltiplo de a segundo um número inteiro qualquer n (ver o §1.5 do Capítulo III) e que valem as seguintes fórmulas

$$n(-a) = -(na) = (-n)a, \tag{5},$$

$$m(na) = (mn)a = n(ma), \quad (6),$$
$$(m+n)a = ma+na \quad (7),$$
$$n(a+b) = na+nb \quad (8),$$

quaisquer que sejam os elementos a e b de A e os números inteiros m e n.

Observemos que as propriedades acima só se referem à estrutura aditiva do anel A e são simples conseqüências do fato que $(A,+)$ é um grupo comutativo.

TEOREMA 1 (Propriedades distributivas da multiplicação em relação à subtração) - Quaisquer que sejam os elementos a, b e c de um anel A, tem-se

$$a(b-c) = (ab)-(ac) \quad \text{e} \quad (b-c)a = (ba)-(ca) \quad (9).$$

DEMONSTRAÇÃO - Temos, conforme a definição de diferença e o axioma D:

$$ab = a[c+(b-c)] = ac+a(b-c),$$

portanto, $a(b-c) = (ab)-(ac)$. A demonstração da outra propriedade distributiva é completamente análoga a esta. ∎

As fórmulas (9) serão escritas de modo mais simples

$$a(b-c) = ab-ac \quad \text{e} \quad (b-c)a = ba-ca \quad (10),$$

onde se faz a convenção usual de que os produtos devem ser efetuados em primeiro lugar e a seguir as diferenças.

COROLÁRIO - Quaisquer que sejam os elementos a e b de um anel A tem-se

$$a\cdot 0 = 0 = 0\cdot a \quad (11)$$

e

$$(-a)b = -(ab) = a(-b) \quad \text{e} \quad (-a)(-b) = ab \quad (12).$$

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o teorema anterior e a fórmula (4), temos

$$a\cdot 0 = a(0-0) = (a\cdot 0)-(a\cdot 0) = 0$$

e

$$0\cdot a = (0-0)a = (0\cdot a)-(0\cdot a) = 0,$$

o que termina a verificação de (11). Por outro lado, de acôrdo com a parte anterior, a fórmula (4) e o teorema acima, temos

$$(-a)b = (0-a)b = (0\cdot b)-(ab) = 0-(ab) = -(ab)$$

e

$$a(-b) = a(0-b) = (a\cdot 0)-(ab) = 0-(ab) = -(ab);$$

finalmente,

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab. \quad ∎$$

As propriedades (12) são conhecidas sob o nome de *regras dos sinais.*

TEOREMA 2 - Num anel A, vale a seguinte propriedade

$$(na)b = n(ab) = a(nb) \quad (13),$$

quaisquer que sejam a e b em A e para todo número inteiro n.

DEMONSTRAÇÃO - Observemos que a fórmula (13) é verdadeira para $n=0$ em virtude da definição de múltiplo de um elemento segundo o número natural zero e da fórmula (11). Suponhamos que $n>0$ e que a fórmula (13) seja verdadeira para $n-1$; temos

$$(na)b = [(n-1)a+a]b = [(n-1)a]b+(ab) = (n-1)(ab)+(ab) = n(ab)$$

e

$$a(nb) = a[(n-1)b+b] = a[(n-1)b]+(ab) = (n-1)(ab)+(ab) = n(ab), \quad ∎$$

portanto, conforme o primeiro princípio de indução finita, a fórmula (13) é verdadeira para todo número natural n. Finalmente, se $n<0$ ponhamos $n=-p$, logo, $p>0$; de acôrdo com a definição de múltiplo de um elemento segundo um número inteiro negativo, de acôrdo com a regra dos sinais e o caso anterior, temos

$$(na)b = [(-p)a]b = [-(pa)]b = -[(pa)b] = -[p(ab)] = (-p)(ab) = n(ab)$$

e

$$a(nb) = a[(-p)b] = a[-(pb)] = -[a(pb)] = -[p(ab)] = (-p)(ab) = n(ab). \quad ∎$$

Se o anel A satisfaz o axioma M3, então, a operação de multiplicação admite um único elemento unidade 1 (teorema 1, Capítulo II); diz-se também que 1 é o elemento unidade do anel A. Se $1=0$, teremos, para todo elemento a de A, $a = 1\cdot a = 0\cdot a = 0$, portanto, A é um anel nulo: $A=\{0\}$. Desta propriedade concluímos o seguinte: se A é um anel com elemento unidade 1 e se o conjunto A tem pelo menos dois elementos, então $1\neq 0$. Quando consideramos um anel com elemento unidade 1 estará sempre subentendido que $1\neq 0$.

Se A é um anel com elemento unidade 1, então, os axiomas M1 e M3 nos mostram que $(A,\cdot)$ é um monóide multiplicativo, portanto está definida a noção de potência n-ésima ($n\in N$) de qualquer elemento a de A (§2.5, Capítulo II) e temos, por definição, $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a^n\cdot a$.

Conforme o teorema 27 do Capítulo II valem as seguintes propriedades

$$a^{m+n} = a^m.a^n \quad (14)$$

e

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m \quad (15),$$

quaisquer que sejam os números naturais m e n e para todo elemento a do anel A.

DEFINIÇÃO 4 - Diz-se que dois elementos a e b, de um anel A, são *permutáveis* se, e sòmente se, a e b são permutáveis para a multiplicação definida sôbre A.

Portanto, a e b são permutáveis se, e sòmente se, $ab = ba$ (definição 3 do Capítulo II). Se a e b são elementos permutáveis do anel A e se A tem elemento unidade 1, então, conforme o teorema 28 do Capítulo II, temos

$$a^m \cdot b^n = b^n \cdot a^m \tag{16}$$

e

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{17},$$

quaisquer que sejam os números naturais m e n.

Além disso, se a e b são permutáveis pode-se demonstrar que vale a seguinte fórmula (conhecida sob o nome de fórmula do binômio de Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

onde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. A demonstração é completamente análoga a que é desenvolvida na Álgebra Elementar e por isso mesmo não a repetiremos aqui.

DEFINIÇÃO 5 - Diz-se que um elemento a de um anel com elemento unidade 1 é *inversível* se, e sòmente se, a é inversível para a multiplicação definida sôbre A (definição 9, Capítulo II).

Portanto, se a é inversível existe, conforme o teorema 2 do Capítulo II, um único elemento a^{-1} (denominado *inverso* de a) tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

Indicaremos por $U(A)$ o conjunto dos elementos inversíveis do anel A e, em virtude do exemplo 23 do Capítulo II, sabemos que $(U(A), \cdot)$ é um grupo, que passa a ser denominado *grupo dos elementos inversíveis do anel* A.

A noção de potência com expoente inteiro e negativo pode ser definida para elementos inversíveis de um anel A com elemento unidade (ver o §1.5, Capítulo III); se a é inversível e se n é um número natural qualquer, tem-se

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \tag{18}.$$

Conforme os resultados estabelecidos no §1.5 do Capítulo III, sabemos que valem as fórmulas (14) e (15), quaisquer que sejam os números inteiros m e n e para todo elemento inversível a do anel A; além disso, também valem as fórmulas (16) e (17), onde m e n são inteiros quaisquer, desde que a e b sejam inversíveis e permutáveis.

EXERCÍCIOS

9. Se a é um elemento de um anel A com elemento unidade 1, mostrar que o múltiplo de a segundo o número inteiro n é igual ao produto de dois elementos de A.

10. Mostrar que $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$, sem utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração. Sugestão: $a \cdot 0 = (a+0)0 = \cdots$.

11. A partir do exercício precedente verificar as regras dos sinais.

12. Se a é um elemento de um anel A com elemento unidade, mostrar que $(-a)^n = a^n$ para todo número natural par e $(-a)^n = -(a^n)$ para todo número natural ímpar.

13. Seja A um anel com elemento unidade e seja a um elemento inversível de A; mostrar que $-a$ é inversível e $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

14. Com as hipóteses do exercício anterior mostrar que a fórmula (18) é verdadeira para todo número inteiro n.

15. Verificar, detalhadamente, a fórmula do binômio de Newton. Sugestão: procede-se por indução finita sôbre n e observa-se, inicialmente, que $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$.

16. Sejam A e B dois anéis comutativos com elementos unidades 1_A e 1_B e consideremos o anel produto $A \times B$ dos anéis A e B, (ver o exercício 3); mostrar que $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$.

1.3 - ANÉIS DE INTEGRIDADE

Conforme vimos na secção anterior, se um produto de elementos de um anel A tem pelo menos um fator igual a zero, então êste produto é igual a zero, pois, $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$ para todo elemento a de A. É importante observar que, em geral, não é verdadeira a recíproca desta propriedade, isto é, um produto de elementos de A pode ser nulo com todos os fatôres diferentes de zero; os exemplos abaixo esclarecem melhor esta afirmação.

EXEMPLO 11 - Consideremos o anel A das funções reais e contínuas definido no exemplo 8 e sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

É imediato que $f \neq 0$, $g \neq 0$ e, além disso, f e g são contínuas; por outro lado, temos $fg = 0$, pois, para todo x real pelo menos um dos números reais $f(x)$ ou $g(x)$ é nulo.

EXEMPLO 12 - Consideremos o anel $A=\{0,a,b,c\}$ definido no exemplo 9. Conforme a táboa de multiplicação dêste anel temos, por exemplo, $ba=0$ com $b\neq 0$; notemos ainda que $ax=0$, com $x\in A$, sòmente quando $x=0$.

EXEMPLO 13 - Consideremos o anel E definido no exemplo 10, onde suporemos que A seja um anel não nulo e que o conjunto X tenha pelo menos dois elementos x_1 e x_2. Seja a um elemento não nulo de A e sejam f e g as aplicações de X em A definidas por

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{se} \quad x=x_1 \\ 0 & \text{se} \quad x\neq x_1 \end{cases}$$

e

$$g(x)=\begin{cases} a & \text{se} \quad x=x_2 \\ 0 & \text{se} \quad x\neq x_2 \end{cases}$$

É imediato que $f\neq 0$, $g\neq 0$ e $fg=0$.

DEFINIÇÃO 6 - Diz-se que um elemento a, de um anel comutativo não nulo A, é um *divisor do zero* se, e sòmente se, existe $b\in A$, $b\neq 0$, tal que $ab=0$. Se a é divisor do zero e se $a\neq 0$, diremos que a é um *divisor próprio de zero.*

Por exemplo, 0 é divisor de zero, pois, $0\cdot a=0$ e podemos escolher $a\neq 0$ porque A é, por hipótese, um anel não nulo. Notemos que a *lei do anulamento do produto*

$$ab=0 \text{ implica } a=0 \text{ ou } b=0,$$

só é verdadeira com a hipótese suplementar de que a ou b não sejam divisores do zero.

Os anéis considerados nos exemplos 11, 12 e 13 contêm divisores próprios do zero. Notemos que no exemplo 12 deveríamos dizer que a é um divisor próprio do zero «à esquerda» e já tínhamos observado que a não é um divisor do zero «à direita».

TEOREMA 3 - Um elemento a, de um anel comutativo e não nulo A, não é um divisor do zero se, e sòmente se, a é regular para a multiplicação.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que a não seja um divisor do zero e sejam x e y dois elementos quaisquer de A tais que $ax=ay$; desta igualdade e do teorema 1 resulta que $a(x-y)=0$, portanto, $x-y=0$ ou $x=y$ e, conforme a definição 10 do Capítulo II, isto significa que a é regular para a multiplicação. Recìprocamente, suponhamos que a seja regular para a multiplicação e seja x um elemento qualquer de A

tal que $ax=0$, logo, $ax=a\cdot 0$, de onde vem, $x=0$; portanto, a não é um divisor do zero. ∎

COROLÁRIO (*lei restrita do cancelamento da multiplicação*). Quaisquer que sejam os elementos a, x e y, de um anel comutativo e não nulo A, se $ax=ay$ e se a não é um divisor do zero, então $x=y$.

DEFINIÇÃO 7 - Chama-se *anel de integridade* a todo anel comutativo com elemento unidade $1\neq 0$, que não possui divisores próprios do zero.

Portanto, um anel comutativo A, com elemento unidade $1\neq 0$, é um anel de integridade se, e sòmente se, todo elemento não nulo, de A, é regular para a multiplicação, ou ainda, se, e sòmente se, vale em A a lei do anulamento do produto. Num anel de integridade A, a lei restrita do cancelamento da multiplicação pode ser enunciada sob a forma: quaisquer que sejam a, x e y em A, se $ax=ay$ e se $a\neq 0$, então $x=y$.

Repetiremos aqui, de modo sucinto, os axiomas que definem a noção de anel de integridade. É dado um conjunto A que tem pelo menos dois elementos e sôbre êste conjunto estão definidas operações de adição e de multiplicação

$$(a,b)\mapsto a+b \quad \text{e} \quad (a,b)\mapsto ab,$$

que satisfazem os seguintes axiomas (onde a, b e c são elementos quaisquer de A):

A1: $(a+b)+c=a+(b+c)$	M1: $(ab)c=a(bc)$
A2: $a+b=b+a$	M2: $ab=ba$
A3: $a+0=a$	M3: $a\cdot 1=a$
A4: $a+(-a)=0$	LCM: $ax=ay$ e $a\neq 0 \Longrightarrow x=y$

D: $a(b+c)=ab+ac$.

EXEMPLO 14 - Os anéis considerados nos exemplos 1, 3, 4 e 7 são anéis de integridade. No anel $2\boldsymbol{Z}$ (ver o exemplo 2) vale a lei do anulamento do produto mas $2\boldsymbol{Z}$ não é um anel de integridade, pois, êste anel não tem elemento unidade.

EXEMPLO 15 - Sejam A e B dois anéis comutativos com elementos unidades 1_A e 1_B e consideremos o anel produto $A\times B$ de A por B (ver o exercício 3). É imediato que $A\times B$ é comutativo e tem elemento unidade $(1_A,1_B)$; $A\times B$ não é um anel de integridade, pois, por exemplo,

$$(1_A,0)\cdot(0,1_B)=(1_A\cdot 0,0\cdot 1_B)=(0,0),$$

e os fatôres $(1_A,0)$ e $(0,1_B)$ não são nulos. Notemos que, de um modo geral, para todo $a\in A^*$ (resp., $b\in B^*$) o elemento $(a,0)$ (resp., $(0,b)$) é um divisor próprio de zero no anel produto $A\times B$.

EXERCÍCIOS

17. Determinar todos os divisores do zero do anel A definido no exemplo 9.

18. Determinar todos os divisores do zero do anel produto $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ do anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros por si mesmo (ver o exercício 3).

19. Verificar se o anel $(\mathbf{Z},\oplus,\odot)$, definido no exercício 1, é um anel de integridade.

20. Determinar todos os divisores do zero do anel $(P(E),\Delta,\cap)$ definido no exercício 2.

21. Mostrar que uma função contínua f, elemento do anel A definido no exemplo 8, é um divisor próprio do zero se, e sòmente se, existem números reais a e b, com $a<b$, tais que $f(x)=0$ para todo x tal que $a<x<b$.

22. Mostrar que se A é um anel de integridade e se x é um elemento de A tal que $x^2=x$, então $x=0$ ou $x=1$.

23. A lei do anulamento do produto, para um anel não nulo A, é equivalente à proposição: o conjunto A^* é fechado em relação à multiplicação.

1.4 - CORPOS

DEFINIÇÃO 8 - Diz-se que um anel comutativo K, com elemento unidade $1\neq 0$, é um *corpo* se, e sòmente se, todo elemento não nulo de K é inversível para a multiplicação.

Conforme o teorema 6 do Capítulo II, todo elemento não nulo de um corpo K é regular para a multiplicação, portanto, temos imediatamente as seguintes propriedades: a) todo corpo K não tem divisores próprios do zero, ou seja, todo corpo K é um anel de integridade; b) num corpo K vale a lei restrita do cancelamento da multiplicação: se $ax=ay$, com a, x e y em K e se $a\neq 0$, então $x=y$; c) num corpo K vale a lei de anulamento do produto: se $ab=0$, com a e b em K, então $a=0$ ou $b=0$.

A definição 8 nos mostra que se o anel K é um corpo, então o conjunto dos elementos inversíveis de K é $K^*=K-\{0\}$, isto é, $U(K)=K^*$; por outro lado, já tínhamos observado na secção 1.2, que $U(K)=K^*$ é um grupo (comutativo), que passa a ser denominado *grupo multiplicativo do corpo* K.

Repetiremos aqui, de modo sucinto, os axiomas que definem a noção de corpo comutativo. É dado um conjunto K que tem pelo menos dois elementos e sôbre êste conjunto estão definidas operações de adição e de multiplicação

$$(a,b)\longmapsto a+b \quad \text{e} \quad (a,b)\longmapsto ab,$$

que satisfazem os seguintes axiomas (onde a, b e c são elementos quaisquer de K).

A1: $(a+b)+c=a+(b+c)$	M1: $(ab)c=a(bc)$
A2: $a+b=b+a$	M2: $ab=ba$
A3: $a+0=a$	M3: $a\cdot 1=a$
A4: $a+(-a)=0$	M4: $a\cdot a^{-1}=1 \quad (a\neq 0)$

D: $a(b+c)=ab+ac$.

OBSERVAÇÃO - Pode-se dar uma definição mais geral de «corpo» não se exigindo que a multiplicação seja necessàriamente comutativa; neste caso, a definição 8 nos dá o conceito de «corpo comutativo».

Sejam a e b dois elementos quaisquer de um corpo K, com $b\neq 0$; como b é inversível existe o quociente $\frac{a}{b}$ de a por b e temos, por difinição

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}.$$

As propriedades mais importantes dos quocientes podem ser resumidas no seguinte

TEOREMA 4 - Se a, b, c e d são elementos quaisquer de um corpo K, com $b\neq 0$ e $d\neq 0$, temos

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ se, e sòmente se, } ad=bc \tag{19};$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \tag{20};$$

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b} \tag{21};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \tag{22};$$

$$\left(\frac{b}{d}\right)^{-1}=\frac{d}{b} \tag{23}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Só faremos a verificação de (19), (20) e (22) e deixaremos as outras propriedades a cargo do leitor.

(19) - De $a/b=c/d$ vem $ab^{-1}=cd^{-1}$ e então

$$ad=(ab^{-1})(bd)=(ad^{-1})(bd)=bc.$$

Recìprocamente, de $ad = bc$ resulta

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} = a(dd^{-1})b^{-1} = (ad)(d^{-1}b^{-1}) = (bc)(d^{-1}b^{-1}) = cd^{-1} = \frac{c}{d}.$$

(20) - Temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} = (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) =$$

$$= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} = (ad+bc)(bd)^{-1} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

(22) - Temos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$ ∎

Notemos ainda que valem as seguintes propriedades dos quocientes: $\frac{a}{1} = a$ e $\frac{a}{b} = 0$ se, e sòmente se, $a = 0$.

Exemplo 16 - Conforme veremos no §2.2 dêste Capítulo, o conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais é um corpo em relação às operações usuais de adição e de multiplicação, que passa a ser denominado *corpo dos números racionais.*

Exemplo 17 - Conforme veremos no Capítulo V, o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais é um corpo em relação às operações usuais de adição e de multiplicação, que passa a ser denominado *corpo dos números reais.* Ainda no Capítulo V definiremos o corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos.

Exemplo 18 - Na secção seguinte daremos um exemplo de corpo finito: corpo dos inteiros módulo p, onde p é um número natural primo.

EXERCÍCIOS

24. Verificar as igualdades (21) e (23) do teorema 4.

25. Verificar as seguintes propriedades dos quocientes, onde a, b, c e d são elementos de um corpo K, com $c \neq 0$ e $d \neq 0$:

1) $\frac{1}{cd} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d}$; 2) $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$; 3) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$;

4) $(a/c)/d = a/(cd)$; 5) $(a/b)/(c/d) = ad/bc$ $(b \neq 0)$; 6) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

1.5 - ANEL DOS INTEIROS MÓDULO m

Consideremos o anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros e seja m um número inteiro estritamente maior do que 1; conforme vimos no §2.6 do Capítulo III a relação de congruência módulo

m é uma relação de equivalência sôbre $\boldsymbol{Z}$ e o conjunto quociente $\boldsymbol{Z}_m$ de $\boldsymbol{Z}$ pela congruência módulo m pode ser representado por

$$\boldsymbol{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{m-1}\},$$

onde $\bar{a}$ $(0 \leqslant a \leqslant m-1)$ é a classe de restos módulo m determinada pelo inteiro a:

$$\bar{a} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \equiv a \ (\text{mod. } m)\}.$$

Se $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{Z}_m$ colocaremos, por definição,

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad \text{e} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}.$$

Precisamos verificar, inicialmente, que a soma $\bar{a}+\bar{b}$ e o produto $\bar{a} \cdot \bar{b}$ não dependem dos representantes a e b, isto é, se $\bar{a} = \bar{c}$ e $\bar{b} = \bar{d}$, então,

$$\overline{a+b} = \overline{c+d} \quad \text{e} \quad \overline{ab} = \overline{cd} \qquad (24).$$

Ora, de $\bar{a} = \bar{c}$ e $\bar{b} = \bar{d}$ resulta $a \equiv c \ (\text{mod. } m)$ e $b \equiv d \ (\text{mod. } m)$, logo, em virtude do corolário 1 do teorema 32, Capítulo III, teremos $a+b \equiv c+d \ (\text{mod. } m)$ e $ab \equiv cd \ (\text{mod. } m)$; portanto, valem as igualdades (24).

Ficam assim definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}_m$:

$$(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \overline{a+b} \text{ e } (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \overline{ab}.$$

Notemos que para se determinar a soma $\bar{a}+\bar{b}$ pode-se proceder do seguinte modo: somam-se os números inteiros a e b e determina-se o resto r da divisão euclidiana de $a+b$ por por m; a classe de restos módulo m determinada por r é a soma $\bar{a}+\bar{b}$. Anàlogamente, se s é o resto da divisão euclidiana de ab por m, tem-se $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{s}$. Por causa disso diremos que a soma $\bar{a}+\bar{b}$ e o produto $\bar{a} \cdot \bar{b}$ estão definidos módulo m.

Exemplo 19 - Para $m = 2$, temos $\boldsymbol{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ e as táboas das operações de adição e de multiplicação são as seguintes

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Exemplo 20 - Para $m = 6$, temos $\boldsymbol{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ e as táboas das operações de adição e de multiplicação são as seguintes

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

TEOREMA 5 - As operações de adição e de multiplicação

$$(\bar{a},\bar{b}) \mapsto \overline{a+b} \quad \text{e} \quad (\bar{a},\bar{b}) \mapsto \overline{ab}$$

definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}_m$.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar que estas operações satisfazem os axiomas A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3 e D (ver o §1.1); só faremos a verificação de A3, A4, M3 e D e deixaremos os outros a cargo do leitor.

A3 - Temos $\bar{a}+\bar{0}=\overline{a+0}=\bar{a}$, portanto, a classe de restos $\bar{0}$ é o elemento neutro para a operação de adição.

A4 - Temos $\bar{a}+\overline{-a}=\overline{a+(-a)}=\bar{0}$, portanto, $-\bar{a}=\overline{-a}$.

M3 - Considerando-se a classe de restos $\bar{1}$ temos, para todo elemento $\bar{a}$ de $\boldsymbol{Z}_m$, $\bar{a}\cdot\bar{1}=\overline{a\cdot 1}=\bar{a}$, portanto, $\bar{1}$ é o elemento neutro para a operação de multiplicação.

D - Quaisquer que sejam $\bar{a}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$ em $\boldsymbol{Z}_m$, temos

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\overline{b+c}=\overline{a(b+c)}=\overline{ab+ac}=\overline{ab}+\overline{ac}=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c},$$

portanto, a multiplicação é distributiva em relação à adição. ∎

O anel $\boldsymbol{Z}_m$ passa a ser denominado *anel dos inteiros módulo* m.

EXEMPLO 21 - A lei do anulamento do produto não é, em geral, verdadeira no anel $\boldsymbol{Z}_m$, ou seja, $\boldsymbol{Z}_m$ não é, em geral, um anel de integridade. Tomando-se $m=6$ temos (ver a táboa acima) $\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{0}$ e $\bar{3}\cdot\bar{4}=\bar{0}$, com $\bar{2}\neq\bar{0}$, $\bar{3}\neq\bar{0}$ e $\bar{4}\neq\bar{0}$.

O seguinte teorema dá uma condição para que um elemento $\bar{a}$ de $\boldsymbol{Z}_m$ seja regular para a multiplicação, ou, em outros têrmos, determina os divisores do zero de $\boldsymbol{Z}_m$.

TEOREMA 6 - Um elemento $\bar{a}$ do anel $\boldsymbol{Z}_m$ $(m>1)$ dos inteiros módulo m é um divisor do zero se, e sòmente se, $mdc(a,m)=d>1$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $\bar{a}$ seja um divisor do zero, logo, existe $\bar{b}\neq\bar{0}$ tal que $\overline{ab}=\bar{0}$, de onde vem, $ab=qm$ e então $m|(ab)$; se, por absurdo, $d=1$ temos que a e m são primos entre si, portanto, de $m|(ab)$ resulta $m|b$ e então $\bar{b}=\bar{0}$, contra a hipótese. Reciprocamente, suponhamos que $d>1$ e seja $a=a_1d$ e $m=m_1d$; temos $1\leq m_1<m$, logo, $\overline{m_1}\neq\bar{0}$ e, por outro lado, $\bar{a}\overline{m_1}=\overline{am_1}=\overline{a_1m}=\bar{0}$, portanto, $\bar{a}$ é um divisor do zero. ∎

Observemos que se a e b são números inteiros tais que $a\equiv b$ (mod. m), então, $mdc(a,m)=mdc(b,m)$, portanto, a condição dada no teorema acima não depende do particular representante a da classe de restos $\bar{a}$.

COROLÁRIO 1 - Um elemento $\bar{a}$ do anel $\boldsymbol{Z}_m$ $(m>1)$ é regular para a multiplicação se, e sòmente se, a e m são primos entre si.

COROLÁRIO 2 - Todo elemento regular do anel $\boldsymbol{Z}_m$ $(m>1)$ é inversível.

Com efeito, se $\bar{a}$ é regular, então a e m são primos entre si, logo, existem números inteiros r e s tais que $ra+sm=1$, de onde vem, $\bar{r}\bar{a}=\bar{1}$, ou seja, $\bar{a}$ é inversível. ∎

Observemos que se $m>1$ não é primo, então o anel $\boldsymbol{Z}_m$ tem divisores próprios do zero, pois neste caso $m=ab$, com $1<a,b<m$ e então $\bar{a}\bar{b}=\bar{0}$, onde $\bar{a}\neq\bar{0}$ e $\bar{b}\neq\bar{0}$. Por outro lado, se m é primo e se $\bar{a}\neq\bar{0}$, temos $mdc(a,m)=1$, logo, $\bar{a}$ é regular. Demonstrámos assim o seguinte

TEOREMA 7 - O anel $\boldsymbol{Z}_p$ dos inteiros módulo p é um anel de integridade se, e sòmente se, p é um número primo.

Portanto, para todo número natural primo p, o anel $\boldsymbol{Z}_p$ é de integridade e, neste caso, o corolário 2 do teorema 6 nos mostra que $\boldsymbol{Z}_p$ é um corpo, que passa a ser denominado *corpo dos inteiros módulo* p. Êste resultado também é consequência da propriedade mais geral:

TEOREMA 8 - Todo anel de integridade finito é um corpo.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A um anel de integridade e suponhamos que o conjunto A seja finito; consideremos um elemento $a\in A^*$ e seja f a aplicação de A^* em A definida por $f(x)=ax$. Como A é um anel de integridade resulta que $Im(f)\subset A^*$ e que f é injetora; por outro lado, sabemos que tôda aplicação injetora de um conjunto finito em si mesmo é

sobrejetora (ver o exercício 65, Capítulo I), logo, $Im(f) = A^*$ e como $1 \in A^*$ concluímos que existe um elemento x de A^* tal que $f(x) = 1$, ou seja, $ax = 1$, portanto, a é inversível. ∎

EXERCÍCIOS

26. Determinar todos os divisores do zero e todos os elementos inversíveis do anel $\mathbf{Z}_{24}$.

27. Resolver as seguintes equações sôbre o anel $\mathbf{Z}_m$ dos inteiros módulo m:

a) $\bar{3}x + \bar{2} = \bar{6}x + \bar{7}$ $(m = 8)$;

b) $(\bar{2}x - \bar{1})^5 + (\bar{3}x + \bar{2})^5 + \bar{5}x = \bar{0}$ $(m = 5)$;

c) $\bar{4}x - \bar{7} + \bar{6}x + \bar{2} = \bar{3}x + \bar{5}$ $(m = 12)$.

28. Resolver os seguintes sistemas de equações sôbre o anel $\mathbf{Z}_m$ dos inteiros módulo m:

a) $\bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1}$, $\bar{4}x + \bar{6}y = \bar{1}$ $(m = 7)$;

b) $\bar{2}x - \bar{3}y = \bar{2}$, $\bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1}$ $(m = 14)$;

c) $\bar{6}x + \bar{5}y = \bar{7}$, $\bar{3}x + y = \bar{2}$ $(m = 12)$.

29. Determinar o inverso de $\overline{3640}$ no anel $\mathbf{Z}_{7297}$.

30. Mostrar que $(\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a}^p + \bar{b}^p$, quaisquer que sejam $\bar{a}$ e $\bar{b}$ em $\mathbf{Z}_p$ (p número primo).

1.6 - SUB-ANÉIS E SUBCORPOS

DEFINIÇÃO 9 - Seja A um anel e seja B uma parte do conjunto A; diz-se que B é um *sub-anel* de A se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

1) B é fechado em relacão à adição e em relação à multiplicação definidas sôbre A;

2) as operações induzidas sôbre B pelas operações de A definem uma estrutura de anel sôbre o conjunto B.

A condição 1) impõe que $a+b \in B$ e $ab \in B$, quaisquer que sejam a e b em B e a condição 2) impõe que os axiomas A1-A4, M1 e D devem estar verificados em B. Para simplificar a linguagem também diremos que um subconjunto B, de um anel A, é um sub-anel de A se, e sòmente se, B é um anel em relação às operações de A.

TEOREMA 9 - Seja A um anel e seja B uma parte do conjunto A. B é um sub-anel de A se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) $B \neq \emptyset$;

b) quaisquer que sejam a e b em A, se $a \in A$ e se $b \in B$, então, $a+b \in B$ e $ab \in B$;

c) para todo a em A, se $a \in B$, então $-a \in B$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que o subconjunto B satisfaça as condições a), b) e c), portanto, em particular, está verificada a condição 1) da definição 9. Precisamos agora mostrar que os axiomas A1, A2, A3, A4, M1 e D são verdadeiros em B. Os axiomas A1, A2, M1 e D podem ser verificados do seguinte modo: por hipótese, êstes axiomas são verdadeiros quaisquer que sejam os elementos a, b e c de A e como B é uma parte de A êles também são verdadeiros para todos os elementos a, b e c de B.

A3 - Conforme a condição a) existe um elemento a_0 em B, logo, de acôrdo com c), $-a_0 \in B$ e então, em virtude de a), $a_0 + (-a_0) \in B$, ou seja, $0 \in B$ e é imediato que $a + 0 = a$ para todo a em B. Portanto, B tem elemento zero que é igual ao elemento zero de A.

A4 - É imediato, em virtude da condição c).

Fica assim demonstrado que B é um anel em relação às operações induzidas pelas operações de A e, portanto, B é um sub-anel de A. Recìprocamente, suponhamos que B seja um sub-anel de A; conforme a condição 1) da definição 9, B é fechado em relação às operações de A, logo, está satisfeita a condição b). O subconjunto B não é vazio, pois, de acôrdo com o axioma A3, B contém pelo menos o elemento zero 0_B; portanto, está verificada a condição a). Para verificar c) mostraremos, em primeiro lugar, que $0_B = 0$. Com efeito, temos $0_B + 0_B = 0_B = 0_B + 0$, portanto, conforme a lei do cancelamento da adição aplicada a elementos de A, teremos $0_B = 0$. Se a é um elemento qualquer de B, então, de acôrdo com o axioma A4, que é verdadeiro em B, existe $a' \in B$ tal que $a + a' = 0_B = 0$; esta igualdade nos mostra que a' também é o oposto de a em A, portanto, conforme a unicidade do oposto, temos $a' = -a$ e então $-a \in B$. ∎

Seja B um sub-anel de um anel A; podemos ter os seguintes casos: 1) A e B não têm elementos unidades; 2) A tem elemento unidade 1_A e B não tem elemento unidade; 3) A não tem elemento unidade e B tem elemento unidade 1_B; 4) A

tem elemento unidade 1_A, B tem elemento unidade 1_B e $1_A \neq 1_B$. 5) $1_A = 1_B$. Vejamos alguns exemplos para mostrar que êstes casos podem aparecer efetivamente. 1) Tomemos $A = 2\mathbf{Z}$ e $B = 4\mathbf{Z}$, isto é, A é o conjunto de todos os inteiros pares e B é o conjunto de todos os inteiros que são múltiplos de 4; é imediato que B é um sub-anel de A e que nem A e nem B têm elementos unidades. 2) Tomemos $A = \mathbf{Z}$ e $B = 2\mathbf{Z}$; é imediato que B é sub-anel de A e notemos que A tem elemento unidade, enquanto que B não tem elemento unidade. 3) Consideremos o anel produto de $\mathbf{Z}$ por $2\mathbf{Z}$: $A = \mathbf{Z} \times 2\mathbf{Z}$; seja B o subconjunto, de A, formado por todos os pares ordenados $(n,0)$, com n em $\mathbf{Z}$. É fácil verificar que B é sub-anel de A; o anel B tem elemento unidade que é o par $(1,0)$ e A não tem elemento unidade, pois $2\mathbf{Z}$ não tem elemento unidade. 4) Consideremos o anel $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ que tem elemento unidade $1_A = (1,1)$ e seja B o subconjunto, de A, formado por todos os pares ordenados $(n,0)$, com n em $\mathbf{Z}$. É imediato que B é um sub-anel de A e que o par $1_B = (1,0)$ é o elemento unidade de B; neste caso, temos $1_A \neq 1_B$. 5) Tomemos $A = \mathbf{Q}$ e $B = \mathbf{Z}$; neste caso, A tem elemento unidade que é igual ao elemento unidade de B.

No caso 4) podemos demonstrar que 1_B é divisor próprio do zero em A. Com efeito, temos

$$1_B(1_A - 1_B) = 1_B \cdot 1_A - 1_B \cdot 1_B = 1_B - 1_B = 0 \quad \text{e} \quad 1_A - 1_B \neq 0.$$

No caso 5) diremos que B é um *sub-anel unitário* de A.

DEFINIÇÃO 10 - Seja K um corpo e seja M uma parte do conjunto K; diz-se que M é um *subcorpo* de K se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

1) M é fechado em relação à adição e em relação à multiplicação definidas sôbre K;

2) as operações induzidas sôbre M pelas operações de K definem uma estrutura de corpo sôbre o conjunto K.

Observemos que se M é um subcorpo de K, então M é necessàriamente um sub-anel de K. Demonstraremos o seguinte

TEOREMA 10 - Seja K um corpo e seja M uma parte do conjunto K. M é um subcorpo de K se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) o conjunto M tem pelo menos dois elementos;

b) quaisquer que sejam a e b em K, se $a \in M$ e se $b \in M$, então $a+b \in M$ e $ab \in M$;

c) para todo a em K, se $a \in M$, então $-a \in M$;

d) para todo a em K, se $a \in M$ e se $a \neq 0$, então $a^{-1} \in M$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que o subconjunto M satisfaça as condições a), b), c) e d). Em virtude do teorema 9, temos que M é um sub-anel de K, de onde vem, em particular, que o elemento zero de K pertence a M. Por outro lado, conforme a condição a), existe $a_0 \in M$ com $a_0 \neq 0$, logo, por d), $a_0^{-1} \in M$ e então $1 = a_0 a_0^{-1} \in M$; portanto, o conjunto M tem pelo menos dois elementos. Finalmente, a condição d) nos mostra que todo elemento não nulo, de M, tem inverso em M e fica assim demonstrado que M é um subcorpo de K. Recìprocamente, suponhamos que M seja um subcorpo de K, logo, M é um sub-anel de K e, portanto, conforme o teorema 9, estão satisfeitas as condições b) e c). Por outro lado, os elementos $0_M = 0$ e 1_M, com $1_M \neq 0$, pertencem a M; portanto, o conjunto M tem pelo menos dois elementos, ou seja, vale a condição a). Para verificar d) mostraremos, em primeiro lugar, que $1_M = 1$. Com efeito, temos $1_M \cdot 1_M = 1_M = 1_M \cdot 1$, portanto, de acôrdo com a lei restrita do cancelamento da multiplicação aplicada a elementos de K, teremos $1_M = 1$. Finalmente, se a é um elemento qualquer de M e se $a \neq 0$, então, de acôrdo com o axioma M4, que é verdadeiro em M, existe $a' \in M$ tal que $aa' = 1_M = 1$; portanto, conforme a unicidade do inverso, temos $a' = a^{-1}$ e então $a^{-1} \in M$. ∎

EXEMPLO 22 - O conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é um sub-anel unitário do corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais.

EXEMPLO 23 - O conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é um subcorpo do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais e $\mathbf{R}$, por sua vez, é um subcorpo do corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos.

EXEMPLO 24 - Consideremos o conjunto $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ de todos os números reais que são da forma $a+b\sqrt{2}$, com a e b racionais e mostremos que $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ é um subcorpo do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais. A condição a) do teorema 10 está evidentemente verificada e como

$$(a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2},$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}$$
$$-(a+b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2}$$

resulta que também valem as condições b) e c) do mesmo teorema. Falta verificar a condição d) e para isto notamos, inicialmente, que se $a+b\sqrt{2}\neq 0$, então, $a-b\sqrt{2}\neq 0$, pois, $\sqrt{2}$ é um número irracional. O número real $a+b\sqrt{2}\neq 0$ tem inverso em $\boldsymbol{R}$ e precisamos mostrar que êste inverso é da forma $c+d\sqrt{2}$, com c e d racionais; ora, temos

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

e basta escolher $c=a/(a^2-2b^2)$ e $d=-b/(a^2-2b^2)$.

TEOREMA 11 - A intersecção de uma família não vazia $(A_i)_{i\in I}$ de sub-anéis, de um anel A, é um sub-anel de A.

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $B=\bigcap_{i\in I}A_i$. Como $0\in A_i$, para todo $i\in I$, temos $0\in B$, logo $B\neq\emptyset$. Se a e b são dois elementos quaisquer de B, temos $a\in A_i$ e $b\in A_i$, para todo $i\in I$, de onde vem, $a+b\in B$, $ab\in B$ e $-a\in B$, ou seja, estão satisfeitas as condições b) e c) do teorema 9 e, portanto, B é um sub-anel de A. ∎

TEOREMA 12 - A intersecção de uma família não vazia $(M_i)_{i\in I}$ de subcorpos, de um corpo K, é um subcorpo de K.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme o teorema anterior, $M=\bigcap_{i\in I}M_i$ é um sub-anel de K e é imediato que M tem pelo menos dois elementos, pois $0\in M_i$ e $1\in M_i$ para todo $i\in I$. Se a é um elemento qualquer de M e se $a\neq 0$, temos $a\in M_i$, para todo $i\in I$, logo, conforme a parte d) do teorema 10, teremos $a^{-1}\in M_i$, para todo $i\in I$; portanto, $a^{-1}\in M$. ∎

Seja S um subconjunto de um anel comutativo A e consideremos a família $(A_i)_{i\in I}$ de todos os sub-anéis de A que contêm S; é imediato que esta família não é vazia, pois, $S\subset A$ e A é sub-anel de A. A intersecção da família (A_i) é um sub-anel de A que é denominado *sub-anel gerado pela parte* S e será indicado pela notação $[S]$; S, por sua vez, é chamado *sistema de geradores do sub-anel* $[S]$. Indiquemos por $\mathcal{M}$ o conjunto de todos os sub-anéis de A e ordenemos $\mathcal{M}$ por inclusão (exemplo 23, Capítulo I) e consideremos o subconjunto $\mathcal{T}$, de $\mathcal{M}$, formado por todos os sub-anéis A_i, de A, que contêm a parte S; é imediato que $[S]$ é o mínimo de $\mathcal{T}$ (definição 9, Capítulo I). Por causa disso, diremos que $[S]$ é o *menor*

sub-anel de A que contém a parte S. Portanto, se B é um sub-anel de A e se $S\subset B$, então $[S]\subset B$.

EXEMPLO 25 - Para todo anel comutativo A, temos $[\emptyset]=\{0\}$, $[\{0\}]=\{0\}$ e $[A]=A$.

Se B é um sub-anel de A e se S é um subconjunto de A, indicaremos por $B[S]$ o sub-anel gerado pela parte $A\cup S$, portanto, $B[S]$ indica o menor sub-anel de A que contém B e S. Se $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, indicaremos $B[S]$ pela notação $B[x_1,x_2,\cdots,x_n]$.

EXEMPLO 26 - Consideremos o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais e vamos mostrar que o sub-anel $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$, gerado por $\boldsymbol{Z}\cap\{\sqrt{2}\}$, é o conjunto B de todos os números reais que são da forma $a+b\sqrt{2}$, com a e b inteiros. Já tínhamos observamos no exemplo 7 que B é um sub-anel de $\boldsymbol{R}$ e como $\boldsymbol{Z}\subset B$ (basta escolher $b=0$) e $\sqrt{2}\in B$ (basta escolher $a=0$ e $b=1$), temos que $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]\subset B$. Por outro lado, seja $a+b\sqrt{2}$ um elemento qualquer de B; notando-se que a, b e $\sqrt{2}$ pertencem a $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$ resulta, em virtude do teorema 9, que $a+b\sqrt{2}$ também pertence a $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$ e, portanto, $B\subset\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$.

Seja S um subconjunto de um corpo K e consideremos a família $(M_i)_{i\in I}$ de todos subcorpos de K que contêm a parte S; é imediato que esta família é não vazia, pois $S\subset K$ e K é subcorpo de K. A intersecção da família (M_i) é um subcorpo de K, que é denominado *subcorpo gerado pela parte* S e será indicado por (S); S, por sua vez, é chamado *sistema de geradores do subcorpo* (S). É imediato que (S) é o menor (em relação à inclusão) subcorpo de K que contém a parte S; portanto, se M é um subcorpo de K e se $S\subset M$, então $(S)\subset M$.

Se M é um subcorpo de K e se S é uma parte de K, indicaremos por $M(S)$ o subcorpo gerado pela parte $M\cup S$; portanto, $M(S)$ é o menor subcorpo de K que contém M e S. Se $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, a notação $M(S)$ é substituída por

$$M(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

Em particular, a intersecção P de todos os subcorpos do corpo K é um subcorpo de K, que é denominado *corpo primo do corpo* K. Portanto, P é o menor subcorpo de K, ou seja, P está contido em qualquer subcorpo de K. Como o elemento unidade 1, de K, pertence a qualquer subcorpo de K, resulta

que P também pode ser definido como o subcorpo gerado pela parte $\{1\}$ de K: $P=(1)$. É imediato que se S é uma parte qualquer de K, então $(S)=P(S)$.

EXEMPLO 27 - Consideremos o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais e vamos mostrar que $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ é o conjunto M de todos os números reais da forma $a+b\sqrt{2}$, com a e b racionais. Já tínhamos observado no exemplo 23 que M é um subcorpo de $\boldsymbol{R}$ e como $\boldsymbol{Q}\subset M$ (basta escolher $b=0$) e $\sqrt{2}\in M$ (basta escolher $a=0$ e $b=1$), temos $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})\subset M$. Por outro lado, seja $a+b\sqrt{2}$ um elemento qualquer de M; notando-se que a, b e $\sqrt{2}$ são elementos de $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ resulta, em virtude do teorema 10, que $a+b\sqrt{2}$ também pertence a $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$; portanto, $M\subset\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ e então $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})=M$. Observemos que se pode demonstrar fàcilmente que $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ é o conjunto de todos os números reais da forma $a+b\sqrt{2}$, com a e b racionais, portanto, temos $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]=\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$.

EXERCÍCIOS

31. Determinar todos os sub-anéis do anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros. Sugestão: supondo-se que $A\neq\{0\}$ seja um sub-anel de $\boldsymbol{Z}$, mostrar que existe o mínimo do conjunto dos elementos estritamente positivos de A e descrever A em têrmos dêste mínimo.

32. Determinar quais dos seguintes subconjuntos B, do corpo $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais, são sub-anéis de $\boldsymbol{Q}$:

a) $B=\{a\in\boldsymbol{Q} \mid a$ é um inteiro par$\}$;

b) $B=\{a\in\boldsymbol{Q} \mid a$ é um inteiro ímpar$\}$;

c) $B=\{x\in\boldsymbol{Q} \mid x=a/b$, com a e b inteiros e $2\nmid b\}$;

d) $B=\{x\in\boldsymbol{Q} \mid x=a/b$, com a e b inteiros e $4\nmid b\}$;

e) $B=\{x\in\boldsymbol{Q} \mid x=a/b$, com a e b inteiros, $b=2^n3^m$, m e n números naturais quaisquer$\}$.

33. Determinar quais dos seguintes subconjuntos M, do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais, são subcorpos de $\boldsymbol{R}$:

a) $M=\{x\in\boldsymbol{R} \mid x=a+b\sqrt[3]{2}$, a e b inteiros$\}$;

b) $M=\{x\in\boldsymbol{R} \mid x=a+b\sqrt[3]{2}$, a e b racionais$\}$;

c) $M=\{x\in\boldsymbol{R} \mid x=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, a, b e c racionais$\}$;

d) $M=\{x\in\boldsymbol{R} \mid x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt[4]{2}$, a, b e c racionais$\}$.

34. Mostrar que o único subcorpo do corpo $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais é o próprio $\boldsymbol{Q}$.

35. Mostrar que o único subcorpo do corpo $\boldsymbol{Z}_p$ dos inteiros módulo p é o próprio $\boldsymbol{Z}_p$.

36. Mostrar que os únicos subcorpos do corpo $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ (ver o exemplo 27) são $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$.

37. Determinar todos os sub-anéis do anel $\boldsymbol{Z}_{12}$ dos inteiros módulo 12.

38. Dar exemplos de partes não vazias do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais que satisfazem uma das condições do teorema 9 (separar a condição b) em duas) e que não são sub-anéis de $\boldsymbol{R}$.

39. Dar exemplos de partes M do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais que satisfazem duas e sòmente duas das condições do teorema 10 (separar a condição b) em duas) e não satisfazem as outras três.

40. Descrever os sub-anéis $\boldsymbol{Z}[\sqrt{3}]$, $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ e $\boldsymbol{Z}[2,\sqrt{3}]$ do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais.

41. Descrever os subcorpos $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ e $\boldsymbol{Q}(1,\sqrt{2})$ do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais.

42. Mostrar que $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\boldsymbol{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

43. Demonstrar que um subconjunto B, de um anel A, é um sub-anel de A se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições: a) $B\neq\emptyset$; 2) $a\in B$ e $b\in B\Longrightarrow a-b\in B$; 3) $a\in B$ e $b\in B\Longrightarrow ab\in B$.

44. Demonstrar que um subconjunto M, de um corpo K, é um subcorpo de K se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições: 1) M tem pelo menos dois elementos; 2) $a\in M$ e $b\in M\Longrightarrow a-b\in M$, 3) $a\in M$ e $b\in M\Longrightarrow ab\in M$; 4) $a\in M$ e $a\neq 0\Longrightarrow a^{-1}\in M$.

45. Seja B um sub-anel de um anel A e sejam S e T duas partes quaisquer de A; mostrar que $B[S\cup T]=(B[S])[T]=(B[T])[S]$. Concluir daí que se $S\cap B=S_1$ e $S_2=\complement_S S_1$, então, $B[S]=B[S_2]$.

46. Seja M um subcorpo de um corpo K e sejam S e T duas partes quaisquer de K; mostrar que $M(S\cup T)=(M(S))(T)=(M(T))(S)$. Concluir daí que se $S\cap M=S_1$ e $S_2=\complement_S S_1$, então, $M(S)=M(S_2)$.

1.7 - HOMOMORFISMOS

Nesta secção só consideraremos anéis comutativos apesar de que os conceitos que estudaremos também podem ser introduzidos para anéis quaisquer.

DEFINIÇÃO 11 - Sejam A e A' dois anéis comutativos e seja f uma aplicação do conjunto A no conjunto A'; diz-se que f é um *homomorfismo* do anel A no anel A' se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$;

2) $f(ab)=f(a)f(b)$,

quaisquer que sejam a e b em A.

EXEMPLO 28 - Com as notações acima, a aplicação $f: A\longrightarrow A'$ definida por $f(a)=0$ (onde 0 também indica o elemento zero do anel A') é um homomorfismo de A em A', que é denominado *homomorfismo nulo*.

Se f é um homomorfismo de A em A' e se f é uma aplicação sobrejetora, diremos que f é um *epimorfismo de A em A'* ou que f é um *homomorfismo sobrejetor de A em A'*.

Se f é um homomorfismo de A em A' e se f é uma aplicação injetora, diremos que f é um *monomorfismo de A em A'* ou que f é um *homomorfismo injetor de A em A'*.

Finalmente, se f é um homomorfismo de A em A' e se f é uma aplicação bijetora, diremos que f é um *isomorfismo de A em A'* ou que f é um *homomorfismo bijetor de A em A'*. Neste caso, também se diz que o anel A é *isomorfo* ao anel A' e escreveremos $A \cong A'$ (leia-se: A é isomorfo de A').

Um homomorfismo de A em A também é denominado *endomorfismo* de A e um isomorfismo de A em A é chamado *automorfismo* de A.

EXEMPLO 29 - A aplicação idêntica de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Q}$ é um monomorfismo do anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros no corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais.

EXEMPLO 30 - Seja $m>1$ um número inteiro e consideremos o anel $\mathbf{Z}_m$ dos inteiros módulo m; a aplicação canônica q de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}_m$, isto é, a aplicação $q: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_m$ definida por $q(a) = \overline{a}$ (ver o exemplo 37, Capítulo I) é um epimorfismo.

EXEMPLO 31 - Consideremos o corpo $K = \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ (ver o exemplo 26) e seja $f: K \longrightarrow K$ definida por $f(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$; é fácil verificar que f é um automorfismo do corpo K.

Para todo homomorfismo $f: A \longrightarrow A'$, a imagem da aplicação f, que é indicada por $Im(f)$ (ver o §3.1, Capítulo I), passa a ser denominada *imagem do homomorfismo* f. É imediato que f é um epimorfismo se, e sòmente se, $Im(f) = A'$. O conjunto de todos os elementos a, de A, tais que $f(a) = 0$ é denominado *núcleo* ou *kernel* do homomorfismo f e será indicado pela notação $Ker(f)$ (leia-se: kernel de f). Notemos que $Ker(f)$ não é vazio, pois, $f(0) = 0$ e é fácil verificar que f é um monomorfismo de A em A' se, e sòmente se, $Ker(f) = \{0\}$.

TEOREMA 13 - Para todo homomorfismo f de um anel comutativo A num anel comutativo A' valem as seguintes propriedades:

a) $f(-a) = -f(a)$;

b) $Im(f)$ é um sub-anel de A'.

DEMONSTRAÇÃO

a) Temos $0 = f(0) = f(a+-(a)) = f(a)+f(-a)$, portanto, $f(-a) = -f(a)$.

b) É imediato que $Im(f) \neq \emptyset$, pois, $f(0) = 0$. Se a' e b' são dois elementos quaisquer de $Im(f)$, existem a e b em A tais que $f(a) = a'$ e $f(b) = b'$, logo,

$$a' + b' = f(a)+f(b) = f(a+b),$$
$$a'b' = f(a)f(b) = f(ab),$$
$$-a' = -f(a) = f(-a),$$

de onde vem que $a'+b'$, $a'b'$ e $-a'$ são elementos de $Im(f)$ e, portanto, conforme o teorema 9, $Im(f)$ é um sub-anel de A'. ∎

TEOREMA 14 - Sejam A e A' dois anéis comutativos não nulos e seja f um epimorfismo de A em A'; temos

a) se A tem elemento unidade 1, então, $f(1)$ é o elemento unidade de A';

b) se A tem elemento unidade 1 e se $a \in A$ é inversível, então, $f(a)$ é inversível em A' e $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Se a' é um elemento qualquer de A' existe $a \in A$ tal que $f(a) = a'$ e então

$$a'f(1) = f(a)f(1) = f(a \cdot 1) = f(a) = a';$$

portanto, $f(1)$ é o elemento unidade de A'.

b) Em virtude da parte anterior $f(1)$ é o elemento unidade de A' e de $a \cdot a^{-1} = 1$ resulta $f(a)f(a^{-1}) = f(1)$, portanto, $f(a)$ é inversível e $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. ∎

TEOREMA 15 - Sejam A, A' e A'' três anéis comutativos; se f é um homomorfismo de A em A' e se g é um homomorfismo de A' em A'', então, a aplicação composta $g \circ f$ é um homomorfismo de A em A''.

DEMONSTRAÇÃO - Temos

$$(g \circ f)(a+b) = g(f(a+b)) = g(f(a)+f(b)) =$$
$$= g(f(a))+g(f(b)) = (g \circ f)(a)+(g \circ f)(b)$$

e

$$(g \circ f)(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) =$$
$$= g(f(a))g(f(b)) = (g \circ f)(a) \cdot (g \circ f)(b),$$

quaisquer que sejam a e b em A. ∎

COROLÁRIO - Com as notações do teorema anterior, se $A \cong A'$ e se $A' \cong A''$, então $A \cong A''$.

Basta observar que a composta de duas bijeções é uma bijeção.

TEOREMA 16 - Se f é um isomorfismo de um anel A num anel A', então a aplicação inversa de f é um isomorfismo de A' em A.

DEMONSTRAÇÃO - Já sabemos que f^{-1} é uma bijeção de A' em A; por outro lado, se a' e b' são dois elementos quaisquer de A', existem a e b em A tais que $f(a)=a'$ e $f(b)=b'$, logo

$$a'+b' = f(a)+f(b) = f(a+b)$$

e

$$a'b' = f(a)f(b) = f(ab),$$

de onde vem

$$f^{-1}(a'+b') = a+b = f^{-1}(a')+f^{-1}(b')$$

e

$$f^{-1}(a'b') = ab = f^{-1}(a')f^{-1}(b').$$ ∎

O teorema acima nos mostra que se $A \cong A'$, então $A' \cong A$; por causa disso podemos dizer que A e A' são isomorfos.

Conforme o teorema 10 do Capítulo I, temos o seguinte

TEOREMA 17 - Para que um homomorfismo f de um anel A num anel A' seja um isomorfismo é necessário e suficiente que exista uma aplicação $g: A' \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_{A'}$; neste caso, tem-se $g = f^{-1}$.

Finalmente, demonstraremos o seguinte

TEOREMA 18 - Se f é um homomorfismo de um corpo K num anel A, temos: ou f é o homomorfismo nulo ou então f é um monomorfismo de K em A.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos distinguir dois casos: a) $f(1)=0$ e b) $f(1)\neq 0$, onde 1 indica o elemento unidade de K. No caso a) temos

$$f(a) = f(a\cdot 1) = f(a)f(1) = f(a)\cdot 0 = 0,$$

para todo a em K; portanto, f é a aplicação nula de K em A. No caso b), consideremos um elemento $a \in K$ tal que $f(a)=0$ e suponhamos por absurdo que $a \neq 0$; temos $f(1) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = 0 \cdot f(a^{-1}) = 0$, contra a hipótese. Isto nos mostra que $Ker(f)=\{0\}$; portanto, f é um monomorfismo. ∎

Seja $m>1$ um número natural e consideremos o conjunto

$$F_m = \{0,1,2,\cdots,m-1\}.$$

Definiremos uma aperação de adição $\oplus$ sôbre F_m do seguinte modo: se a e b são dois elementos quaisquer de F_m, então $a \oplus b$ é o resto da divisão euclidiana de $a+b$ por m. Anàlogamente, define-se $a \odot b$ como o resto da divisão euclidiana de ab por m. Deixaremos a cargo do leitor a verificação de que $(F_m, \oplus, \odot)$ é um anel comutativo com elemento unidade.

TEOREMA 19 - A aplicação $f: F_m \longrightarrow \mathbf{Z}_m$, definida por $f(a)=\bar{a}$, é um isomorfismo do anel $(F_m, \oplus, \odot)$ no anel $\mathbf{Z}_m$ dos inteiros módulo m.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que f é uma bijeção e se a e b são dois elementos quaisquer de F_m, temos

$$a \oplus b \equiv a+b \ (\text{mod. } m) \quad \text{e} \quad a \odot b \equiv ab \ (\text{mod. } m),$$

logo,

$$f(a \oplus b) = \overline{a \oplus b} = \overline{a+b} = \bar{a}+\bar{b} = f(a)+f(b)$$

e

$$f(a \odot b) = \overline{a \odot b} = \overline{ab} = \bar{a}\bar{b} = f(a)f(b);$$

portanto, f é um isomorfismo. ∎

Por causa do teorema acima diz-se que o anel $(F_m, \oplus, \odot)$ também é o anel dos inteiros módulo m; substituiremos, freqüentemente, o anel $\mathbf{Z}_m$ pelo anel F_m.

EXERCÍCIOS

47. Mostrar que o único automorfismo do anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é o automorfismo idêntico.

48. Mostrar que o único automorfismo do corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais é o automorfismo idêntico.

49. Mostrar que o único automorfismo do corpo $\mathbf{Z}_p$ dos inteiros módulo p é o automorfismo idêntico.

50. Demonstrar que só existem dois automorfismos do corpo $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ (ver o exemplo 27): o automorfimo idêntico e o automorfismo definido no exemplo 30.

51. Mostrar que os subcorpos $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ e $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$, do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais, não são isomorfos.

52. Demonstrar que um homomorfismo f de um anel comutativo A num anel comutativo A' é um isomorfismo se, e sòmente se, estiver verificada a seguinte condição: para todo $a \in A$, se $f(a)=0$, então $a=0$.

53. Demonstrar que se f é um epimorfismo não nulo de um anel de integridade num anel não nulo A', então A' não é, necessàriamente, um anel de integridade.

54. Verificar, detalhadamente, que $(F_m, \oplus, \odot)$ é um anel comutativo com elemento unidade.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §1

55. Determinar tôdas as estruturas de anel sôbre o conjunto $A=\{0,a\}$, onde $a \neq 0$.

56. Determinar tôdas as estruturas de anel sôbre o conjunto $A=\{0,a,b\}$, onde 0, a e b são distintos dois a dois.

57. Suponhamos que sôbre um conjunto não vazio A estejam definidas operações de adição e de multiplicação que satisfazem os seguintes axiomas: A) a operação de adição define uma estrutura de grupo (não necessàriamente comutativo) sôbre A; M) a operação de multiplicação define uma estrutura de monóide sôbre A; D) a operação de multiplicação é distributiva à esquerda e à direita em relação à adição. Nestas condições, demonstrar que estas operações definem uma estrutura de anel com elemento unidade sôbre o conjunto A. Sugestão: desenvolver $(1+1)(x+y)$ de dois modos diferentes.

58. Seja $(A,+,\cdot)$ um anel e consideremos a operação $*$ definida sôbre A por $a*b=ba$. 1) Mostrar que $(A,+,*)$ é um anel (que é denominado anel oposto de A e é indicado por $\overset{\circ}{A}$). 2) Uma bijeção f de um anel A num anel B é um anti-isomorfismo se, e sòmente se, $f(a+b)=f(a)+f(b)$ e $f(ab)=f(b)f(a)$, quaisquer que sejam a e b em A. Mostrar que f é um anti-isomorfismo de A em B se, e sòmente se, f é um isomorfismo de A em $\overset{\circ}{B}$.

59. Seja S uma parte não vazia de um anel A; chama-se *centralizador* de S ao conjunto de todos os elementos x de A tais que $xa=ax$, para todo x em S; indica-se o centralizador de S pela notação $C(S)$. 1) Mostrar que $C(S)$ é um sub-anel de A. 2) Mostrar que se A tem elemento unidade e se $a\in C(S)$ é inversível, então $a^{-1}\in C(S)$. 3) Se S e T são partes não vazias de A e se $S\subset T$, então $C(T)\subset C(S)$. 4) $S\subset C(C(S))$, para tôda parte não vazia S de A. 5) $C(C(C(S)))=C(S)$ para tôda parte não vazia S de A.

60. Chama-se *centro* de um anel A ao centralizador de A. Mostrar que o centro de A é um sub-anel comutativo de A.

61. Chama-se *comutador* de dois elementos x e y de um anel A, ao elemento $[x,y]=xy-yx$. 1) Mostrar que x e y são permutáveis se, e sòmente se, $[x,y]=0$. 2) Verificar as seguintes igualdades: a) $[x,x]=0$; b) $[x,y]=-[y,x]$ e c) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ (*identidade de Jacobi*).

62. Diz-se que um elemento e, de um anel A, é um elemento unidade à esquerda (resp., à direita) se, e sòmente se, $e\cdot a=a$ (resp., $a\cdot e=a$) para todo a em A. Demonstrar que se A tem um único elemento unidade e à esquerda (ou à direita), então A tem elemento unidade. Sugestão: para todo a em A considerar o elemento $a-ae+e$ e mostrar que $a-ae+e=e$.

63. Seja A um anel tal que $x^2-x\in C(A)$ para todo x em A, onde $C(A)$ é o centro de A (ver o exercício 60); demonstrar que A é comutativo. Sugestão: mostrar que $xy+yx\in C(A)$ e que $x^2\in C(A)$.

64. Seja A um anel não nulo que satisfaz a seguinte condição: quaisquer que sejam x e y em A, existe um elemento $u\in A$ tal que $xu=y$ ou $ux=y$. Mostrar que A é um anel com elemento unidade. Sugestão: Verificar que existe um elemento u que não é um divisor do zero.

65. Seja A um anel com elemento unidade e seja $a\in A$ um elemento inversível. 1) Mostrar que a aplicação $\sigma_a: A\to A$ definida por $\sigma_a(x)=axa^{-1}$ é um automorfismo (denominado *automorfismo interno* de A). 2) Mostrar que o conjunto de todos os automorfismos internos de A é um grupo em relação à composição de aplicações (que é denominado *grupo dos automorfismos internos do anel* A).

66. Diz-se que um elemento b de um anel A é *nilpotente* se, e sòmente se, existe $n\in N^*$ tal que $b^n=0$. 1) Todo elemento não nulo e nilpotente é um divisor próprio do zero. 2) Se A tem elemento unidade e se b é nilpotente, então $1-b$ é inversível. 3) Se b é nilpotente e se b e c são permutáveis, então bc é nilpotente. 4) Se b e c são nilpotentes e permutáveis, então $b+c$ é nilpotente.

67. Seja a um elemento de um anel A e consideremos a aplicação $f_a: A\to A$ definida por $f_a(x)=[x,a]=xa-ax$. Mostrar que se a é nilpotente, então, existe um número natural não nulo q tal que $f_a^q(x)=0$, para todo x em A, onde f_a^q indica o composto $f_a\circ\cdots\circ f_a$ (q vêzes).

68. Seja A um anel tal que $x^2=x$ para todo x em A (um anel que satisfaz esta condição é denominado *anel de Boole*). 1) Mostrar que $x=-x$ para todo x em A. 2) Demonstrar que A é comutativo. 3) Demonstrar que se A não tem divisores próprios do zero, então A é um anel nulo ou A tem dois elementos.

69. Verificar que o anel $(P(E),\Delta,\cap)$ definido no exercício 2 é um anel de Boole.

70. Seja A um conjunto não vazio e suponhamos que estejam definidas operações de adição e de multiplicação sôbre A que satisfazem os axiomas A1, LCA e D. Demonstrar que se $x^2=x$, para todo x em A, então A é um anel de Boole. Sugestão: mostrar que $x+x+x=x+x$ e deduzir daí que $x+x$ é o elemento neutro para a adição.

71. Demonstrar que a aplicação $\bar{a}\to\bar{a}^p$, de $\boldsymbol{Z}_p$ em $\boldsymbol{Z}_p$, é um automorfismo, portanto, conforme o exercício 49, tem-se $\bar{a}^p=\bar{a}$. Deduzir daí que $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$, para todo número inteiro a tal que $p\nmid a$ (teorema de Fermat).

72. Demonstrar que os únicos elementos x de um corpo K que satisfazem a condição $x^2=1$ são 1 e -1. Concluir daí que os subconjuntos $\{x,x^{-1}\}$, com $x\neq 0,1,-1$, formam uma partição de $K-\{0,1,-1\}$.

73. Aplicar o exercício precedente ao corpo $\boldsymbol{Z}_p$ dos inteiros módulo p para mostrar que $\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\ldots\cdot\overline{p-1}=\overline{-1}$.

74. Deduzir do exercício anterior que $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}$, para todo número primo $p>1$. Portanto, conforme o exercício 40 do Capítulo III, vale a seguinte propriedade: um número natural $p>1$ é primo se, e sòmente se, $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}$ (teorema de Wilson).

75. Seja A um anel comutativo e não nulo; se o conjunto A é finito e se todo elemento de A^* é regular para a multiplicação, então A é um corpo.

76. Seja A um anel comutativo sem elemento unidade e consideremos o produto cartesiano $B=\boldsymbol{Z}\times A$ dos conjuntos $\boldsymbol{Z}$ e A; coloquemos, por definição

$$(m,a)+(n,b)=(m+n,\,a+b)$$

e

$$(m,a)\cdot(n,b)=(mn,\,ma+nb+ab),$$

quaisquer que sejam os pares ordenados (m,a) e (n,b) de B. a) Mostrar que estas operações definem uma estrutura de anel comutativo sôbre o conjunto B. b) Verificar que $(1,0)$ é o elemento unidade do anel B. c) Mostrar que a aplicação $a \to (0,a)$, de A em B, é um monomorfismo. (Portanto, todo anel comutativo sem elemento unidade pode ser imerso num anel comutativo com elemento unidade.)

77. Sejam p e q dois números naturais primos, com $p \neq q$. Demonstrar que o anel $\mathbf{Z}_{pq}$ é isomorfo ao anel produto $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_q$. Sugestão: existem inteiros r e s tais que $rq+ps=1$, logo, $x = xrq+xsp = x_1+x_2$ para todo número inteiro x; indicando-se por φ_p (resp., φ_q) a aplicação quociente de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}_p$ (resp., $\mathbf{Z}_q$), mostrar que $\overline{x} \to (\varphi_p(x_2), \varphi_q(x_2))$ é um isomorfismo de $\mathbf{Z}_{pq}$ em $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_q$.

78. Consideremos o produto cartesiano $\mathbf{Z}_{11} \times \mathbf{Z}_{11}$ do conjunto $\mathbf{Z}_{11}$ por si mesmo e coloquemos, por definição,

$$(a,b)+(c,d) = (a+c\,,\, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac+7by\,,\, ad+bc).$$

Mostrar que estas operações definem uma estrutura de corpo sôbre o conjunto $\mathbf{Z}_{11} \times \mathbf{Z}_{11}$.

§2 - CORPO DE FRAÇÕES DE UM ANEL DE INTEGRIDADE

Dados dois números inteiros a e b, com $b \neq 0$, existe um número inteiro x tal que $bx = a$ se, e sòmente se, $b|a$; portanto, só podemos considerar os quocientes ou frações a/b quando a é múltiplo inteiro de b e $b \neq 0$. Para eliminar estas restrições mostraremos que se pode construir um corpo $\mathbf{Q}$, ampliação de $\mathbf{Z}$, onde sempre seja possível considerar o quociente a/b de dois números inteiros a e b desde que $b \neq 0$. Notemos desde já que a fração a/b $(b \neq 0,\ b|a)$ satisfaz a equação $dx = c$ $(d \neq 0,\ d|c)$ se, e sòmente se, $ad = bc$; isto nos mostra que não basta introduzir os novos elementos como pares ordenados de números inteiros, sendo necessário estabelecer um critério para que dois pares ordenados representem a mesma fração. O corpo $\mathbf{Q}$ que construiremos é uma extensão mínima de $\mathbf{Z}$ no seguinte sentido: se $\mathbf{Z}$ é um sub-anel de um corpo K, então existe um subcorpo Q' de K que é isomorfo a $\mathbf{Q}$ (ver o teorema 25).

Um outro modo de considerar o problema acima é o seguinte: notamos, inicialmente, que -1 e 1 são os únicos elementos simetrizáveis do semigrupo multiplicativo $(\mathbf{Z},\cdot)$; procura-se, então, ampliar o conjunto $\mathbf{Z}$ com a introdução de novos elementos de modo que todo número inteiro não nulo, seja inversível e, neste caso, pode-se definir a fração $a/b\,(b \neq 0)$ pelo produto ab^{-1}. Trata-se, portanto, de aplicar o processo de simetrização de uma operação à multiplicação definida sôbre $\mathbf{Z}^*$ (ver a introdução do §2 do Capítulo III).

Na secção 2.1 estudaremos o problema acima para o caso de um anel de integridade qualquer A construindo, então, o corpo de frações de A, e depois obteremos, como caso particular, o corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais (§2.2). Utilizaremos no Capítulo VI os resultados do §1.1 para a construção do corpo de frações racionais. Terminaremos êste parágrafo com a introdução dos conceitos de característica de um anel (§2.3) e de corpo primo (§2.4).

2.1 - CONSTRUÇÃO DO CORPO DE FRAÇÕES DE UM ANEL DE INTEGRIDADE

Sejam a e b dois elementos de um anel de integridade A; diz-se que a *é um múltiplo de* b se, e sòmente se, existe c em A tal que $a = bc$. Se a é um múltiplo de b e se $b \neq 0$, então o elemento c é único; êste elemento passa a ser denominado *quociente de* a *por* b e será indicado pela notação $\frac{a}{b}$ ou a/b. Em particular, se b é inversível, tem-se $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. O elemento $\frac{a}{b}$ também é chamado *fração de têrmos* a *e* b ou de *numerador* a e *denominador* b. Portanto, tem sentido considerar uma fração $\frac{a}{b}$, de elementos de A, se, e sòmente se, $b \neq 0$ e a é múltiplo de b. Observemos que se o anel de integridade A é um corpo, então existe sempre o quociente de a por $b \neq 0$ e temos $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ (ver o §1.4).

Supondo-se que o anel de integridade A seja um sub-anel de um corpo K, dados a e b em A, com $b \neq 0$, pode-se considerar a fração $\frac{a}{b} \in K$ definida por $\frac{a}{b} = ab^{-1}$, onde b^{-1} indica o inverso de b em K. Notemos que esta fração é um elemento de K que, em geral, não pertence a A; temos $\frac{a}{b} \in A$ se, e sòmente se, a é múltiplo (em A) do elemento b. Valem para estas frações as fórmulas dadas no teorema 4.

TEOREMA 19 - Se A é um sub-anel unitário de um corpo K, então o subcorpo (A) gerado por A é o conjunto M de tôdas as frações $\frac{a}{b}$, com a e b em A e $b \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que o conjunto M tem pelo menos dois elementos e as fórmulas (20), (21), (22) e (23) nos mostram que estão satisfeitas as condições b), c) e d) do teorema 10; portanto, M é um subcorpo de K, como $A \subset M$, pois, $\frac{a}{1} = a$, resulta que $(A) \subset M$. Por outro lado, se $\frac{a}{b}$ (com a e b em A e $b \neq 0$) é um elemento qualquer de M, temos que a e b são elementos do subcorpo (A), logo, $b^{-1} \in (A)$ e então $ab^{-1} \in (A)$, ou seja, $M \subset (A)$. ∎

DEFINIÇÃO 12 - Se A é um sub-anel unitário de um corpo K, chama-se *corpo de frações de A em K* ao subcorpo (A), de K, gerado por A.

De acôrdo com o teorema acima, o corpo de frações de A em K é o subconjunto formado por todos os elementos que são da forma $\frac{a}{b}$, com a e b em A e $b \neq 0$, ou seja, é o conjunto de tôdas as frações de elementos de A cujos denominadores são diferentes de zero. Lembremos ainda que o corpo de frações de A em K é o menor (em relação à inclusão) subcorpo de K que contém A.

No que se segue construiremos o «corpo de frações de um anel de integridade A» sem supor que A seja um sub-anel de um determinado corpo.

Seja A um anel de integridade e consideremos o produto cartesiano $E = A \times A^*$ dos conjuntos A e $A^* = A - \{0\}$. Definiremos uma relação R sôbre o conjunto E do seguinte modo

DEFINIÇÃO 13 - Se (a,b) e (c,d) são dois elementos quaisquer de E, então, colocaremos $(a,b)R(c,d)$ se, e sòmente se, $ad = bc$.

Por exemplo, temos $(a,a)R(b,b)$ quaisquer que sejam os elementos não nulos a e b de A.

TEOREMA 21 - A relação R, introduzida pela definição 13, é uma relação de equivalência sôbre E.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar as condições E1, E2 e E3 da definição de relação de equivalência (ver a definição 6 do Capítulo I).

E1. Para todo elemento (a,b) de E temos $(a,b)R(a,b)$, pois, $ab = ba$, em virtude do axioma M2.

E2. Sejam (a,b) e (c,d) dois elementos quaisquer de E e suponhamos que $(a,b)R(c,d)$, ou seja, que $ad = bc$; daqui resulta, pelo axioma M2, $da = cb$ ou $cb = da$, portanto, $(c,d)R(a,b)$.

E3. Sejam (a,b), (c,d) e (e,f) três elementos quaisquer de E e suponhamos que $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$, logo, $ad = bc$ e $cf = de$; daqui resulta $(ad)f = (bc)f$ e $b(cf) = b(de)$, portanto, $(af)d = (be)d$, de onde vem pela lei restrita do cancelamento da multiplicação, $af = be$ e então $(a,b)R(e,f)$. ∎

Se (a,b) é um elemento qualquer de E indicaremos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência módulo R determinada por (a,b), isto é, $\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in E \mid (x,y)R(a,b)\}$.

O conjunto quociente de E pela relação de equivalência R será indicado por K, isto é, $K = E/R = (A \times A^*)/R$. Conforme o teorema 4 do Capítulo I temos $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$ se, e sòmente se, $(a,b)R(c,d)$ e lembremos que o conjunto K, de tôdas as classes de equivalência módulo R, é uma partição de $E = A \times A^*$.

Definiremos a soma e o produto de dois elementos quaisquer $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, de K, por meio de

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc, bd)} \quad \text{e} \quad \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac, bd)}.$$

Precisamos verificar, inicialmente, que estas definições não dependem dos representantes (a,b) e (c,d) das classes de equivalência $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, isto é, precisamos mostrar que se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então,

$$\overline{(ad+bc, bd)} = \overline{(a'd'+b'c', b'd')} \tag{25}$$

e

$$\overline{(ac, bd)} = \overline{(a'c', b'd')} \tag{26}$$

Com efeito, por hipótese, temos $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$, logo,

$$(ad+bc)(b'd') = (ab')(dd') + (cd')(bb') = (ba')(dd') + (dc')(bb') = bd(a'd'+b'c')$$

e

$$(ac)(b'd') = (ab')(cd') = (ba')(dc') = (bd)(a'c');$$

portanto, $(ad+bc, bd)R(a'd'+b'c', b'd')$ e $(ac, bd)R(a'c', b'd')$ de onde resultam imediatamente as igualdades (25) e (26).

Ficam assim definidas operações de adição e de multiplicação

$$(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}) \mapsto \overline{(ad+bc, bd)}$$

e

$$(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}) \mapsto \overline{(ac, bd)}$$

sôbre o conjunto quociente $K = (A \times A^*)/R$ e temos o seguinte

TEOREMA 22 - As operações acima definem uma estrutura de corpo comutativo sôbre o conjunto K.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar que valem os axiomas A1-A4, M1-M4 e D; só faremos a verificação de A3, A4, M3 e M4, e deixaremos os outros a cargo do leitor.

A3. Considerando-se a classe de equivalência $0' = \overline{(0,1)}$ temos, para todo elemento $\overline{(a,b)}$ de K:

$$\overline{(a,b)} + 0' = \overline{(a,b)} + \overline{(0,1)} = \overline{(a\cdot 1 + b\cdot 0, b\cdot 1)} = \overline{(a,b)};$$

portanto, $0'$ é o elemento neutro para a operação de adição definida sôbre K. Notemos que um par ordenado $(x,y)\in A\times A^*$ pertence à classe de equivalência $0' = \overline{(0,1)}$ se, e sòmente se, $x = 0$; portanto, $\overline{(0,1)} = \overline{(0,y)}$ para todo $y\in A^*$.

A4. Seja (a,b) um elemento qualquer de K e consideremos a classe de equivalência $\overline{(-a,b)}$; temos

$$\overline{(a,b)} + \overline{(-a,b)} = \overline{(a\cdot b + b(-a), b^2)} = \overline{(0,b^2)} = \overline{(0,1)} = 0';$$

portanto, $\overline{(-a,b)}$ é o oposto de $\overline{(a,b)}$: $\overline{(-a,b)} = -\overline{(a,b)}$.

M3. Considerando-se a classe de equivalência $1' = \overline{(1,1)}$, temos $1' \neq 0'$ e para todo elemento $\overline{(a,b)}$ de K teremos

$$\overline{(a,b)}\cdot 1' = \overline{(a,b)}\cdot\overline{(1,1)} = \overline{(a\cdot 1, b\cdot 1)} = \overline{(a,b)};$$

portanto, $1'$ é o elemento neutro para a operação de multiplicação definida sôbre K. Notemos que um par $(x,y)\in A\times A^*$ é elemento da classe de equivalência $1' = \overline{(1,1)}$ se, e sòmente se, $x = y$; portanto, $\overline{(1,1)} = \overline{(x,x)}$ para todo $x\in A^*$.

M4. Seja $\overline{(a,b)}$ um elemento não nulo de K, logo, $a \neq 0$ e podemos, então, considerar a classe de equivalência $\overline{(b,a)}\in K$; temos $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(b,a)} = \overline{(ab,ba)} = \overline{(ab,ab)} = \overline{(1,1)} = 1'$, portanto, o elemento $\overline{(a,b)}$ é inversível e $(\overline{(a,b)})^{-1} = \overline{(b,a)}$. ∎

TEOREMA 23 - O subconjunto

$$A' = \{\overline{(a,b)}\in K \mid b = 1\}$$

é um sub-anel unitário de K e, além disso, o corpo de frações de A' em K e o próprio K.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que $1' = \overline{(1,1)}\in A'$ e, por outro lado, se $\overline{(a,1)}$ e $\overline{(b,1)}$ são elementos quaisquer de A', temos

$$\overline{(a,1)} + \overline{(b,1)} = \overline{(a\cdot 1 + 1\cdot b, 1\cdot 1)} = \overline{(a+b,1)},$$

$$\overline{(a,1)}\cdot\overline{(b,1)} = \overline{(ab,1)},$$

$$-\overline{(a,1)} = \overline{(-a,1)};$$

portanto, estão satisfeitas as condições b) e c) do teorema 9, logo, A' é um sub-anel unitário de K. Finalmente, para todo elemento $\overline{(a,b)}$ de K, temos

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a,1)}\cdot\overline{(1,b)} = \overline{(a,1)}\cdot(\overline{(b,1)})^{-1} = \overline{(a,1)}/\overline{(b,1)};$$

portanto, K é o corpo de frações de A' em K. ∎

TEOREMA 24 - A aplicação $f: A \to A'$, definida por $f(a) = \overline{(a,1)}$, é um isomorfismo de A em A'.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que f é uma bijeção e, além disso, temos

$$f(a+b) = \overline{(a+b,1)} = \overline{(a,1)} + \overline{(b,1)} = f(a) + f(b)$$

e

$$f(ab) = \overline{(ab,1)} = \overline{(a,1)}\,\overline{(b,1)} = f(a)f(b),$$

quaisquer que sejam a e b em A; portanto, f é um isomorfismo de A em A'. ∎

No que se segue identificaremos o anel A com o sub-anel A', por meio do isomorfismo f, isto é, poremos $a = \overline{(a,1)}$, para todo a em A. Uma vez feita esta identificação temos: $0' = \overline{(0,1)} = 0$, isto é, o elemento zero de A fica identificado com o elemento zero de K e $1' = \overline{(1,1)} = 1$, isto é, o elemento unidade de A fica identificado com o elemento unidade de K. Além disso, A passa a ser considerado como um sub-anel unitário de K. Conforme o teorema 23, um elemento $\overline{(a,b)}$ de K é o quociente dos elementos $\overline{(a,1)}$ e $\overline{(b,1)}$:

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a,1)}/\overline{(b,1)};$$

mas $\overline{(a,1)} = a$ e $\overline{(b,1)} = b$, portanto, $(a,b) = \frac{a}{b}$, isto é, todo elemento de K é o quociente (determinado em K) de dois elementos de A. Daqui por diante só usaremos esta representação para os elementos de K, isto é, todo elemento (a,b) de K será indicado por $\frac{a}{b}$ ou a/b.

O corpo K construído acima é denominado *corpo de frações do anel de integridade* A.

Portanto, dado um anel de integridade A pode-se sempre construir um corpo K que contém A como sub-anel unitário e tal que todo elemento de K seja da forma $\frac{a}{b}$, com a e b em A e $b \neq 0$. Temos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e sòmente se, $ad = bc$; $\frac{a}{1} = a$, para todo a em A e as operações definidas sôbre K podem ser postas sob a forma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

O inverso do elemento $\frac{a}{b}$, com $a \neq 0$, é $\frac{b}{a}$. Além disso, se a e b são dois elementos quaisquer de A, com $b \neq 0$, existe o quociente de a por b que é o elemento $\frac{a}{b}$ de K; portanto, pode-se sempre determinar o quociente de dois elementos de A, desde que o divisor seja diferente de zero, o que resolve o problema proposto na introdução dêste parágrafo.

Seja A um anel de integridade e seja K seu corpo de frações; suponhamos que A esteja contido num corpo E e que A seja um sub-anel de E, logo, o elemento unidade de E pertence a A. Indiquemos por M o corpo de frações de A em E e lembremos que M é formado por tôdas as frações $\frac{a}{b}$ (determinadas em E), com a e b em A e $b \neq 0$. Nosso objetivo é demonstrar que K e M são isomorfos e para isso vamos considerar uma situação mais geral:

TEOREMA 25 - Seja A um anel de integridade, seja K seu corpo de frações e suponhamos que esteja dado um monomorfismo f de A num corpo E (logo, a imagem de f é um sub-anel unitário A' de E). Nestas condições, f pode ser prolongado de um único modo a um isomorfismo $\bar{f}$ de K no corpo de frações M de A' em E.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $x = \frac{a}{b}$ um elemento qualquer de K, com a e b em A e $b \neq 0$; notando-se que $f(b) \neq 0$, pois f é injetora, podemos colocar, por definição,

$$\bar{f}(x) = \frac{f(a)}{f(b)}.$$

Precisamos verificar, inicialmente, que a definição de $\bar{f}(x)$ não depende da particular representação $\frac{a}{b}$ do elemento x. Ora, de $a/b = c/d$ (com c e d em A e $d \neq 0$) resulta $ad = bc$, logo, $f(a)f(d) = f(b)f(c)$ e como $f(b) \neq 0$ e $f(d) \neq 0$, teremos $f(a)/f(b) = f(c)/f(d)$. Fica assim definida uma aplicação $\bar{f}$ de K em M e precisamos mostrar que $\bar{f}$ satisfaz as condições enunciadas no teorema acima.

1. $\bar{f}$ é um homomorfismo de K em M. Com efeito, se $x = a/b$ e $y = c/d$ são dois elementos quaisquer de K, temos

$$\bar{f}(x+y) = \bar{f}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \bar{f}\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \frac{f(ad+bc)}{f(bd)} = \frac{f(a)f(d)+f(b)f(c)}{f(b)f(d)} =$$

$$= \frac{f(a)}{f(b)} + \frac{f(c)}{f(d)} = \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$$

e

$$\bar{f}(xy) = \bar{f}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \bar{f}\left(\frac{ac}{bd}\right) = \frac{f(ac)}{f(bd)} = \frac{f(a)f(c)}{f(b)f(d)} = \frac{f(a)}{f(b)} \frac{f(c)}{f(d)} = \bar{f}(x)\bar{f}(y).$$

2. $\bar{f}$ é um monomorfismo. Basta notar que $\bar{f}(1) = f(1) \neq 0$, logo, $\bar{f}$ não é a aplicação nula de K em M e, portanto, conforme o teorema 18, $\bar{f}$ é injetora.

3. $\bar{f}$ é sobrejetora. Com efeito, todo elemento de M é da forma $f(a)/f(b)$ (com a e b em A e $b \neq 0$) e êste elemento é a imagem de a/b por meio de f.

4. $\bar{f}$ é prolongamento de f. Basta notar que todo elemento a de A pode ser posto sob a forma $\frac{a}{1}$, logo, $\bar{f}(a) = f(a)/f(1)$ e já sabemos que $f(1)$ é o elemento unidade de M (teorema 14); portanto, $\bar{f}(a) = f(a)$.

5. Unicidade de $\bar{f}$. Seja g um isomorfismo de K em M e suponhamos que g seja prolongamento de f, isto é, $g(a) = f(a)$ para todo a em A. Se $x = a/b$ é um elemento qualquer de K, com a e b em A e $b \neq 0$, temos $bx = a$, logo, $g(bx) = g(a)$ ou $g(b)g(x) = g(a)$ ou ainda, $f(b)g(x) = f(a)$, de onde vem, $g(x) = f(a)/f(b) = \bar{f}(x)$; portanto, $g = \bar{f}$. ∎

COROLÁRIO - Seja K o corpo de frações de um anel de integridade A e suponhamos que A seja um sub-anel de um corpo E; nestas condições, existe um único isomorfismo g de K no corpo de frações M de A em E tal que $g(a) = a$, para todo a em A.

Basta aplicar o teorema anterior, tomando-se f como a aplicação idêntica de A em A. Como g deixa fixo todo elemento de A, diz-se que g é um *A-isomorfismo de K em M* e também que os corpos K e M são *A-isomorfos*. O corolário acima resolve o problema proposto antes de enunciar o teorema 25. Êste corolário nos mostra que o corpo de frações K, do anel de integridade A, é mínimo no seguinte sentido: todo corpo E que contenha A como sub-anel unitário contém um subcorpo que é A-isomorfo a K.

EXERCÍCIOS

79. Verificar os axiomas A1, A2, M1, M2 e D para completar a demonstração do teorema 22.

80. Estudar a relação de equivalência R, introduzida pela definição 13, no caso em que o anel de integridade A é um corpo.

81. Verificar diretamente que $\overline{(a,b)} \cdot 0' = 0'$ para tôda classe de equivalência $\overline{(a,b)} \in K = (A \times A^*)/R$.

82. Seja A um sub-anel não nulo de um corpo K; mostrar que o subcorpo (A), gerado por A em K, é o conjunto de tôdas as frações $a/b \in K$ com a e b em A e $b \neq 0$.

83. Seja A um anel de integridade e seja K seu corpo de frações; mostrar que K é o corpo de frações de todo sub-anel B, de K, tal que $A \subset B$.

2.4 - CORPO DOS NÚMEROS RACIONAIS

DEFINIÇÃO 14 - Chama-se *corpo dos números racionais* ao corpo de frações do anel dos números inteiros.

O corpo dos números racionais será sempre indicado pela letra $\mathbf{Q}$. Conforme vimos na secção anterior, todo número racional pode ser representado sob a forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$; temos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e sòmente se, $ad = bc$. A soma e o produto de dois números racionais quaisquer $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são definidos por

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

e

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Um número racional $\frac{a}{b}$ é nulo se, e sòmente se, $a = 0$ e $\frac{a}{b}$ é um número inteiro se, e sòmente se, b é um divisor de a no anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros. O oposto do número racional $\frac{a}{b}$ é $\frac{-a}{b}$ ou $\frac{a}{-b}$ e todo número racional não nulo $\frac{a}{b}$, logo, $a \neq 0$, tem para inverso $\frac{b}{a}$.

Se a e b são dois números inteiros quaisquer, com $b \neq 0$, existe um único número racional x tal que $bx = a$ e temos $x = \frac{a}{b}$. Notemos que x é um número inteiro se a é múltiplo de b em $\mathbf{Z}$.

EXERCÍCIOS

84. Mostrar que todo número racional $x \neq 0$ pode ser representado sob a forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros, $b \neq 0$ e a e b são primos entre si. Diz-se, neste caso, que a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível.

85. Mostrar que duas frações irredutíveis a/b e c/d são iguais se, e sòmente se, $a = c$ e $b = d$, ou, $a = -b$ e $c = -d$.

86. Seja a um número inteiro positivo e suponhamos que a não seja o quadrado de um número inteiro; mostrar que não existe um número racional x tal que $x^2 = a$. Sugestão: usar o teorema fundamental da Aritmética.

87. Seja A um sub-anel não nulo do corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais; mostrar que todo número racional é uma fração a/b, com a e b em A e $b \neq 0$.

88. Demonstrar que todo número racional $r \neq 0$, $r \neq \pm 1$, pode ser representado, de modo único, sob a forma

$$r = (\pm 1) p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t},$$

onde cada p_i é um número primo positivo, cada a_i é um número inteiro e $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

89. Calcular (Gauss)

$$10^{59} \left(\frac{1025}{1024}\right)^5 \left(\frac{1048576}{1048575}\right)^8 \left(\frac{6560}{6561}\right)^3 \left(\frac{15624}{15625}\right)^8 \left(\frac{9801}{9800}\right)^4.$$

90. Determinar o corpo de frações de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ (ver o exemplo 26) no corpo $\mathbf{R}$ dos números reais.

2.3 - CARACTERÍSTICA DE UM ANEL COMUTATIVO

Seja A um anel comutativo com elemento unidade $e \neq 0$ e indiquemos por $\mathbf{Z}e$ o conjunto de todos os múltiplos inteiros de e; quaisquer que sejam os números inteiros m e n tem-se

$$me + ne = (m+n)e \tag{25}$$

e

$$-(me) = (-m)e$$

e, além disso, conforme a fórmula (13), teremos

$$(me)(ne) = m(e(ne)) = m(ne) = (mn)e; \tag{26}$$

portanto, $\mathbf{Z}e$ é um sub-anel unitário de A. Podemos completar êste resultado mostrando que $\mathbf{Z}e$ é o menor sub-anel unitário de A. Com efeito, se B é um sub-anel unitário de A, temos $e \in B$ e daqui resulta, fàcilmente, por indução finita sôbre o número natural n, que $ne \in B$ e como $(-n)e = n(-e)$, teremos $\mathbf{Z}e \subset B$. Fica assim demonstrado o seguinte

TEOREMA 26 - Se A é um anel comutativo com elemento unidade $e \neq 0$, então o conjunto $\mathbf{Z}e$ de todos os múltiplos inteiros de e é o menor sub-anel unitário de A.

Consideremos agora a aplicação $f: \mathbf{Z} \longrightarrow A$ definida por $f(n) = ne$; as fórmulas (25) e (26) nos mostram que f é um homomorfismo e é imediato que $Im(f) = \mathbf{Z}e$; portanto, f é um epimorfismo de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}e$. Vamos determinar o núcleo de f, isto é, determinaremos o conjunto $Ker(f) = M$ de todos os inteiros a tais que $ae = 0$. Distingüiremos dois casos: a) $M = \{0\}$ e b) $M \neq \{0\}$.

a) Neste caso, 0 é o único número inteiro n tal que $ne=0$, portanto, f é injetora e isto significa que se a e b são dois inteiros quaisquer, com $a\neq b$, então, $ae\neq be$. Já tínhamos observado que f é um epimorfismo de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}e$ e como f é injetora temos que f é um isomorfismo de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}e$; portanto, no caso a), o menor sub-anel unitário de A é isomorfo ao anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros.

b) Existe, por hipótese, um número inteiro $a\neq 0$, tal que $ae=0$ e podemos escolher $a>0$, pois $(-a)e=-(ae)=0$; portanto, o conjunto S de todos os inteiros $n>0$ tais que $ne=0$ não é vazio e, neste caso, o princípio do menor inteiro nos mostra que existe $m=minS$. Notemos que $m>1$, pois, $1\cdot e=e\neq 0$. Afirmamos que $M=\mathbf{Z}m$, isto é, M é formado por todos os números inteiros que são múltiplos de m. Com efeito, é imediato que vale a inclusão $\mathbf{Z}m\subset M$, pois $(bm)e=b(me)=b\cdot 0=0$ $(b\in\mathbf{Z})$; consideremos, então, um elemento qualquer n de M e seja r o resto da divisão euclidiana de n por m, logo, $n=qm+r$, com $0\leq r<m$. Daqui resulta,

$$0=ne=(qm+r)e=q(me)+re=q\cdot 0+re=0+re=re$$

e como $r\geq 0$ e $r<m=minS$ teremos, necessàriamente, $r=0$ e então $M\subset\mathbf{Z}m$. Isto completa a verificação da afirmação acima. Podemos ainda mostrar que o inteiro $m>0$ tal que $M=\mathbf{Z}m$ é determinado de modo único. De fato, se $M=\mathbf{Z}m'$, com $m'>0$, temos $m|m'$ e $m'|m$, logo, $m'=\pm m$, de onde vem, $m'=m$, pois m e m' são positivos.

Precisamos mostrar, por meio de exemplos, que os casos a) e b) podem efetivamente aparecer.

Exemplo 32 - Tomando-se $A=\mathbf{Z}$, o homomorfismo f definido acima é a aplicação idêntica de $\mathbf{Z}$ e, portanto, seu núcleo se reduz a $\{0\}$.

Exemplo 33 - Seja $m>1$ um inteiro qualquer e tomemos $A=\mathbf{Z}_m$; neste caso, o homomorfismo f é definido por $f(n)=n\cdot\overline{1}=\overline{n}$ e é imediato que seu núcleo é $\mathbf{Z}m$.

Baseados no que vimos acima daremos a seguinte

Definição 15 - Chama-se *característica* de um anel comutativo A, com elemento unidade $e\neq 0$, ao único número natural m tal que $\mathbf{Z}m$ seja o núcleo do homomorfismo $f:\mathbf{Z}\longrightarrow A$ definido por $f(n)=ne$.

Portanto, o anel A tem característica zero se, e sòmente se, 0 é o único número inteiro n tal que $ne=0$; por outro lado, o anel A tem característica $m>0$ se, e sòmente se, m é o menor número natural não nulo tal que $me=0$. Os exemplos acima nos mostram que o anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros tem característica zero e o anel $\mathbf{Z}_m$ $(m>1)$ dos inteiros módulo m tem característica m, de onde concluímos, em particular que para todo número natural $m\neq 1$ existe um anel que tem característica m. Destacaremos o caso a) no seguinte

Teorema 27 - Se A é um anel comutativo com elemento unidade $e\neq 0$ e se A tem característica zero, então, o menor sub-anel unitário de A é isomorfo ao anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros.

Vejamos de que forma é o menor sub-anel unitário $\mathbf{Z}e$ de um anel comutativo A de característica $m>0$ e para isso consideremos a aplicação $g:\mathbf{Z}_m\longrightarrow\mathbf{Z}e$ definida por $g(\overline{n})=ne$, onde $\overline{n}$ indica a classe de restos módulo m determinada pelo inteiro n. É fácil verificar que g está bem definida, ou seja, que a definição de $g(\overline{n})$ não depende do representante n da classe de restos $\overline{n}$. Afirmamos que g é um isomorfismo de $\mathbf{Z}_m$ em $\mathbf{Z}e$. Com efeito, é imediato que g é sobrejetora e se $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são dois elementos quaisquer de $\mathbf{Z}_m$, temos

$$g(\overline{a}\oplus\overline{b})=g(\overline{a+b})=(a+b)e=ae+be=g(\overline{a})+g(\overline{b})$$

e

$$g(\overline{a}\odot\overline{b})=g(\overline{ab})=(ab)e=(ae)(be)=g(\overline{a})g(\overline{b})$$

logo, g é um epimorfismo; finalmente, se $\overline{a}\in\mathbf{Z}_m$ é tal que $g(\overline{a})=0$, temos $ae=0$, logo, $m|a$ e então $\overline{a}=\overline{m}=\overline{0}$, portanto, g é injetora e isto completa a verificação da afirmação feita acima. Demonstramos, dêste modo, o seguinte

Teorema 28 - Seja A um anel comutativo com elemento unidade $e\neq 0$ e suponhamos que a característica de A seja $m>0$. Nestas condições, temos:

a) o menor sub-anel unitário $\mathbf{Z}e$, de A, é isomorfo ao anel $\mathbf{Z}_m$ dos inteiros módulo m;

b) $\mathbf{Z}e=\{0,e,2e,\cdots,(m-1)e\}$;

c) se n é um número inteiro qualquer e se $ne=0$, então n é um múltiplo de m.

A característica de um anel de integridade não pode ser um número natural arbitrário conforme nos mostra o seguinte

TEOREMA 29 - A característica de um anel de integridade A ou é igual a zero ou é igual a um número natural primo.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que a característica de A seja $p>0$ e consideremos um divisor inteiro $a>1$ de p, logo, $p=ab$, onde $1\leq b<p$; temos, então, $be\neq 0$ e $0=pe=(ab)e=(ae)(be)$, de onde vem, $ae=0$, pois, por hipótese, A é um anel de integridade e desta igualdade concluímos, em virtude do teorema 27, que $p|a$, portanto, $a=p$ e fica assim demonstrado que p é um número natural primo. ∎

COROLÁRIO - Se A é um anel de integridade de característica $p>0$, então o menor sub-anel unitário de A é isomorfo ao corpo $\mathbf{Z}_p$ dos inteiros módulo p.

É uma conseqüência imediata do teorema anterior e dos teoremas 27 e 7.

TEOREMA 30 - a) Se A é um anel comutativo de característica $m>0$, então $mx=0$ para todo x em A. b) Se A é um anel de integridade de característica zero, então $na\neq 0$ quaisquer que sejam $n\in\mathbf{Z}^*$ e $a\in A^*$.

DEMONSTRAÇÃO - a) Temos $mx=m(ex)=(me)x=0\cdot x=0$. b) Temos $na=n(ea)=(ne)a$, com $ne\neq 0$ e $a\neq 0$, portanto, $na\neq 0$, pois A é um anel de integridade. ∎

EXERCÍCIOS

91. Mostrar que o anel $A=\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}$ tem característica zero e que $2\cdot(\bar{1},0)=(\bar{0},0)$, portanto, a hipótese feita na parte b) do teorema 28 é essencial.

92. Seja A um anel comutativo com elemento unidade; mostrar que a característica de todo sub-anel unitário de A é igual à característica do anel A. Daqui resulta, em particular, que os corpos $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ têm característica nula.

93. Mostrar que um anel comutativo A, com elemento unidade, tem característica zero se, e sòmente se, o menor sub-anel unitário de A é infinito.

94. Mostrar que um anel comutativo A, com elemento unidade, tem característica $m>0$ se, e sòmente se, o menor sub-anel unitário de A tem exatamente m elementos.

95. Determinar as características dos seguintes anéis: a) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$; b) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_{12}$, c) $\mathbf{Z}_{14}\times\mathbf{Z}_{24}$.

2.4 - CORPOS PRIMOS

DEFINIÇÃO 16 - Todo corpo que admite um único subcorpo é denominado *corpo primo*.

Portanto, se P é um corpo primo, então P é o único subcorpo de P. Conforme os exercícios 34 e 35 o corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais e o corpo $\mathbf{Z}_p$ dos inteiros módulo p são corpos primos; êstes resultados podem ser demonstrados diretamente ou então são conseqüências das considerações que desenvolveremos abaixo.

Seja K um corpo e indiquemos seu corpo primo por P (§1.6); se M é um subcorpo de P, M também é um subcorpo de K, logo, $P\subset M$, pois, P é o menor subcorpo de K e portanto $M=P$ e fica assim demonstrado que P é um corpo primo.

Conforme o teorema 29, a característica de um corpo primo P ou é igual a zero ou é igual a um número natural primo p. Neste último caso, o corolário do teorema 29 nos mostra que P é isomorfo ao corpo $\mathbf{Z}_p$ dos inteiros módulo p; por tanto, conclui-se em particular que $\mathbf{Z}_p$ é um corpo primo. Suponhamos, então, que a característica de P seja igual a zero. Conforme vimos na secção anterior a aplicação $f:\mathbf{Z}\longrightarrow P$, definida por $f(n)=ne$, onde e indica o elemento unidade de P, é um monomorfismo e, além disso, $Im(f)=\mathbf{Z}e\subset P$. Como o único subcorpo de P é o próprio P resulta que P é o corpo de frações de $\mathbf{Z}e$ em P; portanto, em virtude do teorema 25, o monomorfismo f pode ser prolongado, de um único modo, a um isomorfismo $\bar{f}$ de $\mathbf{Q}$ em P, de onde vem, $\mathbf{Q}\cong P$. Portanto, todo corpo primo de característica zero é isomorfo ao corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 31 - Para todo corpo primo P, temos:

a) se P tem característica zero, então P é isomorfo ao corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais;

b) se P tem característica $p>0$, então p é um número primo e P é isomorfo ao corpo $\mathbf{Z}_p$ dos inteiros módulo p.

Do teorema acima resulta, imediatamente, que o corpo primo P de um corpo K ou é isomorfo ao corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais ou é isomorfo ao corpo $\mathbf{Z}_p$ dos inteiros módulo p,

sendo que no primeiro caso a característica de K é nula e no segundo é o número natural primo p.

TEOREMA 32 - O único automorfismo de um corpo primo é o automorfismo idêntico.

DEMONSTRAÇÃO - Seja f um automorfismo de um corpo primo P e consideremos o conjunto

$$M = \{x \in P \mid f(x) = x\}.$$

É imediato que M tem pelo menos dois elementos, a saber, 0 e 1; além disso, se x e y são dois elementos quaisquer de M, temos

$$f(x+y) = f(x)+f(y) = x+y,$$

$$f(-x) = -f(x) = -x$$

e

$$f(xy) = f(x)f(y) = xy,$$

portanto, $x+y$, $-x$ e xy são elementos de M. Finalmente, se $x \in M$ e se $x \neq 0$, temos $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} = x^{-1}$, logo, $x^{-1} \in M$. Portanto, em virtude do teorema 10, M é um subcorpo de P e como P é um corpo primo, temos $M = P$ e então f é a aplicação idêntica de P. ∎

EXERCÍCIOS

96. Se a e b são dois elementos quaisquer de um anel de integridade A, de característica $p>0$, mostrar que $(a+b)^p = a^p+b^p$. Sugestão: aplicar a fórmula do binômio de Newton e notar que $p \mid \binom{p}{i}$, para $i = 1,2,\cdots,p-1$.

97. Seja P um corpo primo de característica $p>0$; mostrar que $a^p = a$, para todo a em P. Sugestão: mostrar que a aplicação $a \mapsto a^p$ é um automorfismo de P (utilizando o exercício anterior) e aplicar o teorema 32.

98. Seja K um corpo finito; logo, a característica de K é um número natural primo p. Mostrar que a aplicação $a \mapsto a^p$ é um automorfismo de K.

99. Se a e b são dois elementos quaisquer de um anel de integridade A, de característica $p>0$, mostrar que

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n}+b^{p^n} \quad \text{e} \quad (a-b)^{p^n} = a^{p^n}-b^{p^n},$$

para todo número natural n.

100. Se A é um anel de integridade de característica $p>0$, mostrar que a aplicação $a \mapsto a^{p^n}$ $(n \in N)$ é um monomorfismo de A em A.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

101. Seja p um número natural primo e consideremos o subconjunto $Z_{(p)}$, do corpo Q dos números racionais, formado por tôdas as frações a/b (a e b inteiros) tais que $p \nmid b$. Demonstrar que $Z_{(p)}$ é um sub-anel unitário do corpo Q e determinar o corpo de frações de $Z_{(p)}$.

102. Sejam A e A' dois anéis de integridade e suponhamos que exista um isomorfismo f de A em A'. Mostrar que f pode ser prolongado, de um único modo, a um isomorfismo do corpo de frações de A no corpo de frações de A'.

103. Seja A um sub-anel unitário de um corpo K e seja S uma parte de K; mostrar que o corpo de frações de $A[S]$ em K é igual a $M(S)$, onde M é o corpo de frações de A em K.

104. Diz-se que um subconjunto não vazio M, de um anel comutativo $A \neq \{0\}$, é um *sistema multiplicativo* de A se, e sòmente se, as seguintes condições estão verificadas: 1) todo elemento de M é regular para a multiplicação; 2) $MM \subset M$, isto é, M é fechado em relação à multiplicação. a) Dar exemplos de sistemas multiplicativos no anel Z dos números inteiros e no anel Z_m dos inteiros módulo $m>1$. b) Se $m \in Z$, $m>0$, mostrar que o conjunto $M = \{a \in Z \mid mdc(a,m) = 1\}$ é um sistema multiplicativo em Z. c) Se A tem elemento unidade, então o conjunto M de todos os elementos regulares de A é um sistema multiplicativo em A. d) Se A é um anel de integridade, então $M = A^*$ é um sistema multiplicativo em A.

105. Seja K o corpo de frações de um anel de integridade A e seja M um sistema multiplicativo em A; mostrar que o conjunto

$$A_M = \{a/m \in K \mid a \in A,\ m \in M\}$$

é um sub-anel de K que contém M (A_M é denominado *anel de frações* de A em K relativo ao sistema multiplicativo M).

106. Demonstrar que se A é um sub-anel unitário do corpo Q dos números racionais, então existe um sistema multiplicativo M em Z tal que $A = Z_M$. Sugestão: considerar o subconjunto M de todos os inteiros b, tais que exista $a/b \in M$, com $mdc(a,b) = 1$.

107. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e indiquemos por S o conjunto de todos os elementos regulares de A; portanto, conforme o exercício 104, c), S é um sistema multiplicativo em A. Definiremos uma relação R sôbre $E = A \times S$ do seguinte modo: se (a,s) e (a',s') são dois elementos quaisquer de E, então $(a,s)R(a',s')$ se, e sòmente se, $as' = sa'$. a) Mostrar que R é uma relação de equivalência sôbre E. b) Se $\overline{(a,s)}$ e $\overline{(b,t)}$ são dois elementos quaisquer do conjunto quociente $A_S = E/R$ colocaremos, por definição, $\overline{(a,s)}+\overline{(b,t)} = \overline{(at+bs,\, st)}$ e $\overline{(a,s)} \cdot \overline{(b,t)} = \overline{(ab,st)}$; mostrar que estas definições não dependem dos representantes (a,s) e (b,t) das classes de equivalência $\overline{(a,s)}$ e $\overline{(b,t)}$. c) Verificar que A_S é um anel comutativo com elemento unidade $(= \overline{(1,1)} = \overline{(s,s)}$, com s em $S)$ em relação às operações definidas em b). d) Mostrar que (a,s) é inversível se, e sòmente se, $a \in S$; neste caso, o inverso de $\overline{(a,s)}$ é $\overline{(s,a)}$.

e) Se $A' = \{(\overline{a,1}) \in A_S \mid a \in A\}$, verificar que A' é um sub-anel unitário de A_S e que a aplicação $a \mapsto (a,s)$, de A em A', é um isomorfismo; identificar A com A' por meio do isomorfismo anterior. f) Verificar que todo elemento $(\overline{a,s}) \in A_S$ é igual ao quociente (determinado em A_S) de um elemento de A por um elemento de S. - O anel A_S construído acima é denominado *anel total de frações do anel* A. g) Mostrar que todo elemento de S é inversível em A_S. h) Seja B um anel comutativo com elemento unidade e suponhamos que exista um monomorfismo f, de A em B, tal que todo elemento $f(s)$, com s em S, seja inversível em B; demonstrar que f pode ser prolongado, de um único modo, a um monomorfismo de A_S em B.

108. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e seja M um sistema multiplicativo em A; mostrar que o conjunto

$$A_M = \{a/m \in A_S \mid a \in A,\ m \in M\},$$

onde S é o conjunto considerado no exercício anterior, é um sub-anel de A_S que contém A (A_M é denominado anel de frações de A em A_S relativo ao sistema multiplicativo M).

109. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e seja a um elemento não nulo de A; suponhamos ainda que a relação $na = 0$, com n inteiro, implica $n = 0$. a) Demonstrar que se A é um anel de integridade, então a característica de A é igual a zero. b) Considerando-se o anel $A = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}$ mostrar que a hipótese feita em a) é essencial.

110. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e seja a um elemento não nulo de A; suponhamos ainda que exista um número inteiro $n \neq 0$ tal que $na = 0$ e seja m o menor número natural não nulo tal que $ma = 0$. a) Demonstrar que se A é um anel de integridade, então m é a característica de A. b) Considerando-se o anel produto $A = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ mostrar que a hipótese feita em a) é essencial.

111. Sejam A e B dois anéis comutativos com elementos unidades; mostrar que a característica do anel produto $A \times B$ é igual ao mínimo múltiplo comum das características de A e de B.

§3 - ANÉIS E CORPOS ORDENADOS

O desenvolvimento dêste parágrafo é básico para o capítulo seguinte onde introduziremos o corpo dos números reais. Para facilitar a exposição só consideraremos ordens totais e os anéis considerados serão, em geral, anéis de integridade. O §3.1 completa o estudo iniciado no Capítulo II sôbre grupos ordenados; nos parágrafos 3.2 e 3.3 veremos, respectivamente, a estrutura de anel ordenado e de corpo ordenado.

3.1 - GRUPOS ORDENADOS

Repetiremos aqui, de modo sucinto, os axiomas que definem a estrutura de grupo aditivo totalmente ordenado (ver o §1.4 do Capítulo II). Considera-se um conjunto não vazio G e supõe-se que sôbre êste conjunto estejam definidas uma operação de adição $(a,b) \mapsto a+b$ e uma relação $\leqslant$ que satisfazem os seguintes axiomas

A1: $(a+b)+c = a+(b+c)$	O1: $a \leqslant a$
A2: $a+b = b+a$	O2: $a \leqslant b$ e $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$
A3: $a+0 = a$	O3: $a \leqslant b$ e $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$
A4: $a+(-a) = 0$	O4: $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$

OA: $a \leqslant b \Longrightarrow a+c \leqslant b+c$.

O axioma OA nos dá a compatibilidade da estrutura de grupo com a estrutura de ordem ou, então, êle nos mostra que a operação de adição é compatível com a ordem $\leqslant$. Note-se que estamos exigindo que a ordem $\leqslant$ seja total (axioma O4) e, portanto, deveríamos dizer que $(G,+,\leqslant)$ é um grupo totalmente ordenado mas, para simplificar a linguagem, diremos simplesmente que G é um grupo ordenado.

Diz-se que um grupo aditivo G é *ordenável* se, e sòmente se, existe uma relação de ordem total $\leqslant$, definida sôbre o conjunto G e tal que o axioma OA esteja satisfeito.

A partir dos axiomas OA e O3 deduz-se, fàcilmente, que se a, b, c e d são elementos de um grupo ordenado G e se $a \leqslant b$ e $c \leqslant d$, então $a+c \leqslant b+d$ (princípio da soma de desigualdades). No §1.4 do Capítulo II (ver o teorema 9) demonstrámos que num grupo ordenado G as seguintes propriedades são equivalentes:

a) $a < b$:
b) $a+c < b+c$;
c) $0 < b-a$;
d) $a-b < 0$;
e) $-b < -a$,

onde a e b são elementos do conjunto G. A partir do fato que a) implica b) pode-se precisar o princípio da soma de desigualdades do seguinte modo: se a, b, c e d são elementos de um grupo ordenado G e se $a < b$ e $c \leqslant d$, então $a+c < b+d$. Daqui resulta, em particular, que se $0 < a$ e $0 \leqslant b$, então $0 < a+b$.

TEOREMA 33 - Para todo elemento a de um grupo ordenado G e para todo número inteiro n, temos:

a) se $0 < n$ e se $0 < a$, então $0 < na$;
b) se $0 < n$ e se $a < 0$, então $na < 0$;

c) se $n<0$ e se $0<a$, então $na<0$;

d) se $n<0$ e se $a<0$, então $0<na$.

DEMONSTRAÇÃO:

a) É imediato que esta propriedade é verdadeira para $n=1$; supondo-se que $n>1$ e que $0<(n-1)a$, temos $0+a<(n-1)a+a$, ou, $a<na$, de onde vem, $0<na$. Portanto, a propriedade a) é verdadeira para todo número natural $n\neq 0$.

b) De $a<0$ resulta $0<-a$, logo, $0<n(-a)$; mas $n(-a)=-(na)$, logo, $0<-(na)$, de onde vem, $na<0$.

c) Basta notar que $0<-n$ e $0<(-n)a=-(na)$.

d) Basta notar que, conforme a), temos $0<(-n)(-a)=na$. ∎

COROLÁRIO 1 - Para todo número inteiro não nulo n e para todo elemento não nulo a, de um grupo ordenado G, tem-se $na\neq 0$.

COROLÁRIO 2 - Se $0<a$ e se m e n são números inteiros tais que $m\leqslant n$, então $ma\leqslant na$; além disso, se $m<n$ e se $0<a$, temos $ma<na$.

Outras propriedades dos múltiplos inteiros de elementos de um grupo ordenado serão dadas como exercícios desta secção.

DEFINIÇÃO 17 - Diz-se que um elemento a, de um grupo ordenado G, é *positivo* (resp., *negativo*) se, e sòmente se, $0\leqslant a$ (resp., $a\leqslant 0$). Se a é positivo (resp., negativo) e se $a\neq 0$, diremos que a é *estritamente positivo* (resp., *estritamente negativo*).

Conforme esta definição o elemento 0 é positivo e negativo e o axioma O2 nos mostra que 0 é o único elemento de G que é positivo e negativo. Além disso, os axiomas O2 e O4 nos mostram que todo elemento de G ou é estritamente positivo, ou, é estritamente negativo, ou, é nulo, sendo que cada um dêstes casos exclui os outros dois.

Introduziremos as seguintes notações: se A e B são duas partes não vazias de um grupo aditivo G, indica-se por $A+B$ o conjunto de tôdas as somas $a+b$, com a em A e b em B; o conjunto dos opostos de todos os elementos de A será indicado por $-A$.

TEOREMA 34 - Se G é um grupo aditivo ordenado e se P é o conjunto de todos os elementos positivos de G, então valem as seguintes propriedades:

I. $P+P\subset P$;

II. $P\cap(-P)=\{0\}$;

III. $P\cup(-P)=G$.

Além disso, se G é um grupo aditivo e se P é uma parte do conjunto G que satisfaz as condições I, II, III, então existe uma única relação de ordem total $\leqslant$, compatível com a adição, tal que P seja o conjunto de todos os elementos positivos pela ordem $\leqslant$.

DEMONSTRAÇÃO - A condição I resulta, imediatamente, do princípio da soma de desigualdades; II é conseqüência do que observamos após a definição 17 e, finalmente, III resulta do fato que a ordem $\leqslant$ é total. Suponhamos, então, que G seja um grupo aditivo e que exista uma parte P, do conjunto G, satisfazendo as condições I, II e III; definiremos, neste caso, uma relação $\leqslant$, sôbre o conjunto G, do seguinte modo: se a e b são dois elementos quaisquer de G, colocaremos $a\leqslant b$ se, e sòmente se, $b-a\in P$. A verificação de que esta relação satisfaz as condições enunciadas no teorema acima será feita em diversas partes.

O1. É imediato, pois $a-a=0$ e $0\in P$ em virtude de II.

O2. Se $a\leqslant b$ e se $b\leqslant a$, temos $b-a\in P$ e $a-b\in P$; mas $a-b=-(b-a)$, logo, $a-b\in -P$ e então $a-b\in P\cap(-P)$, de onde vem, $a-b=0$, ou seja, $a=b$.

O3. Se $a\leqslant b$ e se $b\leqslant c$, temos $b-a\in P$ e $c-b\in P$, de onde resulta pela condição I, $(b-a)+(c-b)\in P$, ou, $c-a\in P$; portanto, $a\leqslant c$.

O4. Sejam a e b dois elementos quaisquer de G e consideremos a diferença $a-b$; conforme a condição III temos $a-b\in P$ ou $a-b\in -P$. Se $a-b\in P$ temos $b\leqslant a$ e se $a-b\in -P$, teremos $b-a\in P$; portanto, $a\leqslant b$.

OA. Sejam a, b e c elementos quaisquer de G e suponhamos que $a\leqslant b$, logo, $b-a\in P$, de onde vem, $(b+c)-(a+c)=b-a\in P$; portanto, $a+c\leqslant b+c$.

Fica assim demonstrado que a relação $\leqslant$ é uma ordem total compatível com a adição. Notando-se que $0\leqslant a$ se, e sòmente se, $a-0=a\in P$ resulta, imediatamente, que P é o conjunto de todos os elementos positivos pela ordem total $\leqslant$. Finalmente, falta verificar que a ordem $\leqslant$ é única. Ora, se R

é uma ordem total, sôbre o conjunto G, compatível com a adição e tal que $P=\{a\in G \mid 0Ra\}$, teremos

$$aRb \Longleftrightarrow 0R(b-a) \Longleftrightarrow b-a\in P \Longleftrightarrow a\leqslant b;$$

portanto, a ordem R coincide com a ordem $\leqslant$ definida acima. ∎

COROLÁRIO - Um grupo aditivo G é ordenável se, e sòmente se, existe uma parte P, do conjunto G, que satisfaz as condições I, II e III.

EXEMPLO 34 - O subconjunto $P=\boldsymbol{N}$ do grupo aditivo $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros satisfaz as condições I, II e III do teorema 34; portanto, define-se uma ordem total $\leqslant$, sôbre $\boldsymbol{Z}$, pondo-se $a\leqslant b$ se, e sòmente se, $b-a$ é um número natural. Esta ordem é compatível com a adição e já foi considerada no §1.2 do Capítulo III e é a ordem habitual dos números inteiros. Anàlogamente, o subconjunto $P=-\boldsymbol{N}$ também satisfaz as condições I, II e III; portanto, obtém-se uma outra ordem total, compatível com a adição, pondo-se aRb se, e sòmente se, $b-a$ é o oposto de um número natural. É imediato que esta ordem R é a oposta (ver o exercício 43 do Capítulo I) da ordem $\leqslant$. Podemos completar o que foi visto acima mostrando que os únicos subconjuntos P, de $\boldsymbol{Z}$, que satisfazem as condições I, II e III são $\boldsymbol{N}$ e $-\boldsymbol{N}$. Com efeito, conforme III temos $1\in P$ ou $1\in -P$. De $1\in P$ resulta, usando-se II, $\boldsymbol{N}\subset P$; se, por absurdo, $\boldsymbol{N}\neq P$, existiria $b\in P$, $b\notin \boldsymbol{N}$, logo, $b=-a$, com $a\in \boldsymbol{N}$ e então, $b\in P\cap(-P)=\{0\}$, portanto, $b=0$ e teríamos uma contradição. Anàlogamente, se $1\in -P$ conclui-se que $P=-\boldsymbol{N}$. Em resumo, o grupo aditivo $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros só pode ser ordenado de dois modos obtendo-se, então, a ordem habitual e sua oposta.

EXEMPLO 35 - Consideremos o conjunto $G=\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ e coloquemos, por definição, $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ quaisquer que sejam (a,b) e (c,d) em G. É fácil verificar que esta operação define uma estrutura de grupo comutativo sôbre $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$. Indiquemos por P o subconjunto de $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ formado por todos os pares (a,b) tais que $0<a$ e b qualquer, ou, $a=0$ e $0\leqslant b$, onde $\leqslant$ é a ordem habitual do grupo aditivo $\boldsymbol{Z}$. Deixaremos a cargo do leitor a verificação das condições I, II e III para o subconjunto P. Portanto, $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ é um grupo ordenado pela ordem $\leqslant$, definida por $(a,b)\leqslant(c,d)$ se, e sòmente se, $a<c$ ou $a=c$ e $b\leqslant d$.

DEFINIÇÃO 18 - Diz-se que um grupo ordenado $(G,+,\leqslant)$ é *arquimediano* se, e sòmente se, a ordem $\leqslant$ satisfaz o seguinte axioma

AA: quaisquer que sejam a e b em G, se $0<a$ e $0<b$, então existe um número natural n tal que $b<na$.

É imediato que na verificação do *axioma de Arquimedes* (axioma AA) pode-se supor que $0<a<b$ e mostrar que existe $n\in \boldsymbol{N}$ tal que $b<na$.

EXEMPLO 36 - O grupo aditivo $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros, pela ordem habitual, é arquimediano, pois se a e b são dois inteiros tais que $0<a<b$, temos $b<(b+1)a$.

EXEMPLO 37 - O grupo ordenado $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$, definido no exemplo 35, não é arquimediano, pois, por exemplo, temos $(0,0)<(0,1)<(1,1)$ e no entanto $n\cdot(0,1)=(0,n)<(1,1)$ para todo $n\in \boldsymbol{N}^*$.

TEOREMA 35 - Se $(G,+,\leqslant)$ é um grupo arquimediano e se a e b são dois elementos estritamente positivos, então existe um único número natural não nulo m tal que

$$(m-1)a\leqslant b<ma \qquad (27).$$

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto S de todos os números naturais não nulos n tais que $b<na$; de acôrdo com o axioma de Arquimedes S é não vazio, logo, existe $m=\min S$ e temos $m\neq 0$ e $b<ma$. Se $m=1$, temos $0\cdot a=0<b<a$, o que verifica (27); se $m>1$, teremos $m-1>0$ e $m-1\notin S$, portanto, $(m-1)a\leqslant b<ma$. Finalmente, seja $m'\in \boldsymbol{N}^*$ tal que $(m'-1)a\leqslant b<m'a$. Se $m<m'$, temos $m\leqslant m'-1$, portanto, em virtude do corolário 2 do teorema 33, resulta que $ma\leqslant(m'-1)a$, de onde vem, $ma\leqslant b$, contra a definição do inteiro m; anàlogamente, chega-se a uma contradição no caso em que se suponha $m'<m$, portanto, $m'=m$. ∎

DEFINIÇÃO 19 - Chama-se *valor absoluto* de um elemento a, de um grupo ordenado G, ao elemento $|a|$ definido por

$$|a|=\begin{cases} a & \text{se } 0\leqslant a \\ -a & \text{se } a<0. \end{cases}$$

Notemos que a definição acima pode ser posta sob a forma

$$|a|=max\{a,-a\}.$$

O leitor poderá verificar, fàcilmente, as seguintes propriedades cujas demonstrações são completamente análogas as que vimos no §1.4 do Capítulo III:

TEOREMA 36 - Num grupo ordenado G, valem as seguintes propriedades:

a) $0 \leqslant |a|$ para todo a em G e $|a| = 0$ se, e sòmente se, $a = 0$;

b) $|-a| = |a|$, para todo a em G;

c) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, para todo a em G;

d) se $0 \leqslant a$ e se $x \in G$ é tal que $-a \leqslant x \leqslant a$, então, $|x| \leqslant a$;

e) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, quaisquer que sejam x e y em G.

EXERCÍCIOS

112. Mostrar que se $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ e $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ são duas famílias de elementos de um grupo ordenado G e se $a_i \leqslant b_i$, para $i = 1,2,\cdots,n$, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

113. Com as hipóteses do exercício anterior, supondo-se que exista um índice p, com $1 \leqslant p \leqslant n$, tal que $a_p < b_p$, mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

114. Sejam m e n dois números inteiros tais que $m < n$ e seja a um elemento de um grupo ordenado G; mostrar que se $0 < a$, então $na < ma$.

115. Sejam a e b dois elementos de um grupo ordenado G tais que $a < b$ e seja n um número inteiro; mostrar que

a) se $0 < n$, então $na < nb$;

b) se $n < 0$, então $nb < na$.

116. Seja G um grupo aditivo e seja $\leqslant$ uma relação de ordem parcial definida sôbre o conjunto G. Diz-se que a ordem $\leqslant$ é compatível com a adição se, e sòmente se, é válido o axioma OA; neste caso, também se diz que $(G,+,\leqslant)$ é um *grupo parcialmente ordenado*. Demonstrar as seguintes propriedades:

a) se $(G,+,\leqslant)$ é um grupo parcialmente ordenado, então o conjunto P de seus elementos positivos satisfaz as condições I e II do teorema 34.

b) Se G é um grupo aditivo e se P é uma parte do conjunto G que satisfaz as condições I e II, então existe uma única relação de ordem $\leqslant$, compatível com a adição, tal que P seja o conjunto de todos os elementos positivos pela ordem $\leqslant$. Neste caso, a ordem $\leqslant$ é total se, e sòmente se, a condição III está verificada.

117. Consideremos o grupo aditivo $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros; verificar quais das seguintes partes P, do conjunto $\boldsymbol{Z}$, definem ordens totais ou parciais compatíveis com a adição:

a) P é o conjunto de todos os números naturais pares;

b) P é o conjunto de todos os números naturais ímpares;

c) P é o conjunto de todos os números naturais que são múltiplos de 3.

118. Estender o teorema 33 para um grupo aditivo parcialmente ordenado.

119. Estender os corolários 1 e 2 do teorema 33 para um grupo aditivo parcialmente ordenado.

120. Consideremos o grupo aditivo $G = \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ definido no exemplo 35. a) Mostrar que o subconjunto $P = \{(a,b) \in G \mid 0 \leqslant a \text{ e } 0 \leqslant b\}$, onde $\leqslant$ é a ordem habitual dos números inteiros, satisfaz as condições I e II do teorema 34, mas não satisfaz a condição III. b) Dar outros exemplos de partes P, do conjunto G, que satisfazem I e II mas não satisfazem III.

121. Mostrar que se $(G,+,\leqslant)$ é um grupo arquimediano e se a e b são dois elementos quaisquer de G, com $a \neq 0$, então existe um número inteiro n tal que $b < na$.

122. Verificar as propriedades enunciadas no teorema 36.

123. Mostrar que $|nx| = |n|\,|x|$, para todo número inteiro n e para todo elemento x de um grupo ordenado G.

124. Se a e b são dois elementos quaisquer de um grupo ordenado G, mostrar que $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$.

125. Seja G um grupo ordenado e ponhamos $d(a,b) = |a-b|$, quaisquer que sejam a e b em G; mostrar que valem as seguintes propriedades:

a) $0 \leqslant d(a,b)$ e $d(a,b) = 0$ se, e sòmente se, $a = b$;

b) $d(a,b) = d(b,a)$;

c) $d(a,b) \leqslant d(a,c)+d(c,b)$;

d) $d(a,b) = d(a+c,b+c)$.

3.2 - ANÉIS ORDENADOS

DEFINIÇÃO 20 - Seja A um anel comutativo com elemento unidade $e \neq 0$ e suponhamos que esteja definida uma ordem total $\leqslant$ sôbre o conjunto A. Diz-se que esta ordem *é compatível com a estrutura de anel definida sôbre o conjunto* A ou, simplesmente, que A *é um anel ordenado pela ordem* $\leqslant$ se, e sòmente se, são válidos os seguintes axiomas

OA: quaisquer que sejam a, b e c em A, se $a \leqslant b$, então $a+c \leqslant b+c$;

OM: quaisquer que sejam a, b e c em A, se $a \leqslant b$ e se $0 \leqslant c$, então $ac \leqslant bc$.

Se A é um anel comutativo com elemento unidade e se estiver fixada, sôbre o conjunto A, uma ordem total $\leqslant$ que satisfaz os axiomas OA e OM diremos, simplesmente, que A, é um *anel ordenado* suprimindo-se, portanto, a referência à ordem total fixada sôbre o conjunto A e ao fato que esta

ordem satisfaz os axiomas OA e OM. Diremos que um anel comutativo A com elemento unidade é *ordenável* se, e sòmente se, existe uma ordem total, sôbre o conjunto A, que satisfaz os axiomas OA e OM.

Apesar de haver a restrição $0 \leqslant c$ no axioma OM, costuma-se dizer que a ordem $\leqslant$ é compatível com a multiplicação.

Se A é um anel ordenado pela ordem $\leqslant$, então é imediato que $(A,+,\leqslant)$ é um grupo ordenado, portanto, num anel ordenado valem as propriedades enunciadas na secção 3.1 relativas à adição; em particular, conforme o corolário 1 do teorema 33, temos $ne \neq 0$ para todo número inteiro $n \neq 0$, logo, em virtude da definição 15, concluímos o seguinte

TEOREMA 37 - Todo anel comutativo ordenado tem característica zero.

O axioma OM também pode ser enunciado sob a forma:

OM': quaisquer que sejam a e b em A, se $0 \leqslant a$ e se $0 \leqslant b$, então $0 \leqslant ab$.

Com efeito, é imediato que OM implica OM'. Recìprocamente, suponhamos que OM' seja verdadeiro e consideremos três elementos a, b e c de A tais que $a \leqslant b$ e $0 \leqslant c$; neste caso, temos $0 \leqslant b-a$ e $0 \leqslant c$, logo, $0 \leqslant (b-a)c$ ou $0 \leqslant bc-ac$, de onde vem, $ac \leqslant bc$.

Veremos a seguir algumas propriedades da ordem relativas aos produtos e só consideraremos o caso em que o anel ordenado não admita divisores próprios do zero, portanto, daqui por diante só consideraremos anéis de integridade ordenados.

TEOREMA 38 - Num anel de integridade ordenado A valem as seguintes propriedades:

1) Regra dos sinais: a) se $0<a$ e se $0<b$, então, $0<ab$; b) se $a<0$ e se $b<0$, então, $0<ab$; c) se $a<0$ e se $0<b$, então, $ab<0$.

2) $0 \leqslant a^2$ para todo a em A e $0<a^2$ para todo $a \neq 0$; em particular, o elemento unidade de A é estritamente positivo.

3) Se a é inversível, então, a e a^{-1} são ambos estritamente positivos ou estritamente nagativos.

4) $|ab| = |a||b|$.

DEMONSTRAÇÃO

1) a) É uma conseqüência imediata do axioma OM' e do fato que $ab \neq 0$. b) De $a<0$ e $b<0$ resulta $0<-a$ e $0<-b$, logo, $0<(-a)(-b)$, ou $0<ab$. c) De $a<0$ resulta $0<-a$, logo, $0<(-a)b$, ou, $0<-(ab)$, de onde vem, $ab<0$.

2) Conforme a regra dos sinais temos $0 \leqslant a^2$ e se $a \neq 0$ teremos $0<a^2$, pois $a^2 \neq 0$.

3) Basta aplicar a regra dos sinais à igualdade $a \cdot a^{-1} = e$ e notar que e é estritamente positivo.

4) É uma conseqüência imediata da regra dos sinais. ∎

Se M é um subconjunto não vazio de um anel A, indica-se por MM o conjunto de todos os produtos ab com a e b em M.

TEOREMA 39 - Se A é um anel de integridade ordenado e se P é o conjunto dos elementos positivos de A, então temos:

I. $P+P \subset P$;

II. $P \cap (-P) = \{0\}$;

III. $P \cup (-P) = A$;

IV. $PP \subset P$.

Além disso, se A é um anel de integridade e se P é uma parte do conjunto A que satisfaz as condições I, II, III e IV, então existe uma única ordem total $\leqslant$, sôbre A, compatível com a adição e a multiplicação, tal que P seja o conjunto de todos os elementos positivos pela ordem $\leqslant$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que A seja um anel de integridade ordenado e seja P o conjunto dos elementos positivos de A; neste caso, P também é o conjunto dos elementos positivos do grupo ordenado $(A,+,\leqslant)$, portanto, em virtude do teorema 34, P satisfaz as condições I, II e III. Basta agora notar que a condição IV é conseqüência do axioma OM'. Recìprocamente, seja A um anel de integridade e suponhamos que exista uma parte P, do conjunto A, que satisfaça as condições I, II, III e IV. Aplicando-se, então, o teorema 34 ao grupo $(A,+)$ resulta que existe uma única ordem total $\leqslant$, compatível com a adição, tal que P seja o conjunto dos elementos positivos relativamente a esta ordem; além disso, esta ordem satisfaz o axioma OM' em virtude da condição IV. ∎

Portanto, para definir sôbre um anel de integridade A uma estrutura de ordem total e compatível com a adição e a multiplicação, basta determinar um subconjunto P, de A, que satisfaça as condições I, II, III e IV do teorema acima; neste caso, a ordem $\leqslant$ é definida, de modo único, por: $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $b-a \in P$.

COROLÁRIO - Um anel de integridade A é ordenável se, e sòmente se, existe uma parte P, de A, satisfazendo as condições I, II, III e IV.

No anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros o subconjunto $P = \boldsymbol{N}$ satisfaz, evidentemente, as condições I, II, III e IV do teorema acima, logo, $\boldsymbol{Z}$ é um anel ordenável, resultado êste que já foi estabelecido no §1 do Capítulo III; notemos que a ordem assim obtida é a ordem habitual dos números inteiros: $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $b-a$ é um número natural. Recìprocamente, seja R uma ordem total definida sôbre o conjunto $\boldsymbol{Z}$ compatível com a adição e a multiplicação e seja P o conjunto dos elementos positivos de $\boldsymbol{Z}$ pela ordem R, isto é, $P = \{a \in \boldsymbol{Z} \mid 0Ra\}$. Em virtude da parte 2) do teorema 38, temos $1 \in P$ e daqui resulta, por indução finita, que $n \in P$ para todo número natural $n \neq 0$ e como $0 \in P$, temos $\boldsymbol{N} \subset P$. Supondo-se, por absurdo, que exista $b \in P$ tal que $b \notin \boldsymbol{N}$, temos $b \in -\boldsymbol{N}$, pois, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N} \cup (-\boldsymbol{N})$, logo, $b = -a$, com $a \in \boldsymbol{N}$, portanto, $b \in P \cap (-P) = \{0\}$ e então, $b = 0$ e obtivemos dêste modo uma contradição; conclui-se assim que $P = \boldsymbol{N}$, ou seja, a ordem R coincide com a ordem habitual dos números inteiros. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 40 - A ordem habitual dos números inteiros é a única ordem total compatível com a estrutura de anel definida sôbre $\boldsymbol{Z}$.

DEFINIÇÃO 21 - Sejam A e A' dois conjuntos tais que $A \subset A'$ e sejam R e R' relações de ordem definidas, respectivamente, sôbre A e A'; diz-se que R' é um *prolongamento* de R se, e sòmente se, é válida a seguinte condição: quaisquer que sejam a e b em A, tem-se aRb se, e sòmente se, $aR'b$.

É imediato que R' é um prolongamento da ordem $(R')_A = R$ induzida por R' sôbre A; notemos que se R' é total, então a ordem induzida $(R')_A$ também é total.

Interessa-nos examinar a definição acima no caso em que A' seja um anel de integridade ordenado pela ordem R' e A seja um sub-anel unitário, de A', ordenado pela ordem R. Indicaremos por P (resp., P') o conjunto dos elementos de A (resp., A') que são positivos pela ordem R (resp., R'), isto é,

$$P = \{x \in A \mid 0Rx\} \quad \text{e} \quad P' = \{x' \in A' \mid 0R'x'\}.$$

Com estas notações, demonstraremos o seguinte

TEOREMA 41 - A ordem R' é um prolongamento da ordem R se, e sòmente se, $P \subset P'$; neste caso, tem-se $P = P' \cap A$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que R' seja um prolongamento de R e seja x um elemento qualquer de A; se $x \in P$, temos $0Rx$, logo, $0R'x$, de onde vem, $x \in P'$, portanto, $P \subset P'$. Recìprocamente, se $P \subset P'$ e se x e y são dois elementos quaisquer de A, temos

$$xRy \Longleftrightarrow 0R(y-x) \Longleftrightarrow 0R'(y-x) \Longleftrightarrow xR'y;$$

portanto, R' é um prolongamento de R. Finalmente, é imediato que $P \subset P' \cap A$; suponhamos, por absurdo, que $P \neq P' \cap A$, logo, existe $a \in P' \cap A$ tal que $a \notin P$. De $A = P \cup (-P)$ e $a \notin P$ resulta $a = -b$, com $b \in P$, logo, $a \in -P'$ e como $a \in P'$ temos, necessàriamente, $a = 0$ contra o fato que $a \notin P'$; portanto, $P = P' \cap A$. ∎

COROLÁRIO - Todo sub-anel unitário de um anel de integridade ordenado é um anel ordenado pela ordem induzida.

O teorema acima nos mostra que o problema do prolongamento da ordem R, definida sôbre A, a uma ordem total R' definida sôbre A' e compatível com a estrutura de anel de A', resume-se em determinar um subconjunto P', de A', que satisfaça as condições I, II, III, IV e $P \subset P'$.

DEFINIÇÃO 22 - Sejam $(A, +, \cdot, \leqslant)$ e $(A', +, \cdot, \leqslant)$ dois anéis de integridade ordenados e seja f uma aplicação do conjunto A no conjunto A'; diz-se que f é um *isomorfismo ordenado* de A em A' se, e sòmente se, f satisfaz as seguintes condições:

1) f é um isomorfismo do anel A no anel A';

2) quaisquer que sejam a e b em A, tem-se $a \leqslant b$ se, e sòmente se, $f(a) \leqslant f(b)$.

Notemos, simplesmente, que a condição 2) pode ser dada sob a forma $f(P) = P'$, onde P e P' indicam, respectivamente, os conjuntos dos elementos positivos de A e A'.

Conforme o teorema 37, todo anel de integridade A tem característica zero e sabemos que a aplicação $f: \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}e$, defi-

nida por $f(n)=ne$, é um isomorfismo do anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros no menor sub-anel unitário $\mathbf{Z}e$ de A (ver o teorema 27); notando-se que $0 \leqslant ne$ se, e sòmente se, n é um número natural, resulta que f é um isomorfismo ordenado. Fica assim demonstrado o seguinte

TEOREMA 42 - O menor sub-anel unitário $\mathbf{Z}e$, de um anel de integridade ordenado A, é ordenadamente isomorfo ao anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros.

EXERCÍCIOS

126. Mostrar que num anel de integridade ordenado A valem as seguintes propriedades:

a) se $0<a$, então $0<a^n$ para todo número natural n;

b) se $a<0$, então $0<a^{2n}$ e $a^{2n+1}<0$, para todo número natural n.

127. Completar o enunciado da regra dos sinais (teorema 38) mostrando que: 1) se $0<ab$, então $0<a$ e $0<b$ ou $a<0$ e $b<0$; 2) se $ab<0$, então $0<a$ e $b<0$ ou $a<0$ e $0<b$.

128. Mostrar que num anel de integridade ordenado A, tem-se $x^2+1 \neq 0$ para todo x em A.

129. Seja A um anel de integridade ordenado; verificar as seguintes propriedades:

a) Se a e b são elementos quaisquer de A e se $a<b$, então, $a^3<b^3$.

b) Se a e b são elementos de A tais que $a^7=b^7$, então $a=b$.

130. Mostrar que num anel de integridade ordenado A, tem-se

$$1+na \leqslant (1+a)^n$$

para todo número natural n e para todo elemento positivo a de A.

131. Seja A um anel comutativo com elemento unidade $e \neq 0$ e seja $\leqslant$ uma relação de ordem parcial definida sôbre o conjunto A. Diz-se que a ordem $\leqslant$ é compatível com a estrutura de anel definida sôbre A se, e sòmente se, são válidos os axiomas OA e OM da definição 20; neste caso, também se diz que A é um anel parcialmente ordenado pela ordem $\leqslant$. Demonstrar que valem as seguintes propriedades:

a) Se $(A,+,\cdot,\leqslant)$ é um anel parcialmente ordenado, então o conjunto P de seus elementos positivos satisfaz as condições I, II e IV do teorema 39.

b) Se A é um anel comutativo com elemento unidade $e \neq 0$ e se P é uma parte do conjunto A que satisfaz as condições I, II e IV, então existe uma única relação de ordem $\leqslant$, compatível com a estrutura de anel definida sôbre A, tal que P seja o conjunto de todos os elementos positivos de A, pela ordem $\leqslant$. Neste caso, a ordem $\leqslant$ é total se, e sòmente se, a condição III está verificada. (Sugestão: utilizar o exercício 116.)

132. Verificar quais das propriedades do teorema 38 permanecem verdadeiras supondo-se que $(A,+,\cdot,\leqslant)$ seja um anel comutativo com elemento unidade e parcialmente ordenado pela ordem $\leqslant$.

133. Determinar a característica de um anel de integridade parcialmente ordenado.

3.3 - CORPOS ORDENADOS

DEFINIÇÃO 23 - Seja K um corpo e suponhamos que esteja definida uma ordem total $\leqslant$ sôbre o conjunto K. Diz-se que esta ordem *é compatível com a estrutura de corpo definida sôbre o conjunto* K ou que K *é um corpo ordenado pela ordem* $\leqslant$ se, e sòmente se, estão satisfeitos os axiomas OA e OM da definição 20.

Se K é um corpo e se estiver fixada, sôbre o conjunto K, uma ordem total $\leqslant$ que satisfaz os axiomas OA e OM diremos, simplesmente, que K é um *corpo ordenado* suprimindo-se portanto, a referência à ordem total fixada sôbre o conjunto K e ao fato que esta ordem satisfaz os axiomas OA e OM. Diremos que um corpo K é *ordenável* se, e sòmente se, existe uma ordem total, sôbre o conjunto K, que satisfaz os axiomas OA e OM.

Conforme a definição acima, se $(K,+,\cdot,\leqslant)$ é um corpo ordenado, então $(K,+,\cdot,\leqslant)$ é um anel de integridade ordenado; portanto, são verdadeiras em K as propriedades estabelecidas na secção anterior para os anéis de integridade ordenados. Completaremos o teorema 38 acrescentando algumas propriedades que derivam do fato que todo elemento não nulo de K é inversível:

TEOREMA 43 - Num corpo ordenado K valem as seguintes propriedades:

1) Se $a \neq 0$, então a e a^{-1} são ambos estritamente positivos ou estritamente negativos.

2) Se $0<a<e$, então $e<a^{-1}$ e se $e<a$, então $0<a^{-1}<e$, onde e indica o elemento unidade de K.

3) Se $0<a<b$, então $0<b^{-1}<a^{-1}$ e se $a<b<0$, então $b^{-1}<a^{-1}<0$.

4) $|a^{-1}|=|a|^{-1}$ para todo $a \neq 0$.

5) $|a/b|=|a|/|b|$, quaisquer que sejam a e b em K, com $b \neq 0$.

DEFINIÇÃO 24 - Diz-se que um conjunto não vazio E, totalmente ordenado pela ordem $\leqslant$, é *denso* se, e sòmente se,

quaisquer que sejam a e b em E, com $a<b$, existe $c\in E$ tal que $a<c<b$. Um subconjunto E_0, de E, é *totalmente denso em* E (ou, simplesmente, é *denso em* E) se, e sòmente se, quaisquer que sejam a e b em E, com $a<b$, existe c_0 em E_0 tal que $a<c_0<b$.

TEOREMA 44 - Se K é um corpo ordenado pela ordem $\leqslant$, então o conjunto K é denso pela mesma ordem.

DEMONSTRAÇÃO - Mostraremos que se a e b são dois elementos quaisquer de K e se $a<b$, então

$$a<(2e)^{-1}(a+b)<b,$$

onde e indica o elemento unidade de K. Com efeito, notemos, inicialmente, que e e $2e$ são estritamente positivos, de onde vem que $(2e)^{-1}$ também é estritamente positivo. De $a<b$ resulta, conforme o axioma OA, $a+a<a+b$, ou, $(2e)a<a+b$ e, portanto, de acôrdo com o axioma OM, temos $a<(2e)^{-1}(a+b)$; anàlogamente, de $a<b$ vem $a+b<b+b=(2e)b$ e então $(2e)^{-1}(a+b)<b$. ∎

COROLÁRIO - O conjunto P^* dos elementos estritamente positivos de um corpo ordenado K não tem mínimo.

Basta aplicar o teorema acima para $a=0$ e $0<b$.

DEFINIÇÃO 25 - Diz-se que um corpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ é *arquimediano* se, e sòmente se, o grupo ordenado $(K,+,\leqslant)$ é arquimediano (ver a definição 18).

Para verificar que um dado corpo ordenado K é arquimediano basta comparar os elementos estritamente positivos de K com elemento unidade e, conforme o seguinte

TEOREMA 45 - Um corpo ordenado K é arquimediano se, e sòmente se, para todo elemento estritamente positivo a, de K, existe um número natural n tal que $a<ne$.

DEMONSTRAÇÃO - Se o corpo K é arquimediano nada temos para demonstrar. Recìprocamente, suponhamos que a condição acima esteja verificada e consideremos dois elementos quaisquer a e b, de K, tais que $0<a<b$. Se $e\leqslant a$ existe, por hipótese, um número natural n tal que $b<ne$ e para êste número n temos (corolário 2 do teorema 33) $ne\leqslant na$, portanto, $b<na$. Se $a<e$ temos $e<a^{-1}$, logo, existe $n\in N$ tal que $a^{-1}<ne$, de onde vem, $e<na$; portanto, de acôrdo com o caso anterior, existe $p\in N$ tal que $b<p(na)=(pn)a$. ∎

COROLÁRIO - Se a é um elemento estritamente positivo de um corpo arquimediano K, então existe um número natural não nulo n tal que $(ne)^{-1}<a$.

Com efeito, em virtude do teorema acima, existe $n\in N^*$ tal que $a^{-1}<ne$, de onde vem, $(ne)^{-1}<a$. ∎

TEOREMA 46 - O corpo primo K_0, de um corpo ordenado arquimediano K, é totalmente denso em K.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam a e b dois elementos quaisquer de K e suponhamos que $a<b$; precisamos mostrar que existe $x\in K_0$ tal que $a<x<b$ e para isso distinguiremos quatro casos.

1) $a=0$. Conforme o corolário acima existe $n\in N^*$ tal que

$$0<(ne)^{-1}<b$$

e basta escolher $x=(ne)^{-1}$.

2) $0<a<b$. Temos $0<b-a$, logo, em virtude do corolário acima, existe $n\in N^*$ tal que $(ne)^{-1}<b-a$ e como K é arquimediano existe, de acôrdo com o teorema 35, um único número natural não nulo m tal que

$$(m-1)(ne)^{-1}\leqslant a<m(ne)^{-1};$$

portanto,

$$a<m(ne)^{-1}=(me)(ne)^{-1}=[(m-1)e+e](ne)^{-1}=$$
$$=(m-1)(ne)^{-1}+(ne)^{-1}<a+(b-a)=b$$

e basta escolher $x=(me)(ne)^{-1}$.

3) $a<0<b$. Neste caso tomamos $x=0$.

4) $a<b<0$. Temos $0<-b<-a$, logo, de acôrdo com o segundo caso, existe $x\in K_0$ tal que $-b<x<-a$, de onde vem, $a<-x<b$, com $-x\in K_0$. ∎

Terminaremos esta secção estudando o problema do prolongamento da ordem definida sôbre um anel de integridade ordenado ao seu corpo de frações.

TEOREMA 47 - Seja $(A,+,\cdot,\leqslant)$ um anel de integridade ordenado e seja K o corpo de frações do anel de integridade A. Nestas condições, temos:

1) existe uma única ordem total R, sôbre o conjunto K, que é prolongamento da ordem $\leqslant$ e que é compatível com a estrutura de corpo definida sôbre K;

2) o conjunto P' dos elementos positivos de K, pela ordem R, é formado por tôdas as frações a/b (a e b em A e $b\neq 0$) tais que $0\leqslant ab$.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o subconjunto P' definido na parte 2) acima e vamos mostrar que P' satisfaz as condições

I, II, III, IV e $P \subset P'$, onde P indica o conjunto dos elementos positivos de A. Notemos, inicialmente, que a condição imposta sôbre a fração a/b para que esta fração pertença a P' não depende da representação dêste elemento, ou seja, se $a/b = c/d$ e se $0 \leqslant ab$, então temos $0 \leqslant cd$; isto é imediato, pois, de $ad = bc$ vem $(ab)(cd) = (bc)^2$, logo, $0 \leqslant (ab)(cd)$ e como $0 \leqslant ab$ teremos, conforme a regra dos sinais, $0 \leqslant cd$. Esta observação nos permite representar dois elementos dados x e y de P' sob as formas $x = a/c$ e $y = b/c$, com a, b e c em A e $c \neq 0$.

I. $P' + P' \subset P'$.

Sejam x e y dois elementos quaisquer de P'; conforme notámos acima x e y podem ser representados sob a forma $x = a/c$ e $y = b/c$, com a, b e c em A e $c \neq 0$. Por hipótese temos $ac \in P$ e $bc \in P$, logo, $(a+b)c = ac + bc \in P + P \subset P$, de onde resulta que o elemento $x + y = (a+b)/c$ pertence a P'.

II. $P' \cap (-P') = \{0\}$.

Seja x um elemento de $P' \cap (-P')$, temos $x \in P'$, logo, $x = a/b$, com a e b em A, $b \neq 0$ e $0 \leqslant ab$; mas $-x = (-a)/b \in P'$, portanto, $0 \leqslant (-a)b$ ou $ab \leqslant 0$ e então $ab = 0$, de onde vem, $a = 0$, ou seja, $x = 0$.

III. $P' \cup (-P') = K$.

Seja $x = a/b$ (a e b em A, $b \neq 0$) um elemento qualquer de K; temos $ab \in A = P \cup (-P)$, logo, $ab \in P$ ou $ab \in -P$. Se $ab \in P$, temos $x \in P'$; de $ab \in -P$ resulta $-(ab) = (-a)b \in P$, logo, $-x = (-a)/b \in P'$.

IV. $P'P' \subset P'$.

Se x e y são dois elementos quaisquer de P', podemos escrever $x = a/c$, e $y = b/c$, com a, b e c em A e $c \neq 0$; por hipótese, temos $ac \in P$ e $bc \in P$, logo, $(ac)(bc) = (ab)c^2 \in P$, portanto, $xy = (ab)/c^2 \in P'$.

$P \subset P'$.

É imediato, pois, todo elemento a de P pode ser representado sob a forma $a/1$ e temos $a \cdot 1 = a \in P$, portanto, $a \in P'$.

Fica assim demonstrado que P' satisfaz as condições do teorema 39; portanto, existe uma ordem total R, sôbre o conjunto K, compatível com a estrutura de corpo definida sôbre K, tal que $P' = \{x \in K \mid 0 R x\}$ e como $P \subset P'$ resulta que a ordem R é um prolongamento da ordem $\leqslant$. Falta, portanto, verificar que a ordem R que satisfaz estas condições é única. Suponhamos, então, que R_1 seja uma ordem total sôbre K satisfazendo as mesmas condições, seja $P_1 = \{x \in K \mid 0 R_1 x\}$ e notemos que $P_1 \cap A = P$; se $x = a/b$ é um elemento qualquer de P_1, com a e b em A e $b \neq 0$, temos $b^2 \in P \subset P_1$, logo, $b^2 x \in P_1 P_1 \subset P_1$, ou seja, $ab \in P_1 \cap A = P$, de onde vem, $x = a/b \in P'$ e, portanto, $P_1 \subset P'$. Notando-se que $-P_1 \subset -P'$, teremos

$$P' = P' \cap K = P' \cap [P_1 \cup (-P_1)] =$$
$$= P_1 \cup [P' \cap (-P_1)] \subset P_1 \cup [P' \cap (-P')] = P_1 \cup \{0\} = P_1,$$

logo, $P' \subset P_1$ e então $P_1 = P'$, ou seja, a ordem R_1 coincide com a ordem R. ∎

De acôrdo com êste teorema, aplicado para o caso particular em que $A = \mathbf{Z}$ e $K = \mathbf{Q}$, concluímos que o corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais é ordenável; além disso, como $\mathbf{Z}$ admite uma única estrutura de anel ordenado (teorema 40) resulta que o corpo $\mathbf{Q}$ só pode ser ordenado de um único modo. Temos assim o seguinte

TEOREMA 48 - Existe uma única ordem total $\leqslant$, sôbre o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais, compatível com sua estrutura de corpo; além disso, um número racional a/b (a e b inteiros, $b \neq 0$) é positivo se, e sòmente se, ab é um número natural.

A única ordem definida sôbre $\mathbf{Q}$ é chamada ordem habitual dos números racionais e, conforme o teorema 45, sabemos que o corpo $\mathbf{Q}$ é denso por esta ordem.

Seja K_0 o corpo primo de um corpo ordenado K; de acôrdo com os teoremas 37 e 31, a aplicação $f: \mathbf{Q} \longrightarrow K_0$ definida por $f(m/n) = (me)/(ne)$ é um isomorfismo de $\mathbf{Q}$ em K_0 e notando-se que $0 \leqslant mn$ se, e sòmente se, $0 \leqslant (me)(ne)$, resulta que f é um isomorfismo ordenado, portanto, temos o seguinte

TEOREMA 49 - O corpo dos números racionais é ordenadamente isomorfo ao corpo primo de todo corpo ordenado.

Obtém-se um primeiro exemplo de corpo arquimediano pelo seguinte

TEOREMA 50 - O corpo ordenado dos números racionais é arquimediano.

DEMONSTRAÇÃO - Se a é um número racional estritamente positivo podemos representá-lo sob a forma $a = m/n$, onde m e n são números naturais não nulos; observando-se que $m/n < m+1$ resulta, em virtude do teorema 45, que $\mathbf{Q}$ é um corpo arquimediano. ∎

EXERCÍCIOS

134. Se $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ é uma família de elementos de um corpo ordenado K, tem-se

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2; \quad \text{além disso,} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$$

se, e sòmente se, $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

135. Mostrar que num corpo ordenado K, tem-se $2|ab| \leq a^2+b^2$ e $0 \leq a^2+ab+b^2$, quaisquer que sejam a e b em K.

136. Sejam a, b, c e d elementos de um corpo ordenado K, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$; mostrar que $ab^{-1} \leq cd^{-1}$ se, e sòmente se, $abd^2 \leq b^2cd$.

137. Sejam a e b elementos de um corpo ordenado K e sejam m e n números inteiros; verificar as seguintes propriedades:

a) se $m<n$ e se $1<a$, então $a^m<a^n$;

b) se $m<n$ e se $0<a<1$, então $a^n<a^m$;

c) se $0<a<b$ e se $n>0$, então $a^n<b^n$;

d) se $0<a<b$ e se $n>0$, então $b^n<a^n$.

138. Seja $a>1$ um elemento de um corpo arquimediano K. a) Mostrar que para todo elemento positivo $b \in K$ existe um número natural n tal que $b<a^n$. b) Mostrar que para todo elemento positivo $b \in K$ existe um número natural n tal que $a^{-n}<b$. c) Dar as propriedades correspondentes às anteriores quando $0<a<1$. Sugestão: utilizar o exercício 130.

139. Seja $(A, +, \cdot, \leq)$ um anel de integridade ordenado e seja P o conjunto de seus elementos positivos; mostrar que P define uma ordem parcial R sôbre o corpo de frações K de A. Supondo-se que A não seja um corpo verificar quais das propriedades enunciadas nos teoremas 38 e 43 são verdadeiras para esta ordem.

140. Sejam $(A, +, \cdot, \leq)$ e $(A', +, \cdot, \leq)$ dois anéis de integridade ordenados, sejam $(K, +, \cdot, \leq)$ e $(K', +, \cdot, \leq)$ seus corpos ordenados de frações e suponhamos que exista um isomorfismo ordenado f de A em A'. Mostrar que f pode ser prolongado, de um único modo, a um isomorfismo ordenado $\bar{f}$ de K em K'.

141. Diz-se que um anel de integridade $(A, +, \cdot, \leq)$ é *bem ordenado* se, e sòmente se, o conjunto P dos elementos positivos de A é bem ordenado pela ordem induzida por $\leq$. Por exemplo, o anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros é bem ordenado e conforme o corolário do teorema 45 todo corpo ordenado não é bem ordenado. Neste exercício A indicará um anel de integridade bem ordenado e seu elemento unidade será indicado por e. Verificar as seguintes propriedades:

a) Se $0 \leq x \leq e$, com $x \in A$, então $x = 0$ ou $x = e$.

b) Se $ne \leq x \leq (n+1)e$, onde $x \in A$ e n é um número natural, então $x = ne$ ou $x = (n+1)e$.

c) O anel A satisfaz o axioma de Arquimedes.

d) O único sub-anel unitário de A é o próprio A, isto é, tem-se $A = \boldsymbol{Z}e$.

e) Todo anel de integridade bem ordenado é ordenadamente isomorfo ao anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros.

CAPÍTULO V

CORPO DOS NÚMEROS REAIS E CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

INTRODUÇÃO

Estudaremos, neste capítulo, dois corpos fundamentais: o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais e corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos. Inicialmente, veremos no §1.1 o conceito de corpo ordenado completo: diz-se que um corpo ordenado K é completo se, e sòmente se, todo subconjunto não vazio e majorado, de K, tem supremo (axioma de completividade). É, então, necessário demonstrar que existe um corpo ordenado completo; com êste objetivo estudaremos, nos parágrafos 1.2 e 1.3 as sucessões convergentes e as sucessões fundamentais de elementos de um corpo ordenado. Terminaremos o §1 estabelecendo diversas caracterizações de um corpo ordenado completo que estão dadas no teorema 11. No §2 construiremos, por intermédio das sucessões fundamentais de números racionais, um corpo ordenado completo $\boldsymbol{R}$ que será denominado corpo dos números reais; êste processo é devido a Cantor (1845-1918), criador da teoria dos conjuntos. Mostraremos que o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais é arquimediano (lema 13), que $\boldsymbol{R}$ é «completo» no seguinte sentido: tôda sucessão fundamental de números reais é convergente (teorema 16). Finalmente, mostraremos que existe uma única estrutura de ordem, sôbre $\boldsymbol{R}$, compatível com sua estrutura de corpo e que dois corpos ordenados completos são ordenadamente isomorfos. Portanto, em virtude do teorema 16, o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais pode ser definido, a menos de um isomorfismo ordenado, como um corpo ordenado K que satisfaz um dos seguintes axiomas:

a) todo subconjunto não vazio e majorado, de K, admite supremo (axioma de completividade);

b) K é arquimediano e tôda sucessão fundamental, de elementos de K, é convergente;

c) tôda sucessão crescente e majorada, de elementos de K, é convergente;

d) K é arquimediano e K satisfaz o axioma dos intervalos encaixantes.

Preferimos definir o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais por intermédio das sucessões fundamentais e não pelos «cortes de Dedekind», pois o primeiro processo pode ser estendido, com ligeiras modificações, para um espaço métrico e também para a construção do corpo dos números p-ádicos (ver os exercícios 62, 63, 64 e 65).

No corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais não está definida, em geral, a raiz n-ésima de um número real; por exemplo, só existe a raiz quadrada de um número real a se, e sòmente se, a é positivo. Para eliminar esta restrição é necessário ampliar $\boldsymbol{R}$ com a introdução de novos elementos: os números complexos. Faremos isso no §3 onde construiremos, pelo processo devido a Hamilton (1805-1865), o corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos.

§1 - CORPOS ORDENADOS COMPLETOS

1.1 - SUPREMO E ÍNFIMO

Seja E um conjunto não vazio ordenado pela ordem parcial $\leqslant$ e seja S um subconjunto, de E, não vazio e majorado, logo, o conjunto M dos majorantes de S é não vazio e se existir o mínimo L de M diremos que L é o supremo ou extremo superior de S e que S é um conjunto que admite supremo. Observemos que se $L' \in E$ e se L' é majorante de S, então $L \leqslant L'$, pois, $L = min M$. Portanto, a definição de supremo de S pode ser reformulada do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 1 - Diz-se que um elemento $L \in E$ é o *supremo* de S se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

a) para todo s em S, tem-se $s \leqslant L$;

b) se L' é um elemento qualquer de E e se $s \leqslant L'$, para todo s em S, então $L \leqslant L'$.

É evidente que a condição a) impõe que L seja majorante de S e b) nos mostra que L é o menor majorante de S. Se a ordem $\leqslant$ é total, a condição b) pode ser dada sob a forma:

b') se L' é um elemento qualquer de E e se $L' < L$, então existe s em S tal que $L' < s \leqslant L$.

É imediato que se o conjunto S admite supremo, então êste elemento é único e por isso mesmo é que usamos o artigo definido na definição acima. Indica-se o supremo de S (caso exista) pela notação $sup S$ (leia-se: supremo de S). Anàlogamente, define-se o *ínfimo* (ou extremo inferior) de um conjunto não vazio e majorado S, que será indicado por $inf S$ (leia-se: ínfimo de S).

Observemos que se o conjunto S admite supremo L (resp., ínfimo l), então L é o máximo (resp., mínimo) de S se, e sòmente se, $L \in S$ (resp. $l \in S$). Notemos ainda que se S admite supremo, então S é necessàriamente majorado e convém frizar que nem todo conjunto não vazio e majorado tem supremo (ver o exemplo 6).

Verifica-se, fàcilmente, que se S e S_1 são dois subconjuntos de E tais que $S_1 \subset S$ e $S_1 \neq \emptyset$ e se S e S_1 admitem supremos (resp., ínfimos), então $sup S_1 \leqslant sup S$ (resp., $inf S \leqslant inf S_1$).

EXEMPLO 1 - Todo subconjunto finito e não vazio S, de um conjunto totalmente ordenado E, tem supremo e ínfimo que são, respectivamente, o máximo e o mínimo de S.

EXEMPLO 2 - Seja E um conjunto infinito e consideremos o subconjunto $\mathcal{A}$, de $\mathcal{P}(E)$, formado por tôdas as partes finitas de E; ordenando-se $\mathcal{P}(E)$ por inclusão $\subset$ é fácil ver que $E = sup \mathcal{A}$ e $\emptyset = inf \mathcal{A} = min \mathcal{A}$. Notemos que, neste caso, não vale a condição b') para $E = sup \mathcal{A}$.

EXEMPLO 3 - O ínfimo do conjunto P^* dos elementos estritamente positivos de um corpo ordenado K é igual a zero; conforme o corolário do teorema 43; Capítulo IV, êste conjunto não tem mínimo. Além disso, P^* não admite supremo, pois êste conjunto não é majorado.

EXEMPLO 4 - Consideremos o conjunto S de todos os números racionais $\frac{n}{n+1}$, com $n \in \boldsymbol{N}$. Temos $0 \leqslant \frac{n}{n+1}$, para todo $n \in \boldsymbol{N}$ e como $0 \in S$ resulta que $0 = min S = inf S$. Afirmamos que $1 = sup S$. Com efeito, é imediato que $\frac{n}{n+1} < 1$, para todo $n \in \boldsymbol{N}$; por outro lado, se $L' < 1$, com $L' \in \boldsymbol{Q}$, existe, conforme o teorema 44 do Capítulo IV, um número natural n tal que $\frac{L'}{1-L'} < n$ e daqui resulta $L' < \frac{n}{n+1}$.

DEFINIÇÃO 2 - Seja $(G, +, \leqslant)$ um grupo comutativo totalmente ordenado e suponhamos que o conjunto G tenha mais de

um elementos; diz-se que G é um grupo ordenado *completo* se, e sòmente se, vale o seguinte axioma (chamado axioma de completividade):

AC: todo subconjunto, de G, não vazio e majorado admite supremo.

EXEMPLO 5 - O grupo ordenado $(\mathbf{Z},+,\leqslant)$, onde $\leqslant$ é a ordem habitual dos números inteiros, é completo, pois todo subconjunto de $\mathbf{Z}$ não vazio e majorado admite máximo (ver o exercício 18, Capítulo III).

LEMA 1 - Um subconjunto não vazio S, de um grupo totalmente ordenado $(G,+,\leqslant)$, admite supremo se, e sòmente se, $-S$ admite ínfimo; neste caso, tem-se

$$sup(-S) = -infS \quad \text{e} \quad inf(-S) = -supS.$$

As verificações das propriedades acima se baseiam, simplesmente, nas definições de supremo e de ínfimo e serão deixadas a cargo do leitor. Como conseqüência imediata dêste lema temos o seguinte

TEOREMA 1 - Seja $(G,+,\leqslant)$ um grupo comutativo totalmente ordenado e suponhamos que o conjunto G tenha mais de um elemento; nestas condições, G é um grupo ordenado completo se, e sòmente se, todo subconjunto de G, não vazio e minorado, tem ínfimo.

TEOREMA 2' - Todo grupo ordenado completo G é arquimediano.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam a e b dois elementos de G tais que $0<a<b$ e consideremos o conjunto

$$S=\{na\in G \mid n\in N\}.$$

Se, por absurdo, $na<b$ para todo número natural n, resulta que S é majorado, logo, existe $L=supS$; notando-se que $L-a<L$ concluímos, em virtude de b'), que existe $pa\in S$ $(p\in N)$ tal que $L-a<pa\leqslant L$, de onde vem, $L<(p+1)a$ e obtém-se assim uma contradição, pois $na\leqslant L$ para todo número natural n. ∎

DEFINIÇÃO 3 - Diz-se que um corpo ordenado $(K,+,\cdot,\leqslant)$ é *completo* se, e sòmente se, o grupo ordenado $(K,+,\leqslant)$ é completo.

Desta definição resulta, imediatamente, o seguinte corolário do teorema 2:

COROLÁRIO 1 - Todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Conforme o teorema 45 do Capítulo IV e o corolário acima, temos o seguinte

COROLÁRIO 2 - O corpo primo, de um corpo ordenado completo K, é totalmente denso em K.

EXEMPLO 6 - Consideremos o subconjunto

$$S=\{x\in\mathbf{Q} \mid 0<x \text{ e } x^2<2\}$$

do corpo ordenado $\mathbf{Q}$ dos números racionais. É imediato que S é limitado, pois 0 e 2 são, respectivamente, minorante e majorante de S e também é imediato que $0=minS=infS$. Afirmamos que S não admite supremo. De fato, suponhamos, por absurdo, que $a\in\mathbf{Q}$ seja o supremo de S; temos, necessàriamente, $0<a<2$. Já sabemos que não existe um número racional que elevado ao quadrado seja igual a 2 (ver o exercício 86, Capítulo IV); portanto, podemos distinguir dois casos: a) $a^2<2$ e b) $2<a^2$.

a) Consideremos o número racional

$$a'=\frac{4a}{2+a^2}>0;$$

temos

$$a'^2=\frac{16a^2}{(2-a^2)^2+8a^2}\leqslant 2,$$

logo, $a'^2<2$ e então $a'\in S$. Por outro lado, de

$$a^2<\tfrac{1}{2}(2+a^2)<2$$

vem

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{2+a^2},$$

logo,

$$a<\frac{4a}{2+a^2}=a',$$

o que é absurdo, pois a e a' são elementos de S e a é o máximo de S.

b) De

$$2<\tfrac{1}{2}(2+a^2)<a^2$$

vem

$$\frac{2+a^2}{2a}<a;$$

portanto, existe $s\in S$ tal que

$$\frac{2+a^2}{2a}<s\leqslant a,$$

de onde resulta

$$\left(\frac{2+a^2}{2a}\right)^2<s^2<2.$$

Por outro lado, temos

$$\left(\frac{2+a^2}{2a}\right)^2 = \frac{(2-a^2)+8a^2}{4a^2} \geqslant 2$$

e chegamos assim a uma contradição.

Êste exemplo nos mostra que o corpo dos números racionais não é completo.

EXERCÍCIOS

1. Determinar os supremos e ínfimos (caso existam) dos seguintes subconjuntos do corpo $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais:

a) $\left\{\frac{n-1}{n+1} \in \boldsymbol{Q} \mid n \in \boldsymbol{N}\right\}$;

b) $\left\{\frac{n}{1+n^2} \in \boldsymbol{Q} \mid n \in \boldsymbol{N}\right\}$;

c) $\{a^n \in \boldsymbol{Q} \mid n \in \boldsymbol{N}\}$, com $a \in \boldsymbol{Q}$ e $0 < a < 1$;

d) $\{a^n \in \boldsymbol{Q} \mid n \in \boldsymbol{N}\}$, com $a \in \boldsymbol{Q}$ e $1 < a$.

e) $\left\{\frac{2n-1}{3n+1} \in \boldsymbol{Q} \mid n \in \boldsymbol{N}\right\}$.

2. Se S é um subconjunto não vazio de um conjunto totalmente ordenado E e se S admite supremo e ínfimo, então $infS \leqslant supS$. Em que condições vale o sinal de igualdade?

3. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de um grupo ordenado G e suponhamos que êstes conjuntos admitam supremos; mostrar que

$$sup(A \cup B) = sup\{supA, supB\}.$$

4. Com as notações do exercício anterior, se A e B admitem ínfimos, tem-se

$$inf(A \cup B) = inf\{infA, infB\}.$$

5. Com as notações e hipóteses do exercício 3, mostrar que

$$sup(A+B) = supA + supB.$$

6. Com as notações e hipóteses do exercício 4, mostrar que

$$inf(A+B) = infA + infB.$$

7. Seja A um subconjunto não vazio de um corpo ordenado K e suponhamos que A admita supremo e ínfimo; verificar as propriedades:

a) se $c \in K$ e se $0 \leqslant c$, então $sup(cA) = c\,supA$ e $inf(cA) = c\,infA$;

b) se $c \in K$ e se $c \leqslant 0$, então $sup(cA) = c\,infA$ e $inf(cA) = c\,supA$.

Observação: cA indica o conjunto de todos os produtos cx com x em A.

8. Sejam A e B subconjuntos não vazios do conjunto P dos elementos positivos de um corpo ordenado K e suponhamos que A e B admitam supremos; mostrar que

$$sup(AB) = supA \cdot supB.$$

9. Seja $S = \{x \in \boldsymbol{Q} \mid 0 < x \text{ e } x^2 < 3\}$; mostrar que $infS = minS = 0$ e que S não admite supremo.

10. Seja $S = \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^2 < 3\}$; mostrar que S é majorado e minorado e que S não admite supremo e nem ínfimo.

1.2 - SUCESSÕES CONVERGENTES

Seja A um anel comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$ e indiquemos por $S(A) = A^{\boldsymbol{N}}$ o conjunto de tôdas as sucessões $(a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de elementos de A (ver o §3.3, Capítulo I); no que se segue usaremos a notação abreviada (a_n) para indicar a sucessão $(a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$, onde $a_n \in A$ para todo número natural n. Conforme vimos no exemplo 10 do Capítulo IV define-se uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sôbre o conjunto $S(A)$ colocando-se

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

e

$$(a_n)(b_n) = (a_n b_n),$$

quaisquer que sejam (a_n) e (b_n) em $S(A)$. Notemos que o elemento zero do anel $S(A)$ é a sucessão nula $0 = (a_n)$, onde $a_n = 0$, para todo número natural n; o elemento unidade é a sucessão $1 = (e_n)$, onde $e_n = 1$ para todo número natural n e, finalmente, $-(a_n) = (-a_n)$. O anel $S(A)$ passa a ser denominado *anel das sucessões de elementos de* A ou *anel das sucessões sôbre* A. Observemos que um elemento $(a_n) \in S(A)$ é inversível se, e sòmente se, a_n é inversível para todo número natural n e, neste caso, tem-se

$$(a_n)^{-1} = (a_n^{-1}).$$

Uma sucessão $(a_n) \in S(A)$ é *constante* se, e sòmente se, $a_n = a$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$; esta sucessão será indicada, simplesmente, por (a) e também diremos que (a) é a sucessão constante determinada por a. Em particular, tem-se $0 = (0)$ e $1 = (1)$. É imediato que o conjunto de tôdas as sucessões constantes sôbre A é um sub-anel unitário de $S(A)$ que é isomorfo a A.

Suponhamos agora que o anel A seja um corpo ordenado K e indiquemos por P (resp., P^*) o conjunto dos elementos positivos (resp., estritamente positivos) de K. Os conceitos de sucessão majorada, minorada e limitada, assim como os conceitos de majorante, minorante, supremo e ínfimo de uma sucessão são definidos através do conjunto dos têrmos desta sucessão. Por exemplo, a sucessão $(a_n) \in S(K)$ é ma-

jorada se, e sòmente se, o conjunto $\{a_n, n\in\mathbf{N}\}$ é majorado, ou seja, se, e sòmente se, existe $M\in K$ tal que $a_n\leqslant M$ para todo número natural n. É fácil verificar que a sucessão (a_n) é limitada se, e sòmente se, existe $M\in P^*$ tal que $|a_n|\leqslant M$ para todo $n\in\mathbf{N}$. Um outro exemplo: um elemento $L\in K$ é o supremo da sucessão (a_n) se, e sòmente se, L é majorante desta sucessão e se $L'<L$, com $L'\in K$, então existe $p\in\mathbf{N}$ tal que $L'<a_p\leqslant L$.

Sabemos que a aplicação $m/n\mapsto(me)/(ne)$, onde e é o elemento unidade de K, m e n são números inteiros e $n\neq 0$, é um isomorfismo ordenado φ do corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais sôbre o corpo primo K_0 de K (ver o §3.3, Capítulo IV); por causa disso e com o objetivo de simplificar as notações indicaremos o elemento $(me)/(ne)$ de K_0 por m/n, portanto, o símbolo m/n representará o número racional m/n e seu correspondente $(me)/(ne)\in K_0$ por meio do isomorfismo φ.

Indicaremos por $S_l(K)$ o conjunto de tôdas as sucessões limitadas de elementos do corpo ordenado K e pode-se vérificar, fàcilmente, que $S_l(K)$ é um sub-anel unitário do anel $S(K)$ das sucessões sôbre K.

DEFINIÇÃO 3 - Diz-se que uma sucessão $(a_n)\in S(K)$ *converge para um elemento* $a\in K$ ou que (a_n) *é convergente para* a se, e sòmente se, para todo $\varepsilon\in P^*$ existe $n_0\in\mathbf{N}$ tal que

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

qualquer que seja $n\in\mathbf{N}$ com $n>n_0$. Diz-se que (a_n) é uma *sucessão convergente* se, e sòmente se, existe $a\in K$ tal que (a_n) seja convergente para a.

TEOREMA 3 - Tôda sucessão $(a_n)\in S(K)$ converge, no máximo, para um elemento de K.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, por absurdo, que (a_n) seja convergente para a e b em K, com $a\neq b$; tomando-se $\varepsilon=\frac{1}{2}|a-b|\in P^*$, existem, conforme a definição acima, números naturais p e q tais que

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ para todo } n>p$$

e

$$|a_n-b|<\varepsilon \text{ para todo } n>q.$$

Pondo-se $n_0=max\{p,q\}$ e escolhendo-se $n>n_0$ teremos

$$|a-b|=|(a-a_n)+(a_n-b)|\leqslant|a_n-a|+|a_n-b|<2\varepsilon=|a-b|,$$

e chegamos assim a uma contradição. ∎

DEFINIÇÃO 4 - Se uma sucessão $(a_n)\in S(K)$ converge para um elemento a de K, diremos que a é o *limite* desta sucessão e escreveremos

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n \quad \text{ou} \quad a=\lim a_n.$$

EXEMPLO 7 - Tôda sucessão constante $(a)\in S(K)$ é convergente e seu limite é a.

EXEMPLO 8 - A sucessão $(a_n)\in S(\mathbf{Q})$, definida por $a_n=(n+1)^{-1}$, é convergente a zero. Com efeito, para todo número racional estritamente positivo ε existe um número natural n_0 tal que $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}<n_0$, pois $\mathbf{Q}$ é arquimediano; portanto, para todo $n>n_0$, teremos

$$|(n+1)^{-1}-0|=(n+1)^{-1}<(n_0+1)^{-1}<\varepsilon,$$

logo, $\lim(n+1)^{-1}=0$.

EXEMPLO 9 - A sucessão $(2^{-n})\in S(\mathbf{Q})$ é convergente a zero. Com efeito, é fácil verificar que $n+1\leqslant 2^n$, logo, $2^{-n}\leqslant(n+1)^{-1}$, para todo número natural n; portanto, de acôrdo com o exemplo anterior, tem-se $\lim 2^{-n}=0$.

EXEMPLO 10 - A sucessão $(n)\in S(\mathbf{Q})$ não é convergente.

EXEMPLO 11 - A sucessão $(a_n)\in S(\mathbf{Q})$, definida por $a_n=(-1)^n n(n+1)^{-1}$, não é convergente.

EXEMPLO 12 - Seja K um corpo arquimediano e consideremos a sucessão $(a_n)\in S(K)$, onde $a_n=(n+1)^{-1}$, para todo $n\in\mathbf{N}$. Conforme o corolário do teorema 44, Capítulo IV, para todo $\varepsilon\in P^*$ existe $n_0\in\mathbf{N}$ tal que $(n_0+1)^{-1}<\varepsilon$, de onde vem, fàcilmente, que a sucessão acima é convergente a zero. Anàlogamente, pode-se ver que a sucessão $(2^{-n}a)\in S(K)$, onde $a\in K$ e K é arquimediano, é convergente a zero.

O conjunto de tôdas as sucessões convergentes, de elementos do corpo ordenado K será indicado pela notação $S_c(K)$. Daremos a seguir diversas propriedades das sucessões convergentes.

LEMA 2 - $S_c(K)\subset S_l(K)$, isto é, tôda sucessão convergente é limitada.

Com efeito, se $(a_n)\in S_c(K)$ e se $\lim a_n=a$, então, dado $1\in P^*$ existe $p\in\mathbf{N}$ tal que $|a_n-a|<1$, para todo $n>p$; mas

$$||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|$$

(ver o exercício 124, Capítulo IV), logo, $||a_n|-|a||<1$, de onde vem,

$$|a|-1<|a_n|<|a|+1,$$

para todo $n>p$. Pondo-se

$$M=max\{|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_p|,|a|+1\}$$

teremos, para todo $n\in N$, $|a_n|\leq M$; portanto, (a_n) é limitada.

Indicaremos por $S_0(K)$ o conjunto de tôdas as sucessões, de $S_c(K)$, que são convergentes a zero. É imediata a seguinte propriedade:

LEMA 3 - A sucessão $(a_n)\in S_0(K)$ é convergente para zero se, e sòmente se, $(a_n-a)\in S_0(K)$.

LEMA 4 - $S_0(K)$ é fechado em relação à subtração e, portanto, também é fechado em relação à adição.

DEMONSTRAÇÃO - Se (a_n) e (b_n) são dois elementos quaisquer de $S_0(K)$, então para todo $\varepsilon\in P^*$ existem números naturais p e q tais que

$$|a_n|<2^{-1}\varepsilon, \text{ qualquer que seja } n<q$$

e

$$|b_n|<2^{-1}\varepsilon, \text{ qualquer que seja } n>q;$$

pondo-se $n_0=max\{p,q\}$ teremos, para todo $n>n_0$:

$$|a_n-b_n|\leq|a_n|+|b_n|<2\cdot 2^{-1}\varepsilon=\varepsilon,$$

logo, $(a_n-b_n)\in S_0(K)$. ∎

LEMA 5 - Se $(a_n)\in S_l(K)$ e se $(b_n)\in S_0(K)$, então $(a_nb_n)\in S_0(K)$; daqui resulta, em particular, que $S_0(K)$ é fechado em relação à multiplicação.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese existe $M\in P^*$ tal que $|a_n|\leq M$, para todo $n\in N$ e se ε é um elemento qualquer de P^*, existe $n_0\in N$ tal que $|b_n|<\varepsilon M^{-1}$, para todo $n>n_0$. Portanto, para todo $n>n_0$, teremos

$$|a_nb_n|=|a_n||b_n|<M\varepsilon M^{-1}=\varepsilon,$$

logo, $(a_nb_n)\in S_0(K)$. ∎

TEOREMA 4 - $S_c(K)$ é um sub-anel unitário do anel $S_l(K)$.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que $1=(1)\in S_c(K)$. Se (a_n) e (b_n) são dois elementos quaisquer de $S_c(K)$ e se $lim\,a_n=a$ e $lim\,b_n=b$, então $(a_n-a)\in S_0(K)$ e $(b_n-b)\in S_0(K)$; mas

$$([a_n-b_n]-[a-b])=(a_n-a)+(b_n-b)$$

e

$$(a_nb_n-ab)=(a_n-a)(b_n-b)+(a)(b_n-b)+(b)(a_n-a),$$

logo, conforme os lemas 4 e 5, teremos

$$([a_n-b_n]-[a-b])\in S_0(K) \quad \text{e} \quad (a_nb_n-ab)\in S_0(K),$$

portanto,

$$(a_n-b_n)\in S_c(K) \quad \text{e} \quad (a_nb_n)\in S_c(K).$$ ∎

COROLÁRIO - Se (a_n) e (b_n) são dois elementos quaisquer de $S_c(K)$, tem-se:

a) $lim(a_n+b_n)=lim\,a_n+lim\,b_n$;

b) $lim(-a_n)=-lim\,a_n$;

c) $lim(a_nb_n)=lim\,a_n\cdot lim\,b_n$.

Verifica-se, fàcilmente, a seguinte propriedade:

LEMA 6 - Se $(a_n)\in S_c(K)$, então $(|a_n|)\in S_c(K)$ e

$$lim|a_n|=|lim\,a_n|.$$

LEMA 7 - Se $(a_n)\in S_c(K)$ e se $lim\,a_n=a\neq 0$, então existe $M\in P^*$ e existe $n_0\in N$ tais que $M<|a_n|$, para todo $n>n_0$.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o lema anterior, temos $lim|a_n|=|a|$, logo, dado $M=2^{-1}|a|\varepsilon P^*$ existe $n_0\in N$ tal que $||a_n|-|a||<M$, ou,

$$|a|-M<|a_n|<|a|+M,$$

de onde vem, $M<|a_n|$, para todo $n>n_0$. ∎

TEOREMA 5 - Uma sucessão $(a_n)\in S_c(K)$ é inversível em $S_c(K)$ se, e sòmente se, $a_n\neq 0$ para todo $n\in N$ e $lim\,a_n=a\neq 0$; neste caso, tem-se

$$(a_n)^{-1}=(a_n^{-1}) \quad \text{e} \quad lim\,a_n^{-1}=a^{-1}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Se (a_n) é inversível em $S_c(K)$, então existe $(b_n)\in S_c(K)$ tal que $(a_n)\cdot(b_n)=(1)$, logo, $a_nb_n=1$, de onde vem, $a_n\neq 0$ e $b_n=a_n^{-1}$, para todo $n\in N$, portanto, $(a_n)^{-1}=(a_n^{-1})$; além disso, de acôrdo com o corolário do teorema 4, temos

$$1=lim\,a_n\cdot lim\,b_n=ab,$$

logo, $a\neq 0$ e $b=a^{-1}$, portanto, $lim\,a_n^{-1}=a^{-1}$. Recìprocamente, suponhamos que $a_n\neq 0$, para todo $n\in N$ e que $lim\,a_n=a\neq 0$; neste caso, a sucessão (a_n) é inversível em $S(K)$ e sua inversa é (a_n^{-1}), logo, basta demonstrar que $(a_n^{-1})\in S_c(K)$. Ora, de acôrdo com o lema 7, existe $M\in P^*$ e existe $p\in N$ tais que $M<|a_n|$ para todo $n>p$ e de $lim\,a_n=a$ resulta que para todo $\varepsilon\in P^*$ existe $q\in N$ tal que

$$|a_n-a|<M|a|\varepsilon,$$

qualquer que seja $n>q$. Pondo-se $n_0=max\{p,q\}$ teremos, para todo $n>n_0$:

$$|a_n^{-1}-a^{-1}|=|a_n^{-1}a^{-1}(a-a_n)|=|a_n|^{-1}|a|^{-1}|a-a_n|<M^{-1}|a|^{-1}M|a|\varepsilon=\varepsilon;$$

portanto, (a_n^{-1}) é convergente para a^{-1}. ∎

Terminaremos esta secção estabelecendo uma caracterização de um corpo ordenado arquimediano pelas sucessões de elementos de seu corpo primo.

TEOREMA 6 - Um corpo ordenado K é arquimediano se, e sòmente se, todo elemento de K é o limite de uma sucessão de elementos do corpo primo K_0 de K.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que o corpo ordenado K seja arquimediano e seja b um elemento qualquer de K; podemos, evidentemente, supor que b seja estritamente positivo. Para cada número natural n consideremos o conjunto

$$B_n = \{j \in \boldsymbol{N} \mid 2^{-n} j \geqslant b\};$$

como K é arquimediano resulta que B_n é não vazio, logo, existe o mínimo j_n de B_n e temos $j_n > 0$ e $j_n - 1 \notin B_n$; portanto,

$$2^{-n}(j_n - 1) < b \leqslant 2^{-n} j_n,$$

de onde vem,

$$0 \leqslant 2^{-n} j_n - b < 2^{-n} \qquad (1).$$

Ora, a sucessão (2^{-n}) é convergente a zero (ver o exemplo 12); portanto, de (1) resulta que a sucessão $(2^{-n} j_n)$ é convergente para b. Recìprocamente, suponhamos que todo elemento de K seja o limite de uma sucessão de elementos de K_0 e seja b um elemento estritamente positivo de K; por hipótese, existe uma sucessão convergente $(b_n) \in S(K_0)$ tal que $\lim b_n = b$; portanto, dado $1 \in P^*$ existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que $|b_n - b| < 1$, ou, $b_n - 1 < b < b_n + 1$, para todo número natural $n > n_0$. Como o corpo ordenado K_0 é arquimediano resulta que existe um múltiplo inteiro $q \cdot 1$ de seu elemento unidade 1 que é estritamente maior do que $b_n + 1$ (teorema 44, Capítulo IV); portanto, em virtude dêste mesmo teorema, o corpo ordenado K também é arquimediano. ∎

EXERCÍCIOS

11. Verificar, detalhadamente, que $S(A)$ é um anel comutativo com elemento unidade.

12. Verificar que $S_l(K)$ é um sub-anel unitário do anel $S(K)$;

13. Mostrar que $S(K)$ e $S_l(K)$ não são anéis de integridade.

14. Determinar todos os divisores do zero do anel $S(K)$.

15. Seja K um corpo ordenado arquimediano; verificar que as seguintes sucessões $(a_n) \in S(K)$ são convergentes:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

b) $a_n = a^n$, onde $a \in K$ e $0 \leqslant a \leqslant 1$;

c) $a_n = (n+1)^{-2}$;

d) $a_n = n/(n^2+1)$.

16. Seja K um corpo ordenado; mostrar que as seguintes sucessões $(a_n) \in S(K)$ são limitadas e não são convergentes:

a) $a_n = (-1)^n n(n+1)^{-1}$;

b) $a_n = (-1)^n$;

c) $a_n = 1 + (-1)^n$.

17. Dar um exemplo de duas sucessões não convergentes cujo produto seja convergente.

18. Se K é um corpo ordenado arquimediano e se $(a_n) \in S_l(K)$, então $(2^{-n} a_n) \in S_0(K)$.

19. Demonstrar o lema 6.

20. Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões convergentes de elementos de um corpo ordenado K e suponhamos que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$; demonstrar que $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

21. Seja K um corpo ordenado e seja p um número natural qualquer; se $(a_n) \in S(K)$, consideremos a sucessão (b_n) definida por $b_n = a_{n+p}$, para todo $n \in \boldsymbol{N}$. Verificar as seguintes propriedades:

a) se $(a_n) \in S_l(K)$, então $(b_n) \in S_l(K)$;

b) se $(a_n) \in S_c(K)$, então $(b_n) \in S_c(K)$ e $\lim a_n = \lim b_n$.

22. Seja (a_n) uma sucessão de elementos de um corpo ordenado K e seja (i_n) uma sucessão estritamente crescente de números naturais (isto é, $i_n < i_{n+1}$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$); a sucessão $(a_{i_n})_{n \in \boldsymbol{N}}$ é denominada, neste caso, subsucessão própria de (a_n). Verificar as seguintes propriedades:

a) se $(a_n) \in S_l(K)$, então $(a_{i_n}) \in S_l(K)$;

b) Se (a_n) é convergente, então tôda subsucessão própria de (a_n) também é convergente e ambas têm o mesmo limite;

c) se (a_n) admite duas subsucessões próprias convergentes e com limites distintos, então (a_n) não é convergente.

1.3 - SUCESSÕES FUNDAMENTAIS

Seja K um corpo ordenado e seja $(a_n) \in S(K)$ uma sucessão convergente para $a \in K$; se ε é um elemento qualquer de P^*, existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que $|a_n - a| < 2^{-1}\varepsilon$, para todo $n > n_0$, logo, se m a n são dois números naturais quaisquer, com $m > n_0$ e $n > n_0$, teremos

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < 2 \cdot 2^{-1}\varepsilon = \varepsilon.$$

Uma sucessão que satisfaz esta condição é denominada sucessão fundamental (ou sucessão regular ou ainda sucessão de Cauchy). Precisamente, daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 5 - Diz-se que uma sucessão $(a_n) \in S(K)$ é *fundamental* se, e sòmente se, para todo $\varepsilon \in P^*$ existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

quaisquer que sejam os números naturais m e n, com $m>n_0$ e $n>n_0$.

Indicaremos por $S_f(K)$ o conjunto de tôdas as sucessões fundamentais de elementos do corpo ordenado K; conforme o que vimos acima, temos

$$S_c(K)\subset S_f(K),$$

isto é, tôda sucessão convergente é fundamental. Em geral, tem-se

$$S_c(K)\neq S_f(K),$$

isto é, podem existir sucessões fundamentais que não são convergentes. Por exemplo, pode-se verificar que a sucessão $(a_n)\in S(\mathbf{Q})$, definida por

$$a_0=0 \quad \text{e} \quad a_{n+1}=(2+a_n)^{-1},$$

para todo $n\in\mathbf{N}$, é fundamental e se esta sucessão fôsse convergente para $a\in\mathbf{Q}$ teríamos, de acôrdo com o corolário do teorema 4, o teorema 5 e o exercício 21, $a=(2+a)^{-1}$, ou, $(a+1)^2=2$, o que seria absurdo. Ver também os exemplos 13, 14 e 15 abaixo.

LEMA 8 - $S_f(K)\subset S_l(K)$, isto é, tôda sucessão fundamental é limitada.

DEMONSTRAÇÃO - Se $(a_n)\in S_f(K)$, então, dado $1\in P^*$ existe $p\in\mathbf{N}$ tal que $|a_m-a_n|<1$, quaisquer que sejam m e n, com $m>p$ e $n>p$; fixando-se $n=p+1$ teremos, para todo $m>p$:

$$|a_m|=|a_m-a_{p+1}+a_{p+1}|\leqslant|a_m-a_{p+1}|+|a_{p+1}|<1+|a_{p+1}|.$$

Pondo-se $\quad M=max\{|a_0|,\cdots,|a_p|,1+|a_{p+1}|\}$

teremos $|a_n|\leqslant M$, para todo $m\in\mathbf{N}$; portanto, (a_n) é limitada. ∎

TEOREMA 7 - $S_f(K)$ é um sub-anel unitário de $S_l(K)$.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme o lema anterior, $S_f(K)$ é um subconjunto de $S_l(K)$ e é imediato que $0=(0)$ e $1=(1)$ são elementos de $S_f(K)$; precisamos, então, verificar as condições do teorema 9, Capítulo IV, para o subconjunto $S_f(K)$ do anel $S_l(K)$.

1) $S_f(K)$ é fechado em relação à subtração e, portanto, também é fechado em relação à adição.

Com efeito, se (a_n) e (b_n) são dois elementos quaisquer de $S_f(K)$, então, para todo $\varepsilon\in P^*$, existem números naturais p e q tais que $\quad |a_m-a_n|<2^{-1}\varepsilon,$

quaisquer que sejam m e n com $m>q$ e $n>p$, e

$$|b_m-b_n|\in 2^{-1}\varepsilon,$$

quaisquer que sejam m e n com $m>q$ e $n>p$; pondo-se

$$n_0=max\{p,q\}$$

teremos, para todo $m>n_0$ e para todo $n>n_0$:

$$|(a_m-b_m)-(a_n-b_n)|=|(a_m-a_n)+(b_m-b_n)|\leqslant$$
$$\leqslant|a_m-a_n|+|b_m-b_n|<2\cdot 2^{-1}\varepsilon=\varepsilon;$$

portanto, a sucessão (a_n-b_n) é fundamental.

2) $S_f(K)$ é fechado em relação à multiplicação.

Com efeito, sejam (a_n) e (b_n) dois elementos quaisquer de $S_f(K)$; conforme o lema 8, estas sucessões são limitadas, logo, existem M_1 e M_2, em P^*, tais que

$$|a_n|\leqslant M_1 \quad \text{e} \quad |b_n|\leqslant M_2,$$

para todo número natural n. Por outro lado, para todo $\varepsilon\in P^*$ existem números naturais p e q tais que

$$|a_m-a_n|<2^{-1}\varepsilon M_1^{-1},$$

quaisquer que sejam m e n, com $m>p$ e $n>q$, e

$$|b_m-b_n|<2^{-1}\varepsilon M_1^{-1},$$

quaisquer que sejam m e n, com $m>q$ e $n>q$. Pondo-se

$$n_0=max\{p,q\}$$

teremos, para todo $m>n_0$ e para todo $n>n_0$:

$$|a_mb_n-a_nb_n|=|a_m(b_m-b_n)+b_n(a_m-a_n)|\leqslant$$
$$\leqslant|b_n||a_m-a_n|+|a_m||b_m-b_n|<M_1\cdot 2^{-1}\varepsilon M_1^{-1}+M_2\cdot 2^{-1}\varepsilon M_2^{-1}=\varepsilon;$$

portanto, a sucessão (a_nb_n) é fundamental. ∎

LEMA 9 - Se $(a_n)\in S_f(K)$ e se $(a_n)\notin S_0(K)$, então existe $M\in P^*$ e existe $n_0\in\mathbf{N}$ tais que $M<|a_n|$, para todo $n>n_0$.

DEMONSTRAÇÃO - Se a propriedade acima não fôsse verdadeira, então, para todo $M\in P^*$ e para todo $n_0\in\mathbf{N}$ existiria $m\in\mathbf{N}$, $m<n_0$, tal que $|a_m|\leqslant M$. Por outro lado, a sucessão (a_n) é fundamental, logo, dado $M\in P^*$ existe $n_0\in\mathbf{N}$ tal que $|a_m-a_n|<M$, quaisquer que sejam m e n, com $m>n_0$ e $n>n_0$. Portanto, teríamos, para todo $n>n_0$:

$$|a_n|=|a_n-a_m+a_m|\leqslant|a_m-a_n|+|a_m|<2M$$

e a sucessão (a_n) seria convergente a zero, contra a hipótese. ∎

Daremos ainda uma propriedade que será utilizada no §2 para definir número real positivo; é a seguinte

LEMA 10 - Se $(a_n)\in S_f(K)$ e se $(a_n)\notin S_0(K)$, então existe $M\in P^*$ e existe $n_0\in\mathbf{N}$ tais que

$$M<a_n \text{ para todo } n>n_0$$

ou

$$a_n<-M \text{ para todo } n>n_0.$$

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com a prorpiedade anterior, existe $2M\in P^*$ e existe $p\in\mathbf{N}$ tais que

$$2M<|a_n| \text{ para todo } n>p.$$

Por outro lado, a sucessão (a_n) é fundamental, logo, dado $M\in P^*$ existe $q\in N$ tal que

$$a_m-M<a_n<a_m+M,$$

quaisquer que sejam m e n, com $m>q$ e $n>q$. Seja

$$n_0=max\{p,q\};$$

se existir $m>n_0$ tal que $2M<a_n$, teremos $M<a_m-M$, logo, $M<a_n$, para todo $n>n_0$ e se existir $m>n_0$ tal que $a_m<-2M$, teremos $a_m+M<-M$, logo, $a_n<-M$ para todo $n>n_0$. ∎

TEOREMA 8 - Uma sucessão $(a_n)\in S_f(K)$ é inversível em $S_f(K)$ se, e sòmente se, $(a_n)\notin S_0(K)$ e $a_n\neq 0$ para todo $n\in N$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $(a_n)\in S_f(K)$ é inversível em $S_f(K)$, então existe $(b_n)\in S_f(K)$ tal que $(a_n)(b_n)=(1)$, de onde vem, $a_nb_n=1$, logo, $a_n\neq 0$ para todo $n\in N$; se $(a_n)\in S_0(K)$ teríamos, conforme o lema 5, $(a_nb_n)\in S_0(K)$ o que seria absurdo. Recìprocamente, suponhamos que $(a_n)\notin S_0(K)$ e que $a_n\neq 0$ para todo $n\in N$; neste caso, (a_n) é inversível em $S(K)$ e sua inversa é (a_n^{-1}), portanto, basta demonstrar que (a_n^{-1}) é fundamental. Ora, (a_n) não é convergente a zero, logo, em virtude do lema 9, existe $M\in P^*$ e existe $p\in N$ tais que

$$M<|a_n| \text{ para todo } n>p$$

e como (a_n) é fundamental, para todo $\varepsilon\in P^*$, existe $q\in N$ tal que

$$|a_m-a_n|<\varepsilon M^2,$$

quaisquer que sejam m e n, com $m>q$ e $n>q$. Pondo-se

$$n_0=max\{p,q\}$$

teremos, para todo $m>n_0$ e para todo $n>n_0$:

$$|a_m^{-1}-a_n^{-1}|=|a_m^{-1}a_n^{-1}(a_n-a_m)|=|a_m|^{-1}|a_n|^{-1}|a_m-a_n|<M^{-1}M^{-1}\varepsilon M^2=\varepsilon,$$

portanto, (a_n^{-1}) é fundamental. ∎

EXERCÍCIOS

23. Com as notações do exercício 21, mostrar que se $(a_n)\in S_f(K)$, então $(b_n)\in S_f(K)$.

24. Com as notações do exercício 22, verificar as propriedades:

a) se (a_n) é fundamental, então tôda subsucessão própria de (a_n) também é fundamental;

b) se (a_n) é limitada, então existe uma subsucessão própria de (a_n) que é fundamental;

c) se (a_n) é limitada e se o corpo K é completo, então existe uma subsucessão própria de (a_n) que é convergente.

25. Verificar que a sucessão $(a_n)\in S(Q)$, definida por $a_0=0$ e $a_{n+1}=(2+a_n)^{-1}$ para todo número natural n, é fundamental.

1.4 - CARACTERIZAÇÕES DE UM CORPO ORDENADO COMPLETO

Veremos, inicialmente, algumas propriedades das sucessões crescentes e decrescentes de elementos de um corpo ordenado K.

DEFINIÇÃO 6 - Diz-se que uma sucessão $(a_n)\in S(K)$ é *crescente* (resp., *decrescente*) se, e sòmente se, $a_n\leq a_{n+1}$ (resp., $a_{n+1}\leq a_n$) para todo número natural n.

Se (a_n) é crescente e convergente, então o lema 2 nos garante que (a_n) é majorada; os exemplos abaixo nos mostram que, em geral, nem tôda sucessão crescente e majorada ou decrescente e minorada é convergente.

EXEMPLO 13 - A sucessão $(n)\in S(K)$, onde K é um corpo ordenado não arquimediano é crescente e majorada (teorema 44, Capítulo IV) e é imediato que esta sucessão não é convergente.

EXEMPLO 14 - Consideremos a sucessão $(a_n)\in S(Q)$ definida por $a_0=1$ e

$$a_{n+1}=\frac{4a_n}{2+a_n^2}$$

para todo número natural n; conforme vimos no exemplo 6, temos $0<a_n$ e $a_n^2<2$, para todo $n\in N$, logo, a sucessão (a_n) é limitada e por outro lado

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n(2-a_n^2)}{2+a_n^2}>0;$$

portanto, (a_n) é crescente. Se esta sucessão fôsse convergente para $a\in Q$ teríamos por passagem ao limite: $a=\frac{4a}{2+a^2}$ ou $a^3=2a$, o que seria absurdo, pois a é um número racional não nulo.

EXEMPLO 15 - Consideremos a sucessão $(b_n)\in S(Q)$ definida por $b_0=2$ e

$$b_{n+1}=\frac{2+b_n^2}{2b_n},$$

para todo $n\in N$; conforme vimos no exemplo 6, temos $0<b_n$ e $2<b_n^2$ para todo $n\in N$, logo, esta sucessão é limitada e por outro lado

$$b_n-b_{n+1}=\frac{b_n^2-2}{2b_n}>0;$$

portanto, (b_n) é decrescente. Se esta sucessão fôsse convergente para $b\in Q$ teríamos por passagem ao limite: $b=\frac{2+b^2}{2b}$, de

onde vem, $b^2=2$, o que seria absurdo, pois b é um número racional.

Temos o seguinte critério para determinar em que condições uma sucessão crescente e majorada é convergente:

TEOREMA 9 - Uma sucessão crescente $(a_n)\in S(K)$ é convergente se, e sòmente se, esta sucessão admite supremo $a\in K$; neste caso, tem-se $lim\, a_n = a$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que esta sucessão admita supremo $a\in K$, logo, $a_n \leqslant a$ para todo $n\in \boldsymbol{N}$. Se ε é um elemento qualquer de P^* existe, conforme a condição b') da definição 1, um número natural p tal que $a-\varepsilon<a_p\leqslant a$; portanto, para todo $n>p$, teremos $a-\varepsilon<a_p\leqslant a_n\leqslant a$, de onde vem, $|a_n-a|<\varepsilon$ e então $lim\, a_n=a$. Recìprocamente, suponhamos que a sucessão $(a_n)\in S(K)$ seja convergente para $a\in K$; verificaremos as condições a) e b'), da definição 1, para o elemento a e para o conjunto $\{a_n,\ n\in \boldsymbol{N}\}$ dos têrmos desta sucessão. a) Se, por absurdo, existe $p\in \boldsymbol{N}$ tal que $a<a_p$, então tomando-se $\varepsilon = a_p - a\in P^*$, existe $n_0\in \boldsymbol{N}$ tal que $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, de onde vem $a_n<a_p$, para todo $n>n_0$; escolhendo-se $n>max\{n_0,p\}$ obteremos uma contradição, pois (a_n) é, por hipótese, crescente. b') Se $a'<a$, com $a'\in K$, então, dado $\varepsilon = a-a'\in P^*$ existe $n_0\in \boldsymbol{N}$ tal que $|a_n-a|<\varepsilon$, ou, $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, de onde vem, $a'<a_n$ para todo $n>n_0$; em resumo, existe $n\in \boldsymbol{N}$ tal que $a'<a_n\leqslant a$. ∎

COROLÁRIO - Uma sucessão decrescente $(a_n)\in S(K)$ é convergente se, e sòmente se, esta sucessão admite ínfimo $a\in K$; neste caso, tem-se $lim\, a_n = a$.

Basta aplicar o teorema anterior à sucessão crescente e majorada $(-a_n)$.

TEOREMA 10 - Um corpo ordenado K é arquimediano se, e sòmente se, tôda sucessão de elementos de K, crescente e majorada, é fundamental.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que o corpo K seja arquimediano e seja $(a_n)\in S(K)$ uma sucessão crescente e majorada. Seja ε um elemento qualquer de P^* e consideremos o conjunto S de todos os números naturais s tais que $a_n\leqslant b-s\varepsilon$ para todo $n\in \boldsymbol{N}$, onde b é um majorante de (a_n); é evidente que S é não vazio e como K é arquimediano, S é majorado, portanto, existe $p=max\, S$ e temos $a_n\leqslant a-p\varepsilon$, para todo $n\in \boldsymbol{N}$. Ora,

$p+1\notin S$, logo, existe $n_0\in \boldsymbol{N}$ tal que $b-(p+1)\varepsilon<a_{n_0}$; portanto, se m e n são dois números naturais quaisquer, com $m\geqslant n>n_0$, temos

$$b-(p+1)\varepsilon<a_{n_0}\leqslant a_n\leqslant a_m\leqslant b-p\varepsilon,$$

de onde vem, $|a_m-a_n|<\varepsilon$, isto é, a sucessão (a_n) é fundamental. Para a recíproca basta notar que se o corpo ordenado K não é arquimediano, então a sucessão $(n)\in S(K)$ é crescente e majorada (teorema 44, Capitulo IV) e é imediato que esta sucessão não é fundamental. ∎

Se a e b, com $a<b$, são dois elementos quaisquer de um conjunto E, totalmente ordenado pela ordem $\leqslant$, então o conjunto

$$[a,b]=\{x\in E \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

é chamado *intervalo fechado* (de E) *de extremidades* a *e* b ou *de origem* a *e extremo* b.

DEFINIÇÃO 7 - Diz-se que um corpo ordenado K satisfaz o *axioma dos intervalos encaixantes* se, e sòmente se, é válida a seguinte condição: se $(I_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ é uma sucessão qualquer de intervalos fechados de K e se $I_{n+1}\subset I_n$ para todo $n\in \boldsymbol{N}$, então o conjunto $\bigcap_{n\in \boldsymbol{N}} I_n$ não é vazio.

EXEMPLO 16 - Mostraremos que o corpo ordenado $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais não satisfaz o axioma dos intervalos encaixantes. Com efeito, consideremos as sucessões (a_n) e (b_n) definidas, respectivamente, nos exemplos 14 e 15; verifica-se, por indução finita sôbre n, que $a_n b_n = 2$ e daqui resulta que

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{(b_n-a_n)^2}{b_n(2+a_n^2)}>0 \qquad (2),$$

logo, $a_n<b_n$ para todo número natural n. Se $I_n=[a_n,b_n]$, então é imediato que $I_{n+1}\subset I_n$, pois, (a_n) é crescente e (b_n) é decrescente. Suponhamos, por absurdo, que $\bigcap_n I_n\neq\emptyset$, logo, existe um número racional c tal que

$$a_n<c<b_n \qquad (3)$$

para todo $n\in \boldsymbol{N}$; ora, de (2) resulta

$$b_{n+1}-a_{n+1}\leqslant\tfrac{1}{6}(b_n-a_n)^2$$

de onde vem

$$b_n-a_n\leqslant(\tfrac{1}{6})^{2^n-1} \qquad (4).$$

De (3) e (4) concluímos, fàcilmente, que (a_n) e (b_n) são convergentes para o número racional c, contra os resultados estabelecidos nos exemplos 14 e 15.

Demonstraremos, a seguir, o principal teorema dêste parágrafo que nos dará algumas caracterizações de um corpo ordenado completo:

TEOREMA 11 - As seguintes condições, sôbre um mesmo corpo ordenado K, são equivalentes:

a) K é completo;

b) K é arquimediano e $S_c(K) = S_f(K)$;

c) tôda sucessão crescente e majorada, de elementos de K, é convergente;

d) K é arquimediano e K satisfaz o axioma dos intervalos encaixantes.

DEMONSTRAÇÃO - a) implica b). Conforme o corolário 1 do teorema 2, o corpo K é arquimediano, logo, só falta demonstrar que se $(a_n) \in S_f(K)$, então $(a_n) \in S_c(K)$. Ora, a sucessão (a_n) é limitada e K é completo, portanto, para cada $n \in \boldsymbol{N}$, existe $b_n = sup(a_i) i \geqslant n$. É imediato que a sucessão (b_n) é decrescente e minorada; como K é completo, existe $a = inf(b_n)$, logo, de acôrdo com o corolário do teorema 9, a sucessão (b_n) é convergente para a. Como $a = inf(b_n)$ resulta que se ε é um elemento qualquer de P^*, então existe $p \in \boldsymbol{N}$ tal que

$$a \leqslant b_p < a + 3^{-1}\varepsilon,$$

logo, para todo $n > p$, temos

$$a \leqslant b_n < a + 3^{-1}\varepsilon.$$

Por outro lado, de $b_n = sup(a_i)_{i \geqslant n}$ resulta que existe $i_n \geqslant n$, tal que

$$a - 3^{-1}\varepsilon < a_{i_n} \leqslant b_n$$

e como (a_n) é fundamental, existe $q \in \boldsymbol{N}$ tal que

$$|a_m - a_n| < 3^{-1}\varepsilon,$$

quaisquer que sejam m e n, com $m > q$ e $n > q$. Pondo-se

$$n_0 = max\{p, q\}$$

teremos, para todo $n > n_0$:

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{i_n}) + (a_{i_n} - b) + (b_n - a)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n - a_{i_n}| + |a_{i_n} - b_n| + |b_n - a_n| < 3 \cdot 3^{-1}\varepsilon = \varepsilon;$$

portanto, $lim\, a_n = a$.

b) implica c). Como o corpo K é arquimediano resulta, conforme o teorema 10, que tôda sucessão crescente e majorada é fundamental e como $S_c(K) = S_f(K)$, concluímos que tôda sucessão crescente e majorada é convergente.

c) implica d). Admitindo-se c) resulta que tôda sucessão crescente e majorada é fundamental, logo, em virtude do teorema 10, K é arquimediano. Consideremos, então, uma sucessão $(I_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de intervalos fechados de K tal que $I_{n+1} \subset I_n$ e ponhamos $I_n = [a_n, b_n]$ para todo número natural n; neste caso, temos $a_n < b_n$ e é imediato que a sucessão (a_n) é crescente e majorada (por b_0), portanto, de acôrdo com c), esta sucessão é convergente e em virtude do teorema 9 temos $a = lim\, a_n = sup(a_n)$. Afirmamos que $a \in I_n$, ou seja, $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$. Com efeito, temos $a_n \leqslant a$, pois, $a = sup(a_n)$; se, por absurdo, existisse $p \in \boldsymbol{N}$ tal que $b_p > a = sup(a_n)$, existiria $q \in \boldsymbol{N}$ tal que $b_p < a_q \leqslant a$ e pondo-se $r = max\{p, q\}$ teríamos $b_r \leqslant b_p < a_q \leqslant a_r$, contra a definição de a_r e de b_r. Portanto, o elemento a pertence à intersecção de todos os intervalos fechados I_n.

d) implica a). Seja S um subconjunto não vazio e majorado de K e suponhamos, inicialmente, que exista em S um elemento estritamente positivo s_0. Para cada número natural n consideremos o conjunto

$$B_n = \{j \in \boldsymbol{N} \mid 2^{-n}j \text{ é majorante de } S\};$$

como K é arquimediano resulta que B_n é não vazio, logo, existe $j_n = min B_n$ e temos $j_n > 0$, pois, por hipótese, existe em S um elemento estritamente positivo s_0. Colocaremos

$$b_n = 2^{-n}j_n \quad \text{e} \quad a_n = 2^{-n}(j_n - 1),$$

para todo número natural n e veremos a seguir algumas propriedades das sucessões (j_n), (b_n) e (a_n).

1. $j_{n+1} \leqslant 2j_n$. Basta notar que $2^{-n-1}(2j_n) = 2^{-n}j_n$, logo, $2j_n \in B_{n+1}$ e então, $2j_n \geqslant min B_{n+1} = j_{n+1}$.

2. $j_{n+1} = 2j_n$ ou $j_{n+1} + 1 = 2j_n$. De fato, se $2j_n > j_{n+1} + 1$, temos $2j_n \geqslant j_{n+1} + 2$ ou $2(j_n - 1) \geqslant j_{n+1}$, de onde vem, $2^{-n}(j_n - 1) \geqslant 2^{-n-1}j_{n+1}$; portanto, $2^{-n}(j_n - 1)$ é um majorante de S e então $j_n - 1 \in B_n$, o que é absurdo, pois $j_n = min B^n$ e $j_n - 1 < j_n$.

3. $b_{n+1} = b_n$ ou $b_{n+1} = b_n - 2^{-n-1}$, de onde vem, em particular, que (b_n) é decrescente. É uma conseqüência imediata da definição de b_n e da propriedade anterior.

4. $a_{n+1} = a_n$ ou $a_{n+1} = a_n + 2^{-n-1}$, de onde vem, em particular, que (a_n) é crescente. Com efeito, se $j_{n+1} + 1 = 2j_n$, temos

$$a_{n+1} = 2^{-n-1}(j_{n+1} - 1) = 2^{-n-1}(2j_n - 2) = 2^{-n}(j_n - 1) = a_n$$

e se $j_{n+1} = 2j_n$, teremos

$$a_{n+1} = 2^{-n-1}(j_{n+1} - 1) = 2^{-n-1}(2j_n - 1) = a_n + 2^{-n-1}.$$

5. $a_n \leqslant b_n$, logo, a_0 é um majorante de (b_n) e b_0 é um minorante de (a_n). Resulta, imediatamente, da definição de a_n e de b_n e das propriedades 3 e 4.

6. $(b_n - a_n)$ é uma sucessão convergente para zero. Basta notar que $b_n - a_n = 2^{-n}$ e levar em conta que o corpo K é arquimediano (ver exemplo 12).

Para cada número natural n, coloquemos $I_n = [a_n, b_n]$. É imediato que $I_{n+1} \subset I_n$; portanto, por hipótese, existe um elemento $a \in K$ tal que $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

7. $lim\, a_n = lim\, b_n = a$. Com efeito, temos $|a - a_n| \leqslant b_n - a_n = 2^{-n}$, logo, a sucessão $(a_n - a)$ é convergente a zero, de onde vem (lema 3), $lim\, a_n = a$. Anàlogamente, conclui-se que $lim\, b_n = a$.

8. $a = sup(a_n) = inf(a_n)$. É uma conseqüência imediata da propriedade anterior e do teorema 9 e seu corolário.

Finalmente, afirmamos que $a = sup\, S$ e para isso vamos verificar as condições a) e b') da definição 1.

a) Se, por absurdo, existe $s \in S$ tal que $a < s$, então existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $a \leqslant b_n < s$, pois $a = inf(b_n)$ e obtemos assim uma contradição, pois b_n é majorante de S.

b') Se $a' < a$, com $a' \in X$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $a' < a_n \leqslant a$, pois $sup\, a = (a_n)$ e neste caso, existe $s \in S$ tal que $a_n \leqslant s \leqslant a \leqslant b_n$ e temos $a' < s \leqslant a$, o que termina a verificação de b').

Falta ainda considerar o caso em que todo elemento do S é estritamente negativo. Se S é unitário nada temos para demonstrar; no caso contrário existem c e d em S com $c < d$ e então o conjunto

$$S_1 = \{x - c \in K \mid x \in S\}$$

é majorado, não vazio e $d - c \in S_1$ com $d - c > 0$; portanto, existe $L = sup\, S_1$ e é imediato que $L + c = sup\, S$. ∎

EXERCÍCIOS

26. Demonstrar que tôda sucessão crescente e majorada, de elementos de um corpo ordenado K, é convergente se, e sòmente se, tôda sucessão decrescente e minorada, sôbre K, é convergente.

27. Demonstrar que tôda sucessão crescente e majorada, de elementos de um corpo ordenado K, é uma sucessão fundamental se, e sòmente se, tôda sucessão decrescente e minorada, sôbre K, é fundamental

28. Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de elementos de um corpo ordenado completo K e suponhamos que: 1. $a_n \leqslant b_n$ para todo número natural n; 2. (a_n) é crescente e (b_n) é descrescente; 3. $(b_n - a_n)$ converge para zero. Nestas condições, demonstrar que existe um único elemento $L \in K$ tal que $a_n \leqslant L \leqslant b_n$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

29. Seja K_0 o corpo primo de um corpo ordenado K. Demonstrar que K é arquimediano se, e sòmente se, tôda sucessão, sôbre K_0, convergente em K_0, também é convergente em K.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §1

30. Demonstrar que todo elemento de um corpo ordenado completo K é o supremo de um subconjunto não vazio de seu corpo primo.

31. Demonstrar que a sucessão $(a_n) \in S(\mathbf{Q})$, definida por

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} 2^{-n(n+1)}, \quad \text{é fundamental e não convergente.}$$

32. Seja m um número natural não quadrado perfeito e consideremos as sucessões (a_n) e (b_n), sôbre $\mathbf{Q}$, definidas por

$$a_0 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{2ma_n}{m + a_n^2} \quad \text{e} \quad b_0 = m \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \frac{m + b_n^2}{2b_n}.$$

Mostrar que: 1. (a_n) é crescente e (b_n) é decrescente; 2. (a_n) e (b_n) são limitadas; 3. $(b_n - a_n)$ é convergente a zero; 4. (a_n) e (b_n) não são convergentes.

33. Seja K um corpo ordenado, seja M um subcorpo de K e suponhamos que o conjunto M seja totalmente denso em K. Verificar as seguintes propriedades, para uma sucessão $(a_n) \in S(M)$: a) $(a_n) \in S_f(M)$ se, e sòmente se, $(a_n) \in S_f(K)$; b) $(a_n) \in S_c(M)$ se, e sòmente se, $(a_n) \in S_c(K)$.

34. Se $(a_n) \in S_c(K)$ e se K é um corpo ordenado completo, então esta sucessão admite supremo e ínfimo e $inf(a_n) \leqslant lim\, a_n \leqslant sup(a_n)$. Em que condições valem os sinais de igualdade?

35. Se a é um elemento estritamente positivo de um grupo ordenado G, mostrar que a aplicação $f_a : \mathbf{Z} \to G$, definida por $f_a(n) = na$, é um monomorfismo ordenado de $\mathbf{Z}$ em G. Determinar a imagem de f_a. Dar o enunciado correspondente quando G é um grupo multiplicativo ordenado.

36. Se G é um grupo ordenado, mostrar que a aplicação $g_n : G \to G$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, definida por $g_n(x) = nx$, é um monomorfismo ordenado de G em G. Determinar a imagem de g_n. Dar o enunciado correspondente quando G é um grupo multiplicativo.

37. Seja G um grupo comutativo ordenado completo e suponhamos que exista o mínimo a do conjunto P^* dos elementos estritamente positivos de G. Demonstrar que a aplicação f_a, definida no exercício 35, é o único isomorfismo ordenado de $\mathbf{Z}$ em G. Observação: Êste resultado nos mostra que o grupo aditivo dos números inteiros pode ser definido, a menos de um isomorfismo ordenado, como um grupo comutativo ordenado cujo conjunto dos elementos estritamente positivos admite mínimo.

§2 - CORPO DOS NÚMEROS REAIS

2.1 - CONSTRUÇÃO DO CORPO DOS NÚMEROS REAIS

Consideremos o corpo ordenado $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais e seja $S_f(\boldsymbol{Q})$ o anel das sucessões fundamentais de elementos de $\boldsymbol{Q}$; vimos no parágrafo anterior que o conjunto $S_0(\boldsymbol{Q})$ das sucessões convergente a zero é um sub-anel unitário de $S_f(\boldsymbol{Q})$. Definiremos uma relação $\sim$ sôbre $S_f(\boldsymbol{Q})$ do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 8 - Se (a_n) e (b_n) são dois elementos quaisquer de $S_f(\boldsymbol{Q})$, então $(a_n)\sim(b_n)$ se, e sòmente se, $(a_n-b_n)\in S_0(\boldsymbol{Q})$.

TEOREMA 12 - A relação $\sim$, introduzida pela definição acima, é uma relação de equivalência sôbre o conjunto $S_f(\boldsymbol{Q})$, que é compatível com a adição e a multiplicação do anel $S_f(\boldsymbol{Q})$.

DEMONSTRAÇÃO - As condições E1, E2 e E3 da definicão de relação de equivalência são de verificação imediata. Se (a_n), (b_n) e (c_n) são elementos quaisquer de $S_f(\boldsymbol{Q})$ e se $(a_n)\sim(b_n)$, temos

$$(a_n+c_n)\sim(b_n+c_n) \tag{5}$$

e

$$(a_nc_n)\sim(b_nc_n) \tag{6},$$

isto é, a relação $\sim$ é compatível com a adição e com a multiplicação. Com efeito, (5) resulta de

$$(a_n+c_n)-(b_n+c_n)=(a_n-b_n)\in S_0(\boldsymbol{Q})$$

e (6) resulta do lema 5:

$$(a_nc_n)-(b_nc_n)=(a_nc_n-b_nc_n)=(a_n-b_n)(c_n)\in S_0(\boldsymbol{Q}).$$ ∎

COROLÁRIO - Se (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) são elementos quaisquer de $S_f(\boldsymbol{Q})$ e se $(a_n)\sim(b_n)$ e $(c_n)\sim(d_n)$, então $(a_n+c_n)\sim(b_n+d_n)$ e $(a_nc_n)\sim(b_nd_n)$.

Se (a_n) é um elemento qualquer de $S_f(\boldsymbol{Q})$, indicaremos por $\overline{(a_n)}$ a classe de equivalência módulo $\sim$ determinada por (a_n), isto é, $\overline{(a_n)}=\{(x_n)\in S_f(\boldsymbol{Q}) \mid (x_n)\sim(a_n)\}$.

O conjunto quociente de $S_f(\boldsymbol{Q})$ pela relação de equivalência $\sim$ será indicado por $\boldsymbol{R}$, isto é, $\boldsymbol{R}=S_f(\boldsymbol{Q})/\sim$. Conforme o teorema 4 do Capítulo I temos $\overline{(a_n)}=\overline{(b_n)}$ se, e sòmente se, $(a_n-b_n)\in S_0(\boldsymbol{Q})$ e lembremos que o conjunto $\boldsymbol{R}$ de tôdas as classes de equivalência módulo $\sim$ é uma partição de $S_f(\boldsymbol{Q})$.

Definiremos a soma e o produto de dois elementos quaisquer $\alpha=\overline{(a_n)}$ e $\beta=\overline{(b_n)}$, de $\boldsymbol{R}$, por meio de

$$\alpha+\beta=\overline{(a_n+b_n)}$$

e

$$\alpha\beta=\overline{(a_nb_n)}.$$

De acôrdo com o corolário acima é imediato que estas definições não dependem dos representantes (a_n) e (b_n) das classes de equivalência α e β. Ficam assim definidas operações de adição e de multiplicação

$$(\overline{(a_n)},\overline{(b_n)})\mapsto\overline{(a_n+b_n)}$$

e

$$(\overline{(a_n)},\overline{(b_n)})\mapsto\overline{(a_nb_n)},$$

sôbre o conjunto quociente $\boldsymbol{R}=S_f(\boldsymbol{Q})/\sim$ e temos o seguinte

TEOREMA 13 - As operações acima definem uma estrutura de corpo comutativo sôbre o conjunto $\boldsymbol{R}$.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar que valem os axiomas A1-A4, M1-M4 e D da definição de corpo comutativo; só faremos a verificação de A3, A4, M3 e M4 e deixaremos os outros a cargo do leitor.

A3. Considerando-se a classe de equivalência $0'=\overline{(0)}$, determinada pela sucessão constante (0), temos para todo $\alpha=\overline{(a_n)}\in\boldsymbol{R}$:

$$\alpha+0'=\overline{(a_n)}+\overline{(0)}=\overline{(a_n)}=\alpha;$$

portanto, $0'$ é o elemento zero para a operação de adição definida sôbre $\boldsymbol{R}$. Notemos que uma sucessão (x_n) pertence à classe de equivalência $0'$ se, e sòmente se, (x_n) é convergente a zero; portanto, $0'=S_0(\boldsymbol{Q})$.

A4. Seja $\alpha=\overline{(a_n)}$ um elemento qualquer de $\boldsymbol{R}$ e consideremos a classe de equivalência $-\alpha=\overline{(-a_n)}$; temos

$$\alpha+(-\alpha)=\overline{(a_n)}+\overline{(-a_n)}=\overline{(0)}=0';$$

portanto, $-\alpha=\overline{(-a_n)}$ é o oposto de $\alpha=\overline{(a_n)}$.

M3. Considerando-se a classe de equivalência $1'=\overline{(1)}$, determinada pela sucessão constante (1), temos para todo $\alpha=\overline{(a_n)}\in\boldsymbol{R}$:

$$\alpha\cdot 1'=\overline{(a_n)}\cdot\overline{(1)}=\overline{(a_n)}=\alpha;$$

portanto, $1'$ é o elemento unidade para a operação de multiplicação definida sôbre $\boldsymbol{R}$.

M4. Seja $\alpha=\overline{(a_n)}\neq 0'$, logo, $(a_n)\notin S_0(\boldsymbol{Q})$ e daqui resulta, em virtude do lema 9, que existe um número natural p tal que $a_n\neq 0$ para todo $n>p$. Consideremos, então, a sucessão $(b_n)\in S(\boldsymbol{Q})$ definida por $b_i=1$ para $i=0,1,\cdots,p$ e $b_n=a_n$ para todo $n>p$; é fácil verificar que $(b_n)\in S_f(\boldsymbol{Q})$ e que $(b_n)\sim(a_n)$, logo, $\alpha=\overline{(a_n)}=\overline{(b_n)}$. De acôrdo com o teorema 7 a sucessão (b_n) é inversível em $S_f(\boldsymbol{Q})$ e sua inversa é a sucessão (b_n^{-1}); pondo-se $\alpha^{-1}=\overline{(b_n^{-1})}$ teremos $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1'$, logo, α é inversível. ∎

Os elementos do corpo $\boldsymbol{R}$, construído acima, passam a ser denominados *números reais* e $(\boldsymbol{R},+,\cdot)$ é chamado *corpo dos números reais.*

TEOREMA 14 - O subconjunto $\boldsymbol{Q}'$, de $\boldsymbol{R}$, formado por tôdas as classes de equivalência $\overline{(a)}$ onde $a\in\boldsymbol{Q}$, é um subcorpo de $\boldsymbol{R}$ e a aplicação $f:\boldsymbol{Q}\longrightarrow\boldsymbol{Q}'$ definida por $f(a)=\overline{(a)}$ é um isomorfismo do corpo $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais no corpo $\boldsymbol{Q}'$.

As propriedades enunciadas no teorema acima são de verificação imediata e serão deixadas a cargo do leitor.

No que se segue identificaremos $\boldsymbol{Q}$ com $\boldsymbol{Q}'$ por meio do isomorfismo f, isto é, poremos $a=\overline{(a)}$, para todo $a\in\boldsymbol{Q}$. Uma vez feita esta identificação temos $0=0'$ e $1=1'$; além disso, o corpo $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais passa a ser considerado como o corpo primo do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais. Em particular, todo número racional também é um número real; um número real que não seja racional é denominado *número irracional.*

Indiquemos por P_0 (resp., P_0^*) o conjunto de todos os números racionais positivos (resp., estritamente positivos).

DEFINIÇÃO 9 - Diz-se que uma sucessão $(a_n)\in S_f(\boldsymbol{Q})$ é *estritamente positiva* se, e sòmente se, existe $M\in P_0^*$ e existe $n_0\in\boldsymbol{N}$ tais que $M<a_n$ para todo $n>n_0$.

De acôrdo com o lema 10 temos, imediatamente, o seguinte

LEMA 11 - Uma sucessão $(a_n)\in S_f(\boldsymbol{Q})$ é estritamente positiva se, e sòmente se, $(a_n)\notin S_0(\boldsymbol{Q})$ e existe $n_0\in\boldsymbol{N}$ tal que $0<a_n$ para todo $n>n_0$.

A relação $\sim$ conserva as sucessões estritamente positivas em virtude do seguinte

LEMA 12 - Sejam (a_n) e (b_n) dois elementos quaisquer de $S_f(\boldsymbol{Q})$; se $(b_n)\sim(a_n)$ e se (a_n) é estritamente positiva, então (b_n) também é estritamente positiva.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o lema 10 existem $M\in P_0^*$ e $p\in\boldsymbol{N}$ tais que $M<a_n$ para todo $n>p$; por outro lado, a sucessão (b_n-a_n) é convergente a zero, logo, dado $2^{-1}M\in P_0^*$ existe $q\in\boldsymbol{N}$ tal que $|b_n-a_n|<2^{-1}M$, ou, $a_n-2^{-1}M<b_n<a_n+2^{-1}M$ para todo $n>q$. Pondo-se $n_0=max\{p,q\}$ teremos, para todo $n>n_0$:

$$b_n>a_n-2^{-1}M>M-2^{-1}M=2^{-1}M;$$

portanto, (b_n) é estritamente positiva. ∎

DEFINIÇÃO 10 - Diz-se que um número real $\alpha=\overline{(a_n)}$, onde $(a_n)\in S_f(\boldsymbol{Q})$, é *estritamente positivo* se, e sòmente se, a sucessão (a_n) é estritamente positiva.

O lema anterior nos mostra que esta definição não depende do representante (a_n) da classe de equivalência $\alpha=\overline{(a_n)}$ e o lema 11 nos mostra que se α é estritamente positivo, então $\alpha\neq 0$.

Indicaremos por P^* o conjunto de todos os números reais que são estritamente positivos e colocaremos $P=P^*\cup\{0\}$. Definiremos uma relação $\leqslant$, sôbre $\boldsymbol{R}$, do seguinte modo: se α e β são dois números reais quaisquer, então $\alpha\leqslant\beta$ se, e sòmente se, $\beta-\alpha\in P$. Portanto, se $\alpha=\overline{(a_n)}$ e se $\beta=\overline{(b_n)}$, temos $\alpha<\beta$ se, e sòmente se, (a_n-b_n) não é convergente a zero e existe $n_0\in\boldsymbol{N}$ tal que $a_n\leqslant b_n$ para todo $n>n_0$.

TEOREMA 15 - A relação $\leqslant$, definida acima, é uma ordem total sôbre $\boldsymbol{R}$ que é compatível com a adição e com a multiplicação.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar as condições I, II, III e IV do teorema 38, Capítulo IV.

I. $P+P\subset P$. Sejam $\alpha=\overline{(a_n)}$ e $\beta=\overline{(b_n)}$ dois elementos quaisquer de P; se $\alpha=0$ ou $\beta=0$, é imediato que $\alpha+\beta\in P$, logo, podemos supor que $\alpha\neq 0$ e $\beta\neq 0$. Neste caso, conforme a definição 9, existem números naturais p e q e existem números racionais $M_1\in P_0^*$ e $M_2\in P_0^*$ tais que

$$M_1<a_n \text{ para todo } n>p$$

e

$$M_2<b_n \text{ para todo } n>q;$$

pondo-se $n_0=max\{p,q\}$, teremos, para todo $n>n_0$:

$$0<M_1+M_2<a_n+b_n;$$

portanto, (a_n+b_n) é estritamente positiva e então $\alpha+\beta\in P^*$.

II. $P\cap(-P)=\{0\}$. Seja $\alpha=\overline{(a_n)}$ um elemento de $P\cap(-P)$ e suponhamos, por absurdo, que $\alpha\neq 0$. De $\alpha\in P^*$ resulta, em virtude do lema 11, que existe $p\in\boldsymbol{N}$ tal que $0<a_n$ para todo $n>p$; de $\alpha\in -P$ vem $-\alpha=\overline{(-a_n)}\in P^*$, logo, existe $q\in\boldsymbol{N}$ tal que $0<-a_n$ ou $a_n<0$, para todo $n>q$. Tomando-se $n>max\{p,q\}$ teremos $0<a_n$ e $a_n<0$ e chegamos assim a uma contradição.

III. $P\cup(-P)=\boldsymbol{R}$. Seja $\alpha=\overline{(a_n)}$ um número real qualquer e suponhamos que $\alpha\notin P$, logo, (a_n) não é convergente a zero; portanto, de acôrdo com o lema 10, existe $M\in P_0^*$ e existe $n_0\in\boldsymbol{N}$ tais que $a_n<-M$ para todo $n>n_0$, ou seja, $-\alpha\in P^*$ e então $-\alpha\in P$.

IV. $PP \subset P$. Sejam $\alpha = \overline{(a_n)}$ e $\beta = \overline{(b_n)}$ dois elementos quaisquer de P; se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, é imediato que $\alpha\beta \in P$, logo, podemos supor que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Neste caso, temos $\alpha\beta = \overline{(a_n b_n)} \neq 0$, ou seja, $(a_n b_n)$ não é convergente a zero; por outro lado, em virtude do lema 11, existem números naturais p e q tais que

$$a_n > 0 \text{ para todo } n > p$$

e

$$b_n > 0 \text{ para todo } n > q;$$

portanto, para todo $n > max\{p,q\}$ teremos $a_n b_n > 0$ e então o mesmo lema nos mostra que $(a_n b_n)$ é estritamente positiva, ou seja, $\alpha\beta \in P^*$. ∎

É imediato que a ordem $\leqslant$, definida sôbre $\boldsymbol{R}$, induz a ordem habitual sôbre o corpo $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais, pois já sabemos que o corpo $\boldsymbol{Q}$ só pode ser ordenado de um único modo (teorema 49, Capítulo IV); portanto, em particular, temos $P_0 = P \cap \boldsymbol{Q}$.

LEMA 13 - O corpo ordenado $\boldsymbol{R}$ é arquimediano.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o teorema 44 do Capítulo IV basta demonstrar que se $\alpha = \overline{(a_n)} \in P^*$, então existe um número natural a tal que $\alpha < a$. Ora, (a_n) é uma sucessão fundamental, logo, é majorada em $\boldsymbol{Q}$, isto é, existe $M \in P_0^*$ tal que $a_n < M$, para todo $n \in \boldsymbol{N}$; como $\boldsymbol{Q}$ é arquimediano existe $a \in \boldsymbol{N}$ tal que $M < a$, portanto, o número natural $a = \overline{(a)}$ é estritamente maior do que $\alpha = \overline{(a_n)}$. ∎

Sendo $\boldsymbol{R}$ um corpo arquimediano, para todo $\varepsilon_1 \in P^*$ existe, em virtude do corolário do teorema 44, Capítulo IV, um número racional $\varepsilon \in P_0^*$ tal que $\varepsilon < \varepsilon_1$; portanto, para mostrar que uma sucessão $(\alpha_n) \in S(\boldsymbol{R})$ é fundamental, basta mostrar que, para todo número *racional* estritamente positivo ε, existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon$, quaisquer que sejam m e n, com $m > n_0$ e $n > n_0$. Vale uma observação análoga para sucessões convergentes de números reais.

LEMA 14 - Se $(a_n) \in S_f(\boldsymbol{Q})$, então $(a_n) \in S_c(\boldsymbol{R})$, isto é, tôda sucessão fundamental, de números racionais, é convergente para um número real; além disso, temos $lim\, a_n = \overline{(a_n)}$.

DEMONSTRAÇÃO - Para todo número racional $\varepsilon \in P_0^*$ existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que $|a_m - a_n| < \varepsilon$, ou, $a_m - \varepsilon < a_m < a_n + \varepsilon$, quaisquer que sejam m e n, com $m > n_0$ e $n > n_0$. Fixemos $p > n_0$ e indiquemos a_p por a; conforme a identificação de $\boldsymbol{Q}$ com $\boldsymbol{Q}'$ (teorema 14),

temos $a + \varepsilon = \overline{(a+\varepsilon)}$ e $a - \varepsilon = \overline{(a-\varepsilon)}$. Pondo-se $\alpha = \overline{(a_n)}$ e observando-se que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$, para todo $m > n_0$, teremos

$$\overline{(a-\varepsilon)} < \alpha < \overline{(a+\varepsilon)},$$

de onde vem,

$$\overline{(-\varepsilon)} < \alpha - \overline{(a)} < \overline{(\varepsilon)},$$

logo,

$$|\alpha - a_p| = |\alpha - a| = |\alpha - \overline{(a)}| < \overline{(\varepsilon)} = \varepsilon.$$

Em resumo, dado $\varepsilon \in P_0^*$ existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que $|\alpha - a_p| < \varepsilon$, para todo $p > n_0$; portanto, $lim\, a_n = \alpha$. ∎

TEOREMA 16 - O corpo ordenado $\boldsymbol{R}$ dos números reais é completo.

DEMONSTRAÇÃO - O lema 13 nos mostra que $\boldsymbol{R}$ é arquimediano; portanto, em virtude do teorema 11, parte b), precisamos demonstrar que $S_f(\boldsymbol{R}) = S_c(\boldsymbol{R})$. Seja (α_n) uma sucessão fundamental de números reais; de acôrdo com o teorema 6 existe, para cada $n \in \boldsymbol{N}$, uma sucessão crescente $(a_{i,n})_{i \in \boldsymbol{N}} \in S(\boldsymbol{Q})$ que é convergente para α_n, logo, para todo $\varepsilon \in P_0^*$ existe um menor número natural i tal que

$$|a_{i,n} - \alpha_n| < 3^{-1}\varepsilon$$

e para êste índice i colocaremos $b_n = a_{i,n}$. Obtemos, dêste modo, uma sucessão (b_n), de números racionais tal que

$$|b_n - \alpha_n| < 3^{-1}\varepsilon,$$

para todo $n \in \boldsymbol{N}$; mostraremos, inicialmente, que esta sucessão é fundamental. Com efeito, como (α_n) é fundamental, existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que

$$|\alpha_m - \alpha_n| < 3^{-1}\varepsilon,$$

quaisquer que sejam m e n, com $m > n_0$ e $n > n_0$. Portanto, se m e n são dois números naturais quaisquer, com $m > n_0$ e $n > n_0$, teremos

$$|b_m - b_n| \leqslant |b_m - \alpha_m| + |\alpha_m - \alpha_n| + |\alpha_n - b_n| < 3 \cdot 3^{-1}\varepsilon = \varepsilon,$$

ou seja, (b_n) é fundamental. Conforme o lema anterior, (b_n) é convergente para $\alpha = \overline{(b_n)}$, logo, existe $n_1 \in \boldsymbol{N}$ tal que

$$|b_n - \alpha| < 2 \cdot 3^{-1}\varepsilon,$$

para todo $n > n_1$. Por outro lado, tem-se

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant |\alpha_n - b_n| + |b_n - \alpha| < 3^{-1}\varepsilon + |b_n - \alpha|,$$

para todo $n \in \boldsymbol{N}$; portanto, qualquer que seja $n > n_1$, teremos

$$|\alpha_n - \alpha| < 3^{-1}\varepsilon + 2 \cdot 3^{-1}\varepsilon = \varepsilon,$$

isto é, (α_n) é convergente para α. ∎

Para demonstrar que o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais só pode ser ordenado de um único modo daremos, inicialmente, o seguinte

LEMA 15 - Para todo número real positivo a existe um único número real positivo b tal que $b^2 = a$.

DEMONSTRAÇÃO - O lema é imediato se $a = 0$, logo, podemos supor que $a \in P^*$. Se b e c são números reais positivos tais que $b^2 = a = c^2$, temos $(b-c)(b+c) = a$, de onde vem, $b = c$, pois, $b+c > 0$. Fica assim demonstrado que b é único, caso exista. Consideremos, então, o conjunto

$$S = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqslant x \text{ e } x^2 \leqslant a\};$$

é imediato que S é não vazio e majorado (por $a+1$), logo, de acôrdo com o teorema 16, existe $b = sup\,S$ e temos $0 < b$. Afirmamos que $b^2 = a$. Com efeito, se $b^2 \neq a$, teremos dois casos para examinar: a) $b^2 < a$ e b) $a < b^2$.

a) Verifica-se fàcilmente, que $b < \frac{2ab}{a+b^2} = b_1$, logo, $b_1 \in S$ e, por outro lado,

$$b_1^2 = \frac{4a^2b^2}{(a-b^2)^2 + 4ab} \leqslant a,$$

logo, $b_1 \in S$, o que é absurdo.

b) Temos $b_2 = \frac{a+b^2}{2b} < b$, logo, existe $x \in S$ tal que $b_2 < x \leqslant b$, de onde vem, $b_2^2 < x^2 \leqslant a$; por outro lado, temos

$$b_2^2 = \frac{(a-b)^2 + 4ab^2}{4b^2} \geqslant a$$

o que é absurdo. ∎

Se a é um número real positivo, então, o único número real positivo b tal que $b^2 = a$ é denominado raíz quadrada de a e será indicado pela notação $\sqrt{a}$. O lema acima nos mostra que todo número real positivo admite uma única raíz quadrada positiva (ver o exercício 43).

Dêste lema resulta, imediatamente, que o conjunto P dos elementos positivos, de $\boldsymbol{R}$, pela ordem $\leqslant$, coincide com o conjunto dos quadrados dos números reais; portanto, a ordem $\leqslant$ é determinada de modo único e temos assim o seguinte

TEOREMA 17 - O corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais só pode ser ordenado de um único modo.

A única ordem total, compatível com a estrutura de corpo definida sôbre $\boldsymbol{R}$, passa a ser denominada *ordem habitual* dos números reais. Notemos que se a e b são dois números reais quaisquer, então, temos $a < b$ se, e sòmente se, existe um número real c tal que $b - a = c^2$.

Terminaremos esta secção demonstrando o seguinte

TEOREMA 18 - O único automorfismo do corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais é o automorfismo idêntico.

DEMONSTRAÇÃO - Seja f um automorfismo de $\boldsymbol{R}$ e mostremos, inicialmente, que se a é um número real positivo, então $f(a)$ também é positivo. Isto é imediato, pois, conforme o lema 15, existe $b \in \boldsymbol{R}$ tal que $a = b^2$, de onde vem, $f(a) = (f(b))^2$ e então $0 < f(a)$. Consideremos agora o subconjunto

$$M = \{x \in \boldsymbol{R} \quad f(x) = x\};$$

é fácil verificar que M é um subcorpo de $\boldsymbol{R}$, logo, $\boldsymbol{Q} \subset M$. Afirmamos que $M = \boldsymbol{R}$, ou seja, que f é o automorfismo idêntico de $\boldsymbol{R}$. Com efeito, se $M \neq \boldsymbol{R}$ existe $a \in \boldsymbol{R}$ tal que $f(a) \neq a$ e suponhamos que $a < f(a)$ (se $f(a) < a$, a demonstração é completamente análoga a que desenvolveremos abaixo). De acôrdo com o teorema 45 do Capítulo IV, existe $r \in \boldsymbol{Q}$ tal que $a < r < f(a)$; mas de $a < r$ vem $0 < r - a$, logo, $0 < f(r-a) = f(r) - f(a)$, ou, $f(a) < f(r) = r$ o que está em contradição com $r < f(a)$. ∎

EXERCÍCIOS

38. Completar a demonstração do teorema 12.

39. Completar a demonstração do teorema 13.

40. Demonstrar o teorema 14.

41. Mostrar que os seguintes números reais $a\sqrt{2}$ $(a \in \boldsymbol{Q}^*)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $a+\sqrt{2}$ $(a \in \boldsymbol{Q})$ e $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ não são racionais.

42. Consideremos as sucessões reais (a_n) e (b_n), definidas por $a_0 = a$ e $b_0 = b$, onde a e b são dois números reais tais que $0 < a < b$, e

$$a_{n+1} = a_n b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),$$

para todo número natural n. Verificar que estas sucessões são convergentes para um número real a (que é denominado média aritmética-geométrica de a e b). Sugestão: mostrar que as sucessões acima satisfazem as condições dadas no exercício 28.

43. Seja a um número real positivo e seja n um número natural não nulo; demonstrar que existe um único número real positivo b tal que $b^n = a$. — Êste número b é denominado raíz n-ésima de a e será indicado por $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$. Sugestão: pode-se supor que $0 < a < 1$; considerar, então, o conjunto $S = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqslant x \text{ e } x^n \leqslant a\}$ e mostrar que $b = sub\,S$ satisfaz a condição $b^n = a$. Para verificar esta última afirmação toma-se $c \in \boldsymbol{R}$ tal que $|c| < 1$ e mostra-se que $|(b+c)^n - b^n| < d|b|$, onde $d = (b+1)^n - b^n$; se $b^n < a$ toma-se $c = d^{-1}(a - b^n)$ e se $a < b^n$ escolhe-se $c = d^{-1}(a - b^n)$ e em ambos os casos se obtém uma contradição.

44. Seja n um número natural ímpar e seja a um número real qualquer; demonstrar que existe um único número real b tal que $b^n = a$.

45. Seja a um número real estritamente positivo e seja r um número racional e notemos que r pode ser representado sob a forma $r = m/n$, onde m e n são inteiros e $n>0$. Coloca-se, por definição,

$$a^r = (a^{1/n})^m.$$

Mostrar que esta definição não depende da particular representação de r, isto é, se $m/n = p/q$, com m, n, p e q inteiros e $n>0$ e $q>0$, então $a^{m/n} = a^{p/q}$. Verificar as seguintes fórmulas: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$ e $(ab)^r = a^r b^r$, onde a e b são números reais estritamente positivos e r e s são números racionais quaisquer.

46. Seja a um número real positivo e sejam r e s dois números racionais tais que $0<r<s$. Mostrar que $a^r<a^s$ se $a<1$ e $a^r<a^s$ se $0<a<1$.

47. Seja r um número racional estritamente positivo e sejam a e b dois números reais tais que $0<a<b$; mostrar que $a^r<b^r$.

2.2 - CARACTERIZAÇÕES DO CORPO $\boldsymbol{R}$ DOS NÚMEROS REAIS

Seja K um corpo ordenado pela ordem $\leqslant$; indicaremos por e o elemento unidade de K e por K_0 seu corpo primo. Já sabemos que todo elemento de K_0 é da forma $(me)/(ne)$, com m e n inteiros e $n \neq 0$; pondo-se $a = m/n$, escreveremos $ae = (me)/(ne)$, portanto, todo elemento de K_0 é da forma ae, com $a \in \boldsymbol{Q}$. Além disso, a aplicação σ, de K_0 em $\boldsymbol{Q}$, definida por $f(a) = ae$, é um isomorfismo ordenado de K_0 em $\boldsymbol{Q}$. Se $(a_n e) \in S(K_0)$, com $(a_n) \in S(\boldsymbol{Q})$, colocaremos, por definição

$$\sigma((a_n e)) = (a_n);$$

é fácil verificar que σ é um isomorfismo de $S(K_0)$ em $S(\boldsymbol{Q})$ e que $\sigma(S_f(K_0)) = S_f(\boldsymbol{Q})$, ou seja, σ transforma tôda sucessão fundamental, de elementos de K_0, numa sucessão fundamental de elementos de $\boldsymbol{Q}$. Suponhamos agora que o corpo K seja arquimediano; de acôrdo com o teorema 6, todo elemento α, de K, é limite de uma sucessão $(a_n e) \in S(K_0)$, logo, esta sucessão é fundamental e então (a_n) também é fundamental. Conforme o lema 14 esta sucessão (a_n) é convergente em $\boldsymbol{R}$ e

$$\lim a_n = \overline{(a_n)};$$

consideremos, então, a aplicação g, de K em $\boldsymbol{R}$, que a todo $\alpha = \lim(a_n e) \in K$ faz corresponder o número real $g(\alpha) = \lim a_n = \overline{(a_n)}$. Pode-se verificar, fàcilmente, que a definição de $g(\alpha)$ não depende da particular sucessão $(a_n e)$ tal que $\lim(a_n e) = \alpha$. Se α e β são dois elementos quaisquer de K, tem-se $\alpha = \lim(a_n e)$ e $\beta = \lim(b_n e)$, com $(a_n) \in S_f(\boldsymbol{Q})$ e $(b_n) \in S_f(\boldsymbol{Q})$; logo,

$$\alpha+\beta = \lim((a_n+b_n)e) \quad \text{e} \quad \alpha\beta = \lim((a_n b_n)e),$$

de onde vem,

$$g(\alpha+\beta) = \lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n = g(\alpha)\cdot g(\beta)$$

e

$$g(\alpha\beta) = \lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = g(\alpha)\cdot g(\beta).$$

Portanto, g é um homomorfismo de K em $\boldsymbol{R}$ e como g não é a aplicação nula resulta que g é um monomorfismo de K em $\boldsymbol{R}$; além disso, é fácil ver que g é um monomorfismo ordenado. Demonstrámos, dêste modo, o seguinte

TEOREMA 19 - Todo corpo arquimediano é ordenadamente isomorfo a um subcorpo do corpo dos números reais.

Suponhamos agora que o corpo K seja completo, logo, conforme o corolário 1 do teorema 2, K é arquimediano; consideremos, então, o monomorfismo ordenado g, de K em $\boldsymbol{R}$, definido acima. Se $\alpha = (a_n)$ é um número real qualquer, onde $(a_n) \in S_f(\boldsymbol{Q})$, então $(a_n e) \in S_f(K_0)$ e como K é completo esta sucessão é convergente para $\alpha' \in K$ e é imediato que $g(\alpha) = \alpha'$. Fica assim demonstrado que g é uma aplicação sobrejetora de K em $\boldsymbol{R}$ e temos o seguinte

TEOREMA 20 - Todo corpo ordenado completo é ordenadamente isomorfo ao corpo dos números reais.

COROLÁRIO - Dois corpos ordenados completos são ordenadamente isomorfos.

Em virtude das caracterizações de um corpo ordenado completo, dadas pelo teorema 11, o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais pode ser definido, a menos de um isomorfismo ordenado, como um corpo ordenado K que satisfaz um dos seguintes axiomas:

a) K é completo;

b) K é arquimediano e tôda sucessão fundamental, de elementos de K, é convergente;

c) tôda sucessão crescente e majorada, de elementos de K, é convergente;

d) K é arquimediano e K satisfaz o axioma dos intervalos encaixantes.

EXERCÍCIOS

Nota: Nos exercícios abaixo utilizaremos as notações introduzidas na secção 2.2.

48. Verificar que σ é um isomorfismo do anel $S(K_0)$ no anel $S(\mathbf{Q})$ e que $\sigma(S_f(K)) = S_f(\mathbf{Q})$.

49. Mostrar que a definição de $g(\alpha)$ não depende da particular sucessão $(a_n e) \in S(K_0)$ tal que $lim(a_n e) = \alpha$.

50. Mostrar que $\alpha \leqslant \beta$ (α e β em K) se, e sòmente se, $g(\alpha) \leqslant g(\beta)$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

51. Aplicar o processo de Cantor, desenvolvido na secção 2.1, a um corpo ordenado arquimediano K e mostrar que se obtém um corpo ordenado completo (portanto, isomorfo ao corpo dos números reais).

52. Mostrar que se a é um elemento estritamente positivo de um grupo ordenado arquimediano G, então existe um único monomorfismo ordenado f_a, de G em $(\mathbf{R}, +, \leqslant)$, tal que $f_a(a) = 1$. Sugestão: Para cada $x \in G$ considera-se o subconjunto $S_x = \{\frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \mid m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}^*$ e $ma \leqslant nx\}$; mostra-se que $S_x \neq \emptyset$, que S_x é majorado e coloca-se, por definição: $f_a(x) = sup S_x \in \mathbf{R}$. Para mostrar que f_a é único utiliza-se o corolário 2 do teorema 1.

53. Seja K um corpo ordenado e seja a um elemento não nulo de K; mostrar que a aplicação $\sigma_a : K \to K$, definida por $\sigma_a(x) = ax$, é um automorfismo (ordenado se $a > 0$) do grupo ordenado $(K, +, \leqslant)$. Mostrar que $(\sigma_a)^{-1} = \sigma_{a^{-1}}$.

54. Demonstrar que para todo corpo arquimediano K existe um único monomorfismo ordenado de K em $\mathbf{R}$. Sugestão: Em virtude do exercício 52 existe um único monomorfismo ordenado f, de $(K, +, \leqslant)$ em $(\mathbf{R}, +, \leqslant)$, tal que $f(1) = 1$; mostrar que $f = (\sigma_{f(a)})^{-1} \circ f \circ \sigma_a$ (ver o exercício anterior) para todo $a \in K$, $a > 0$ e concluir daí que $f(ax) = f(a)f(x)$ quaisquer que sejam a e x em K. Observação: Êste resultado nos mostra que os únicos corpos ordenados arquimedianos são, a menos de um isomorfismo ordenado, os subcorpos do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais e obtém-se assim uma outra demonstração do teorema 19.

55. Seja $(G, +, \leqslant)$ um grupo ordenado completo e suponhamos que o conjunto dos elementos estritamente positivos de G não admita mínimo; demonstrar que para todo $a \in G$, $a > 0$, o monomorfismo f_a, definido no exercício 52, é um isomorfismo ordenado. Sugestão: Mostrar que o ínfimo em $\mathbf{R}$ da imagem de f_a é igual a zero e que $Im(f_a)$ é totalmente denso em $\mathbf{R}$; concluir daí que f_a é sobrejetora. Observação: Os exercícios 37 e 55 nos mostram que os únicos grupos ordenados completos são, a menos de um isomorfismo ordenado, os grupos ordenados $(\mathbf{Z}, +, \leqslant)$ e $(\mathbf{R}, +, \leqslant)$.

56. A partir do exercício anterior dar uma outra demonstração do teorema 20.

57. Consideremos o grupo multiplicativo $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$, onde $\mathbf{R}_+^*$ é o conjunto de todos os números reais estritamente positivos; é imediato que a ordem habitual dos números reais induz uma ordem sôbre $\mathbf{R}_+^*$ que é compatível com a multiplicação, portanto, $(\mathbf{R}_+^*, \cdot, \leqslant)$ é um grupo comutativo totalmente ordenado. Notemos que $x \in \mathbf{R}_+^*$ é «positivo» (resp., «estritamente positivo») em $(\mathbf{R}_+^*, \cdot, \leqslant)$ se $x > 1$ (resp., $x < 1$).

a) Mostrar que $(\mathbf{R}_+^*, \cdot, \leqslant)$ é um grupo ordenado completo cujo conjunto dos elementos «estritamente positivos» não admite mínimo.

b) Utilizando o exercício 55, concluir que para todo $a > 1$, existe um único isomorfismo ordenado f_a, de $(\mathbf{R}_+^*, \cdot, \leqslant)$ em $(\mathbf{R}, +, \leqslant)$, tal que $f_a(a) = 1$. Observação: A aplicação f_a é denominada *função logarítmica de base* $a > 1$ e é indicada por log_a; se $0 < a < 1$, define-se log_a por $log_a x = log_{1/a} \frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbf{R}_+^*$.

58. Com as notações do exercício anterior, se $a > 0$ e $a \neq 1$, mostrar que

$$log_a(xy) = log_a x + log_a y$$

e

$$log_a(x^n) = n \log_a x \quad (n \in \mathbf{Z}),$$

quaisquer que sejam x e y em $\mathbf{R}_+^*$.

59. Com as notações do exercício 57, a aplicação inversa de log_a é chamada *função exponencial de base* a e é indicada por exp_a; portanto, $log_a \circ exp_a = I_{\mathbf{R}}$ (aplicação idêntica de $\mathbf{R}$) e $exp_a \circ log_a = I_{\mathbf{R}_+^*}$ (aplicacão idêntica de $\mathbf{R}_+^*$). a) Mostrar que $exp_a(x+y) = exp_a(x) + exp_a(y)$ e $exp_a(nx) = (exp_a x)^n$ $(n \in \mathbf{Z})$, quaisquer que sejam x e y em $\mathbf{R}$. b) Notando-se que $exp_a 1 = a$, tem-se $exp_a n = a^n$ para todo $n \in \mathbf{Z}$; portanto, é natural indicar $exp_a x$ por a^x e, além disso, coloca-se, por definição, $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbf{R}$. c) Mostrar que valem as seguintes fórmulas $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$ e $(ab)^x = a^x b^x$, quaisquer que sejam os números reais x e y, onde a e b são elementos de $\mathbf{R}_+^*$. Sugestão para a parte c): mostrar, inicialmente, que $log_a x^y = y \log_a x$ $(a \in \mathbf{R}_+^*,\ a \neq 1)$.

60. Concluir do exercício anterior que para todo $a \in \mathbf{R}_+$ existe um único $b \in \mathbf{R}_+$ tal que $b^n = a$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ — Comparar com o exercício 43.

61. Demonstrar que se K e M são subcorpos de $\mathbf{R}$ e se K e M são ordenadamente isomorfos, então $K = M$.

62. A noção de valor absoluto pode ser generalizada do seguinte modo: chama-se *valor absoluto*, definido sôbre um corpo K, a tôda aplicação $\varphi : K \to \mathbf{R}$, que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi(a) = 0$ se, e sòmente se, $a = 0$;

b) $\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$, quaisquer que sejam a e b em K;

c) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, quaisquer que sejam a e b em K.

Mostrar que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(-a) = \varphi(a)$ e $\varphi(a) \geqslant 0$, para todo a em K.

A aplicação $\varphi : K \to \mathbf{R}$, definida por $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(a) = 1$ para todo $a \in K^*$, é um valor absoluto sôbre K, que é denominado valor absoluto trivial de K. Mostrar que todo valor absoluto de um corpo primo, de característica não nula, é trivial.

63. Seja p um número natural primo; todo número racional não nulo x pode ser representado, de modo único, sob a forma $x = p^s \frac{a}{b}$, onde a, b e s são números inteiros, a e b não nulos e $mdc(a,b) = 1$. Coloca-se, por definição, $\varphi_p(x) = p^{-s}$ e $\varphi_p(0) = 0$. Mostrar que esta aplicação φ_p é um valor absoluto sôbre $\boldsymbol{Q}$ (denominado *valor absoluto p-ádico*) e que a condição b) vem sob a forma

b') $\varphi_p(a+b) \leq max(\varphi_p(a), \varphi_p(b))$, quaisquer que sejam a e b em $\boldsymbol{Q}$.

64. Seja φ um valor absoluto não trivial sôbre um corpo K e consideremos o anel $S(K)$ de tôdas as sucessões de elementos de K. Diz-se que uma sucessão $(a_n) \in S(K)$ é φ-limitada (ou, simplesmente, limitada quando o valor absoluto φ está fixado) se, e sòmente se, existe $M \in \boldsymbol{R}$, $0 < M$, tal que $\varphi(a_n) \leq M$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$. Mostrar que o conjunto $S_l(K)$ de tôdas as sucessões φ-limitadas é um sub-anel unitário de $S(K)$. Dar as definições de sucessão φ-convergente, φ-fundamental e φ-convergente a zero; indicando-se por $S_c(K)$, $S_f(K)$ e $S_0(K)$ os conjuntos das sucessões φ-convergentes, φ-fundamentais e φ-convergentes a zero, mostrar que

$$S_0(K) \subset S_c(K) \subset S_f(K) \subset S_l(K) \subset S(K),$$

sendo que $S_c(K)$ e $S_f(K)$ são sub-anéis unitários de $S_l(K)$. Mostrar que $S_0(K)$ é um sub-anel de $S_l(K)$ que satisfaz a condição: se $(a_n) \in S_l(K)$ e se $(b_n) \in S_0(K)$, então $(a_n b_n) \in S_0(K)$.

65. Usaremos as notações do exercício anterior. Se (a_n) e (b_n) são dois elementos quaisquer de $S_f(K)$ colocaremos, por definição, $(a_n) \sim (b_n)$ se, e sòmente se, $(a_n - b_n) \in S_0(K)$. Mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência sôbre $S_f(K)$ compatível com a adição e com a multiplicação. Definir as operações de adição e de multiplicação sôbre o conjunto quociente $\overline{K} = S_f(K)/\sim$ (de modo análogo ao que fizemos no §1.1) e mostrar que $\overline{K}$ é um corpo em relação a estas operações. Demonstrar que K é isomorfo a um subcorpo de K e que o valor absoluto φ pode ser prolongado a um valor absoluto $\overline{\varphi}$ de $\overline{K}$. Finalmente, demonstrar que $\overline{K}$ é «completo» em relação ao valor absoluto $\overline{\varphi}$, isto é, que $S_c(\overline{K}) = S_f(\overline{K})$. Aplicando-se o processo acima para $K = \boldsymbol{Q}$ e $\varphi = \varphi_p$ (ver o exercício 63), obtém-se um corpo completo $\boldsymbol{Q}_p$ que é denominado *corpo dos números p-ádicos de Hensel.*

§3 - CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Vimos, no parágrafo anterior, que um número real a admite uma raiz quadrada em $\boldsymbol{R}$ se, e sòmente se, a é positivo (lema 15); em particular, não existe $i \in \boldsymbol{R}$ tal que $i^2 = -1$. Procuramos, então, ampliar o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais com a introdução de novos elementos de modo que a equação $x^2 = -1$ tenha solução.

Para ver de que modo esta ampliação deve ser feita, suponhamos que exista um corpo K que contenha $\boldsymbol{R}$ como subcorpo e que exista $i \in K$ tal que $i^2 = -1$; neste caso, temos necessàriamente $K \neq \boldsymbol{R}$, pois, o elemento i não pode pertencer a $\boldsymbol{R}$. Consideremos, então, o sub-anel $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}[i]$, de K, gerado pelo conjunto $\boldsymbol{R} \cup \{i\}$ (ver a parte final do §1.6 do Capítulo IV); é imediato que o conjunto M de todos os elementos $a+bi \in K$, com a e b reais, está contido em $\boldsymbol{C}$. Por outro lado, $\boldsymbol{R} \cup \{i\} \subset M$ e se $a+bi$ e $c+di$ são dois elementos quaisquer de M, tem-se

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$-(a+bi) = (-a)+(-b)i$$

e

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i;$$

portanto, M é um sub-anel de K e então $M = \boldsymbol{R}[i] = \boldsymbol{C}$. Em resumo, todo elemento de $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}[i]$ é da forma $a+bi$, com a e b reais; temos $a+bi = a'+b'i$ se, e sòmente se, $a = a'$ e $b = b'$ e, além disso, se $a+bi$ e $c+di$ são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{C}$, então

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i \tag{7}$$

e

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{8}$$

Notemos ainda que o anel $\boldsymbol{C}$ é um corpo, pois, se $a+bi \neq 0$, então $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \neq 0$ e daqui resulta

$$(a+bi)[(a^2+b^2)^{-1}(a-bi)] = 1,$$

isto é, $a+bi$ é inversível e

$$(a+bi)^{-1} = (a^2+b^2)^{-1}(a-bi).$$

O que fizemos acima sugere a definição de número complexo como um par ordenado (a,b) de números reais sendo que a soma e o produto de dois dêstes pares devem ser definidos por fórmulas análogas às (7) e (8). Introduziremos, dêste modo, no §3.1, o corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos.

3.1 - CONSTRUÇÃO DO CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Consideremos o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais e seja $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ o produto cartesiano do conjunto $\boldsymbol{R}$ por si mesmo; se (a,b) e (c,d) são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{C}$ colocaremos, por definição,

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

e

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Ficam assim definidas operações de adição e de multiplicação sôbre o conjunto $\boldsymbol{C}$ e temos o seguinte

TEOREMA 21 - As operações de adição e de multiplicação

$$((a,b),(c,b)) \overset{+}{\mapsto} (a+c, b+d) \quad \text{e} \quad ((a,b),(c,d)) \overset{\cdot}{\mapsto} (ac-bd, ad+bc),$$

definem uma estrutura de corpo comutativo sôbre o conjunto $\boldsymbol{C}$.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar os axiomas A1-A4, M1-M4 e D da definição de corpo comutativo; só faremos a verificação dos axiomas A3, A4, M1 e M4 e deixaremos os outros a cargo do leitor.

A3. Temos $(a,b)+(0,0)=(a,b)$ para todo $(a,b)\in\boldsymbol{C}$; portanto, o par ordenado $0'=(0,0)$ é o elemento zero da operação de adição definida sôbre $\boldsymbol{C}$.

A4. Se (a,b) é um elemento qualquer de $\boldsymbol{C}$, temos

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)=0',$$

logo, $-(a,b)=(-a,-b)$.

M1. Se (a,b), (c,d) e (e,f) são elementos quaisquer de $\boldsymbol{C}$, temos

$$\begin{aligned}[(a,b)(c,d)](e,f)&=(ac-bd,ad+bc)(e,f)=\\&=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)=\\&=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))=\\&=(a,b)(ce-df,cf+de)=(a,b)[(c,d)(e,f)].\end{aligned}$$

M3. Temos

$$(a,b)(1,0)=(a\cdot1-b\cdot0,a\cdot0+b\cdot1)=(a,b),$$

para todo $(a,b)\in\boldsymbol{C}$, logo, $1'=(1,0)$ é o elemento unidade para a operação de multiplicação definida sôbre $\boldsymbol{C}$.

M4. Observemos, inicialmente, que todo elemento $(a,0)\in\boldsymbol{C}$. com $a\neq0$ é inversível, pois,

$$(a,0)(a^{-1},0)=(1,0)=1'$$

e temos

$$(a,0)^{-1}=(a^{-1},0).$$

Se $z=(a,b)\neq0'$ e se $\overline{z}=(a,-b)$, temos

$$z\overline{z}=(a^2+b^2,0),$$

com $a^2+b^2\neq0$, logo, $z\overline{z}$ é inversível, pondo-se $w=\overline{z}(z\overline{z})^{-1}\in\boldsymbol{C}$ teremos

$$zw=z[\overline{z}(z\overline{z})^{-1}]=(z\overline{z})(z\overline{z})^{-1}=1';$$

portanto, z é inversível e $z^{-1}=\overline{z}(z\overline{z})^{-1}$. ∎

Todo elemento do corpo $\boldsymbol{C}$ passa a ser denominado *número complexo* e diremos que $(\boldsymbol{C},+,\cdot)$ é o *corpo dos números complexos.*

Consideremos agora o subconjunto

$$R'=\{(a,b)\in\boldsymbol{C}\mid b=0\}.$$

Notemos que $0'\in R'$ e $1'\in R'$; além disso, se $(a,0)$ e $(b,0)$ são dois elementos quaisquer de R', tem-se

$$\begin{aligned}(a,0)+(b,0)&=(a+b,0),\\-(a,0)&=(-a,0),\\(a,0)(b,0)&=(ab,0)\end{aligned}$$

e se $(a,0)\neq0'$, teremos

$$(a,0)(a^{-1},0)=(1,0)=1',$$

portanto, R' é um subcorpo de $\boldsymbol{C}$. É imediato que a aplicação f, de $\boldsymbol{R}$ em R', definida por $f(a)=(a,0)$, é bijetora; por outro lado, se a e b são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{R}$ temos

$$f(a+b)=(a+b,0)=(a,0)+(b,0)=f(a)+f(b)$$

e

$$f(ab)=(ab,0)=(a,0)+(b,0)=f(a)f(b);$$

portanto, f é um isomorfismo de $\boldsymbol{R}$ em R'. No que se segue identificaremos o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais com o corpo R' por meio do isomorfismo f, isto é, poremos $a=(a,0)$ para todo $a\in\boldsymbol{R}$. Uma vez feita esta identificação, temos $0'=(0,0)=0$ e $1'=(1,0)=1$; além disso, o corpo $\boldsymbol{R}$ dos números reais passa a ser considerado como um subcorpo do corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos.

Indiquemos por i o número complexo $(0,1)$; notando-se que

$$(b,0)(1,0)=(0,b),$$

teremos, para todo, $(x,y)\in\boldsymbol{C}$:

$$z=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)(0,1)=x+yi.$$

Portanto, todo número complexo z pode ser representado sob a forma $z=x+yi$, com x e y reais e $i=(0,1)$; o número i é denominado *unidade imaginária.* Notemos ainda que $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

De agora em diante representaremos todo número complexo z sob a forma $z=x+yi$, com x e y reais, que é denominada *forma algébrica* de z; x é chamado *parte real* de z e y *coeficiente do imaginário* de z e também usaremos as notações $x=\mathcal{R}(z)$ e $y=\mathcal{I}(z)$, logo,

$$z=\mathcal{R}(z)+\mathcal{I}(z)i.$$

Em geral, quando considerarmos um número complexo $z=x+yi$ estará que x e y são reais.

Temos as seguintes fórmulas para operar com os números complexos sob a forma algébrica:

$$x+yi=x'+y'i \text{ se, e sòmente se, } x=x' \text{ e } y=y' \qquad (9);$$

$$(x+yi)+(u+vi)=(x+u)+(y+v)i \qquad (10);$$

$$-(x+yi)=(-x)+(-y)i \qquad (11);$$

$$(x+yi)(u+vi)=(xu-yv)+(xv+yu)i \qquad (12);$$

$$i^2=-1 \qquad (13);$$

$$\text{se } x+yi\neq0, \text{ então } (x+yi)^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2}(x-yi) \qquad (14).$$

Todo número complexo da forma bi, com b real, é denominado *número complexo puro.* Temos $(bi)^2=b^2i^2=-b^2$, portanto, para todo número real estritamente negativo c existe um número complexo z tal que $z^2=c$, logo, no corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos pode-se definir a raíz quadrada de qualquer número real.

EXERCÍCIOS

66. Completar a demonstração do teorema 21.

67. Representar sob a forma $a+bi$ os seguintes números complexos:
a) $(1+2i)+(2-3i)+(4+5i)-(2-3i)$;
b) $(2-i)(2+i)-(3-i)(3+i)$;
c) $(2-i)^3+(2+i)^3$;
d) $(1-i)^{-2}(2+i)+(1+i)^2(2-i)^{-1}$;
e) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

68. Determinar dois números reais x e y tais que
$$(1-2i)x+(3+5i)y = 1+3i.$$

69. Seja a um número real estritamente negativo; demonstrar que $ia^{1/2}$ e $-ia^{1/2}$ são os únicos números complexos x tais que $x^2 = -a$.

70. Calcular
a) $1+i^n+i^{2n}+i^{3n}$
e
b) $\dfrac{i^n-i^{-n}}{2i}$,
onde n é um número inteiro.

71. Sendo $w = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, calcular w^2, w^3, w^{253} e w^{-20}. Calcular:
a) $1+w^n+w^{2n}$, onde n é um número natural;
b) $(1+w^2)^4$;
c) $(1-w+w^2)(1+w-w^2)$;
d) $(1-w)(1-w^2)(1-w^4)(1-w^5)$.

72. Calcular $i^0+i+i^2+\cdots+i^n$, para todo número natural $n \geq 1$.

73. Se z e w são dois números complexos quaisquer, mostrar que
e
$$\mathcal{R}(z \pm w) = \mathcal{R}(z) \pm \mathcal{R}(w)$$
$$\mathcal{I}(z \pm w) = \mathcal{I}(z) \pm \mathcal{I}(w).$$

3.2 - NÚMEROS COMPLEXOS CONJUGADOS; NORMA E MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

DEFINIÇÃO 11 - Chama-se *conjugado* de um número complexo $z = x+yi$ ao número complexo $\overline{z} = x-yi$.

É imediato que o complexo conjugado de $\overline{z}$ é z; por causa disso, diremos que z e $\overline{z}$ são números complexos conjugados. Temos o seguinte teorema que nos dá as propriedades mais importantes dos conjugados de números complexos:

TEOREMA 22 - Se z e w são dois números complexos quaisquer, temos:
a) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$;
b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
c) $\overline{\overline{z}} = z$;
d) $z+\overline{z} = 2\mathcal{R}(z)$ e $z-\overline{z} = 2\mathcal{I}(z)i$;
e) $\overline{z} = z$ se, e sòmente se, z é real.

Deixaremos as verificações destas propriedades a cargo do leitor.

Consideremos a aplicação σ, de $\boldsymbol{C}$ em $\boldsymbol{C}$, definida por $\sigma(z) = \overline{z}$, para todo $z \in \boldsymbol{C}$. É imediato que σ é bijetora e as partes a) e b) do teorema acima nos mostram que σ é um endomorfismo de $\boldsymbol{C}$, logo, σ é um automorfismo de $\boldsymbol{C}$. Além disso, de acôrdo com e), tem-se $\sigma(z) = z$ se, e sòmente se, z é real; por causa disso diremos que σ é um $\boldsymbol{R}$-automorfismo do corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos. Notemos ainda que a propriedade c) nos mostra que $\sigma \circ \sigma = I_{\boldsymbol{C}}$, onde $I_{\boldsymbol{C}}$ indica o automorfismo idêntico de $\boldsymbol{C}$; diz-se, neste caso, que σ é um automorfismo *involutório* de $\boldsymbol{C}$. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 23 - A aplicação $\sigma: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, definida por $\sigma(z) = \overline{z}$, é um $\boldsymbol{R}$-automorfismo involutório do corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos.

COROLÁRIO - Se z e w são dois números complexos quaisquer, tem-se $\overline{-z} = -\overline{z}$ e $\overline{z-w} = \overline{z}-\overline{w}$ e se $w \neq 0$, temos $\overline{w^{-1}} = (\overline{w})^{-1}$ e $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.

É uma conseqüência imediata do fato que σ é um automorfismo de $\boldsymbol{C}$ (ver o §1.6, Capítulo IV).

TEOREMA 24 - Os únicos $\boldsymbol{R}$-automorfismos do corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos são o automorfismo idêntico $I_{\boldsymbol{C}}$ e o automorfismo σ definido acima.

DEMONSTRAÇÃO - Seja g um $\boldsymbol{R}$-automorfismo de $\boldsymbol{C}$ e suponhamos que $g \neq I_{\boldsymbol{C}}$, logo, $g(i) = a+bi \neq i$. De $i^2 = -1$, vem
$$-1 = g(-1) = g(i^2) = (g(i))^2 = (a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi,$$
logo, $a^2-b^2 = -1$ e $ab = 0$, de onde vem, $b \neq 0$ e $a = 0$; portanto, $b^2 = 1$, ou, $b = \pm 1$ e como $g \neq I_{\boldsymbol{C}}$, tem-se $b \neq 1$, logo, $b = -1$, isto é, $g(i) = -i$ e daqui resulta que $g = \sigma$. ∎

DEFINIÇÃO 12 - Chama-se *norma* de um número complexo z ao número real $z\overline{z}$.

Notemos que de fato $z\overline{z}$ é real, pois $z\overline{z} = x^2+y^2$ se $z = x+yi$. A norma de um número complexo z será indicada por $N(z)$.

TEOREMA 25 - Se z e w são dois números complexos quaisquer, temos
a) $0 \leq N(z)$;
b) $N(z) = 0$ se, e sòmente se, $z = 0$;
c) $N(zw) = N(z)N(w)$.

DEMONSTRAÇÃO - As partes a) e b) são imediatas, pois $N(z)=x^2+y^2$ se $z=x+yi$. Temos

$$N(zw)=(zw)(\overline{zw})=(zw)(\overline{z}\,\overline{w})=(z\overline{z})(w\overline{w})=N(z)N(w).$$ ∎

DEFINIÇÃO 13 - Chama-se *valor absoluto* ou *módulo* de um número complexo $z=x+yi$ ao número real positivo

$$|z|=\sqrt{N(z)}.$$

Portanto, se $z=x+yi$, temos

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Observemos que se z é real, então o valor absoluto de z segundo a definição 13 coincide com o valor absoluto de z como elemento de $\boldsymbol{R}$, pois $\sqrt{x^2}=|x|$ para todo x real.

TEOREMA 26 - Se z e w são dois números complexos quaisquer, temos:

a) $0\leq|z|$;
b) $|z|=0$ se, e sòmente se, $z=0$;
c) $|z|=|\overline{z}|$;
d) $|zw|=|z|\,|w|$;
e) $\mathcal{R}(z)\leq|\mathcal{R}(z)|\leq|z|$ e $\mathcal{I}(z)\leq|\mathcal{I}(z)|\leq|z|$;
f) $|z+w|\leq|z|+|w|$.

DEMONSTRAÇÃO - As partes a), b), c) e e) são imediatas.

d) Temos

$$|zw|^2=N(zw)=N(z)N(w)=|z|^2|w|^2,$$

de onde vem $|zw|=|z|\,|w|$.

f) Temos

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\overline{z+w})=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}=\\&=|z|^2+(z\overline{w}+z\overline{w})+|w|^2=|z|^2+2\mathcal{R}(z\overline{w})+|w|^2\leq\\&\leq|z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2=|z|^2+2|z|\,|\overline{w}|+|w|^2=\\&=|z|^2+2|z|\,|w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2;\end{aligned}$$

portanto, $|z+w|\leq|z|+|w|$. ∎

Mostraremos, a seguir, que para todo número complexo w existe $z\in\boldsymbol{C}$ tal que

$$z^2=w \qquad (15).$$

Se $w=0$ temos, necessàriamente, $z=0$; portanto, suporemos que $w\neq0$ e que exista $z\in\boldsymbol{C}$ tal que $z^2=w$. De (15) resulta

$$|w|+w=|z|^2+z^2=z\overline{z}+z^2=z(z+\overline{z})=2z\mathcal{R}(z) \qquad (16)$$

e, por outro lado,

$$|2\mathcal{R}(z)|^2=(z+\overline{z})^2=z^2+2z\overline{z}+z^2=w+2|w|+\overline{w}=2[|w|+\mathcal{R}(w)].$$

Como $|w|+\mathcal{R}(w)$ é um número real não negativo, teremos

$$2\mathcal{R}(z)=\pm\sqrt{2(|w|+\mathcal{R}(w))} \qquad (17).$$

Podemos agora distinguir dois casos: a) $|w|+\mathcal{R}(w)\neq0$ e b) $|w|+\mathcal{R}(w)=0$.

a) De (16) resulta que $\mathcal{R}(z)\neq0$ e então

$$z=\frac{|w|+w}{2\mathcal{R}(z)},$$

de onde vem, por (17),

$$z=\pm\frac{|w|+w}{\sqrt{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}} \qquad (18);$$

portanto, existem dois valores de z que satisfazem a equação (15).

b) De (16) resulta que $\mathcal{R}(z)=0$, logo, $z=\mathcal{I}(z)i$, de onde vem, notando-se que $w=-|w|$:

$$-|w|=z^2=(\mathcal{I}(z)i)^2=-(\mathcal{I}(z))^2;$$

portanto, $\mathcal{I}(z)=\pm\sqrt{|w|}$ e então

$$z=\pm i\sqrt{|w|} \qquad (19).$$

Fica assim demonstrado que se existe um número complexo z satisfazendo a equação (15), então z é da forma (18) se $|w|+\mathcal{R}(w)\neq0$ e é da forma (19) se $|w|+\mathcal{R}(w)=0$. Falta demonstrar que os números com (18) (se $|w|+\mathcal{R}(w)\neq0$) e (19) (se $|w|+\mathcal{R}(w)=0$) satisfazem a equação (15). Ora, temos

$$\left[\pm\frac{|w|+w}{\sqrt{2[|w|+\mathcal{I}(w)]}}\right]^2=\frac{|w|^2+2|w|w+w^2}{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}=\frac{w\overline{w}+2|w|w+w^2}{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}=$$

$$=\frac{w(2|w|+(w+\overline{w}))}{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}=\frac{w(2|w|+2\mathcal{R}(w))}{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}=w$$

e

$$(\pm i\sqrt{|w|})^2=-|w|=w.$$

Demonstramos acima o seguinte

TEOREMA 27 - Para todo número complexo não nulo w existem exatamente dois números complexos z tais que $z^2=w$. Se $|w|+\mathcal{R}(w)\neq0$, as soluções de (15) são

$$\frac{|w|+w}{\sqrt{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}} \quad\text{e}\quad -\frac{|w|+w}{\sqrt{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}}.$$

Se $|w|+\mathcal{R}(w)=0$, as soluções de (15) são

$$i\sqrt{|w|} \quad\text{e}\quad -i\sqrt{|w|}.$$

Para todo número complexo $w\neq0$ definiremos o símbolo $\sqrt{w}$ (raiz quadrada de w) do seguinte modo

$$\sqrt{w}=\begin{cases}\dfrac{|w|+w}{\sqrt{2[|w|+\mathcal{R}(w)]}} & \text{se } |w|+\mathcal{R}(w)\neq0\\[2ex] i\sqrt{|w|} & \text{se } |w|+\mathcal{R}(w)=0\end{cases}$$

e completamos esta definição, pondo-se $\sqrt{0}=0$. Neste caso, o teorema 27 pode ser enunciado sob a forma: se w é um número complexo qualquer, então $\sqrt{w}$ e $-\sqrt{w}$ são as únicas soluções da equação (15).

EXERCÍCIOS

74. Determinar os módulos dos seguintes números complexos:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$;

b) $(3+2i)^2+(3-2i)^2$;

c) $\frac{(3-2i)^3}{(3+2i)^5}$.

75. Determinar um número complexo z que satisfaz cada uma das seguintes condições:

a) $(2+i\sqrt{3})z = 2-i$;

b) $2iz^2 = 3+i$;

c) $z = z^{-1}$;

d) $z^2+z+1 = 0$.

76. Determinar as raizes quadradas dos seguintes números complexos:

a) $3+4i$;

b) $7+24i$;

c) $-16i$.

77. Demonstrar que

$$|z+w|^2+|z-w|^2 = 2|z|^2+2|w|^2,$$

quaisquer que sejam os números complexos z e w.

78. Dar uma outra demonstração da parte f) do teorema 26, notando-se que se $z+w \neq 0$, então $z/(z+w)+w/(z+w) = 1$. Sugestão: utilizar o exercício 73 e a parte e) do teorema 26.

79. Verificar as seguintes propriedades da raiz quadrada do número complexo w^2:

a) $\sqrt{w^2} = w$ se $\mathcal{R}(w) > 0$;

b) $\sqrt{w^2} = -w$ se $\mathcal{R}(w) < 0$;

c) $\sqrt{w^2} = w$ se $\mathcal{R}(w) = 0$ e $\mathcal{I}(w) > 0$;

d) $\sqrt{w^2} = -w$ se $\mathcal{R}(w) = 0$ e $\mathcal{I}(w) < 0$.

80. Se z e w são dois números complexos quaisquer, mostrar que $\sqrt{zw} = \pm(\sqrt{z}\sqrt{w})$.

81. Demonstrar que se $\mathcal{R}(z) > 0$ e $\mathcal{R}(w) > 0$, então $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$.

82. Demonstrar que se a, b e c são números complexos, com $a \neq 0$, então os únicos números complexos z tais que $az^2+bz+c = 0$ são determinados por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

83. Aplicar a fórmula acima para resolver as equações:

a) $3(2-i)z^2-3(11-3i)z+25 = 0$;

b) $(1+i)z^2+(1+2i)z-2 = 0$;

c) $z^2-3z+5 = 0$.

84. Demonstrar que se $w = a+bi$, com a e b reais e $b \neq 0$, então

$$iw = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right].$$

EXERCÍCIOS SÔBRE O §3

85. Demonstrar que a aplicação $\varphi: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, definida por $\varphi(z) = |z|$, é um valor absoluto segundo a definição dada no exercício 62; φ passa a ser denominado valor absoluto ordinário do corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos.

86. Demonstrar que o corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos é completo em relação ao valor absoluto ordinário, isto é, que $S_c(\mathbf{C}) = S_f(\mathbf{C})$ (ver o exercício 65). Sugestão: Verificar, inicialmente, que $(x_n+iy_n) \in S_f(\mathbf{C})$ se, e sòmente se, $(x_n) \in S_f(\mathbf{R})$ e $(y_n) \in S_f(\mathbf{R})$.

Nos exercícios abaixo suporemos conhecidas as funções trigonométricas reais.

87. Seja $z = x+yi$ um número complexo não nulo e ponhamos $r = |z|$; observando-se que $(x/r)^2+(y/r)^2 = 1$, $|x/r| \leq 1$ e $|y/r| \leq 1$, resulta que existe um número real θ tal que $x/r = \cos\theta$ e $y/r = \operatorname{sen}\theta$, logo, $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ (que é a forma trigonométrica do número complexo z), onde θ passa a ser denominado argumento de z. Mostrar que $r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = r'(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta')$, onde r, θ, r' e θ' são reais e $r > 0$, $r' > 0$ se, e sòmente se, $r = r'$ e $\theta \equiv \theta'$ (mod. 2π) (isto é, $\theta = \theta'+2k\pi$, onde k é um número inteiro).

88. Determinar as formas trigonométricas dos seguintes números complexos.

a) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$;

b) -1;

c) $1+i$;

d) $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.

89. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos não nulos e suponhamos que z_1 e z_2 estejam representados sob a forma trigonométrica: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$. Mostrar que

a) $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]$;

b) $z_2^{-1} = r_2^{-1}[\cos(-\theta_2)+i\operatorname{sen}(-\theta_2)]$;

c) $z_1/z_2 = (r_1/r_2)[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)]$.

90. Mostrar que $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$, para todo número inteiro n (fórmula de De Moivre).

91. Mostrar que

$$(1+i)(1+i\sqrt{3})(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = 2\sqrt{2}\,[\cos(\tfrac{7\pi}{12}+\theta) + i\operatorname{sen}(\tfrac{7\pi}{12}+\theta)].$$

92. Calcular

a) $(1+i)^{25}$;

b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$;

c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$.

93. Mostrar que

$$(1+i)^n = 2^{n/2}(\cos\frac{n.\pi}{4}+i\,sen\frac{n.\pi}{4})$$

e

$$(\sqrt{3}-i)^n = 2^n(\cos\frac{n.\pi}{6}-i\,sen\frac{n.\pi}{6}).$$

94. Seja $a = r(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$ um número complexo não nulo e seja n um número natural não nulo; mostrar que

$$z_k = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+2k.\pi}{n}+i\,sen\frac{\theta+2k.\pi}{n}],$$

para $k = 0,1,2,\cdots,n\text{-}1$, são os únicos números complexos tais que $z_k^n = a$. (Portanto, todo número complexo não nulo admite n raizes n-ésimas distintas duas a duas).

95. Como caso particular do exercício anterior, temos que os números complexos

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k.\pi}{n}+i\,sen\frac{2k.\pi}{n}$$

($k = 0,1,\cdots,n\text{-}1$) são as raizes n-ésimas complexas da unidade. Notar que se $\varepsilon = \varepsilon_1$, então $\varepsilon_k = \varepsilon^k$ para $k = 0,1,\cdots,n\text{-}1$; portanto, os números complexos $1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1}$ são tôdas as raizes n-ésimas complexas da unidade. Mostrar que o conjunto U_n das raizes n-ésimas da unidade é um grupo multiplicativo.

96. Determinar as raizes cúbicas da unidade.

95. Determinar as raizes quartas da unidade.

98. Determinar as raizes cúbicas dos números complexos, $-i$, $1+i$ e -1.

99. Usaremos as notações dos exercícios 94 e 95. Mostrar que $z_k = z_0\varepsilon^k$, para $k = 0,1,\cdots,n\text{-}1$. Em particular, se a é um número real positivo e não nulo, então os números complexos $a^{1/n}\varepsilon^k$ ($k = 0,1,\cdots,n\text{-}1$) são as raizes n-ésimas de a.

100. Consideremos o grupo $U_n = \{1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1}\}$ das raizes n-ésimas da unidade, onde $\varepsilon = \cos\frac{2.\pi}{n}+i\,sen\frac{2.\pi}{n}$. Mostrar que

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1} = 0.$$

Demonstrar que $U_n = \{1,\varepsilon^s,\varepsilon^{2s},\cdots,\varepsilon^{(n-1)s}\}$, onde $0 \leq s \leq n-1$, se, e sòmente se, s e n são primos entre si. (Diz-se, neste caso, que ε^s é uma raiz primitiva n-ésima da unidade).

101. Demonstrar que o produto de tôdas as raizes n-ésimas da unidade é igual a 1 se n é ímpar e -1 se n é par.

CAPÍTULO VI

ANÉIS DE POLINÔMIOS

INTRODUÇÃO

Estudaremos, neste capítulo, os anéis de polinômios com uma indeterminada (§1), as funções polinomiais (§2) e os anéis de polinômios com um número finito de indeterminadas (§3).

No §1 construiremos o anel de polinômios com uma indeterminada com coeficientes num anel comutativo com elemento unidade generalizando, dêste modo, a noção de polinômio da Álgebra elementar que só é introduzida para polinômios reais ou complexos. Construiremos também o corpo de frações racionais $K(X)$ com coeficientes num corpo K pelo processo geral de construção do corpo de frações de um anel de integridade que foi feita no §2 do Capítulo IV; outras propriedades do corpo de frações racionais $K(X)$ serão estabelecidas no capítulo seguinte ao estudarmos os anéis fatoriais. Ainda veremos, neste parágrafo, o algoritmo da divisão (teorema 4) e sua generalização (teorema 5); terminaremos êste parágrafo com o estudo dos elementos inversíveis e os divisores do zero do anel $A[X]$.

No §2 introduziremos as funções polinomiais e estenderemos o princípio de identidade de polinômios, da Álgebra Elementar, para o caso geral de polinômios com coeficientes num anel comutativo com elemento unidade; mostraremos que o anel $P(A)$ das funções polinomiais é um anel de integridade se, e sòmente se, A é um anel de integridade infinito (teorema 13). Estudaremos as funções polinomiais sôbre um corpo finito demonstrando, em particular, que tôda função de A em A é uma função polinomial se, e sòmente se, A é um corpo finito (teorema 15). Finalmente, com o objetivo de generalizar a noção de anel de polinômios com uma indeterminada intro-

duziremos as noções de elemento algébrico e elemento transcendente (§2.1) e daremos, então, no §2.4 o conceito geral de anel de polinômios (definição 7). Neste parágrafo procuramos destacar com diversos exemplos que certas propriedades estudadas na Álgebra Elementar não são, em geral, verdadeiras quando se consideram polinômios com coeficientes num anel qualquer.

No §3 estudaremos os anéis de polinômios com um número finito de indeterminadas e com coeficientes num anel comutativo com elemento unidade; a noção de grau de um polinômio com uma indeterminada será estendida de dois modos diferentes: grandeza (definição 11) e grau total. Ainda veremos a noção geral de anel de polinômios (§3.2) e estudaremos as funções polinomiais de n variáveis (§3.3); finalmente, terminaremos êste parágrafo com o teorema fundamental dos polinômios simétricos (teorema 29), cuja demonstração é baseada no conceito de grandeza de um polinômio.

§1 - ANEL DE POLINÔMIOS COM UMA INDETERMINADA

1.1 - CONSTRUÇÃO DO ANEL DE POLINÔMIOS COM UMA INDETERMINADA E CORPO DE FRAÇÕES RACIONAIS.

Seja A um anel comutativo com elemento unidade e consideremos o conjunto $S(A)$ de tôdas as sucessões $(a_i)_{i\in N}$ (ou, simplesmente, (a_i)) de elementos de A. No §1.2 do Capítulo V definimos uma operação de adição sôbre $S(A)$ do seguinte modo: se $f=(a_i)$ e se $g=(b_i)$ são dois elementos quaisquer de $S(A)$, então $f+g=(c_i)$, onde $c_i=a_i+b_i$ para todo $i\in N$. Já sabemos que $S(A)$ é um grupo comutativo em relação a esta operação.

DEFINIÇÃO 1 - Diz-se que uma sucessão $(a_i)\in S(A)$ é *quase-nula* se, e sòmente se, $a_i\neq 0$ sòmente para um número finito de índices $i\in N$.

Por exemplo, a sucessão nula $0'=(a_i)$, onde $a_i=0$ para todo $i\in N$, é quase-nula; a sucessão $1'=(a_i)$, onde $a_0=1$ e $a_i=0$ para todo $i\neq 0$ também é quase-nula.

É imediato que uma sucessão $(a_i)\in S(A)$ é quase-nula se, e sòmente se, existe $n\in N$ tal que $a_i=0$ para todo $i>n$. Indicaremos por E o conjunto de tôdas as sucessões quase-nulas de elementos de A e é fácil verificar que E é fechado em relação à adição; além disso, esta operação induz uma estrutura de grupo comutativo sôbre o conjunto E.

DEFINIÇÃO 2 - Chama-se *produto* de duas sucessões $f=(a_i)$ e $g=(b_j)$, pertencentes a E, à sucessão $fg=(c_k)$ definida por

$$c_k=\sum_{i+j=k} a_ib_j=\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}=\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j \qquad (1),$$

para todo $k\in N$.

De acôrdo com esta definição, temos:

$c_0=a_0b_0$

$c_1=a_0b_1+a_1b_0$

$c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$

.....

$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_ib_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0$.

Afirmamos que $fg\in E$, isto é, que o produto de duas sucessões quase-nulas é uma sucessão quase-nula. Com efeito, existem, por hipótese, números naturais m e n tais que

$$a_i=0 \text{ para todo } i>m$$

e

$$b_j=0 \text{ para todo } j>n;$$

portanto, conforme (1), teremos

$$c_{m+n}=a_mb_n$$

e

$$c_k=0 \text{ para todo } k>m+n,$$

ou seja, a sucessão produto (c_k) é quase-nula.

Fica assim definida uma operação de multiplicação $(f,g)\mapsto fg$ sôbre o conjunto E e demonstraremos o seguinte

TEOREMA 1 - O conjunto E de tôdas as sucessões quase-nulas, de elementos do anel A, é um anel comutativo com elemento unidade em relação às operações de adição e de multiplicação definidas acima.

DEMONSTRAÇÃO - Falta verificar os axiomas M1, M2, M3 e D da definição de anel comutativo com elemento unidade, pois já sabemos que E é um grupo comutativo em relação à adição.

M1. Sejam $f=(a_i)$, $g=(b_j)$ e $h=(c_k)$ três elementos quaisquer de E e ponhamos $fg=(d_p)$, $(fg)h=(d'_q)$, $gh=(e_p)$ e $f(gh)=(e'_q)$, logo, conforme a fórmula (1), temos

$$d'_q = \sum_{p+k=q} d_p c_k = \sum_{p+k=q} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) c_k = \sum_{i+j+k=q} (a_i b_j) c_k =$$
$$= \sum_{i+j+k=q} a_i (b_j c_k) = \sum_{i+p=k} a_i \Big(\sum_{j+k=p} b_j c_k \Big) = \sum_{i+p=k} a_i e_p = e'_q$$

para todo $q \in \boldsymbol{N}$; portanto, $(fg)h = f(gh)$.

M2. Sejam $f = (a_i)$ e $g = (b_j)$ dois elementos quaisquer de E e ponhamos $fg = (c_k)$ e $gf = (c'_k)$, logo, de acôrdo com a fórmula (1), temos

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j+i=k} b_j a_i = c'_k,$$

para todo $k \in \boldsymbol{N}$; portanto, $fg = gf$.

M3. Para tôda sucessão $f \in E$, temos $f \cdot 1' = f$; portanto, a sucessão $1' = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ é o elemento unidade para a operação de multiplicação definida sôbre E.

D. Sejam $f = (a_i)$, $g = (b_j)$ e $h = (c_j)$ três elementos quaisquer de E e ponhamos $g+h = (d_j)$, $f(g+h) = (e_k)$, $fg = (d'_k)$, $fh = (d''_k)$ e $fg+fh = (e'_k)$; temos $d_j = b_j + c_j$ e

$$e_k = \sum_{i+j=k} a_i d_j = \sum_{i+j=k} a_i b_j + \sum_{i+j=k} a_{ij} c = d'_k + d''_k = e'_k,$$

para todo $k \in \boldsymbol{N}$; portanto, $f(g+h) = fg+fh$. ∎

Os elementos do anel E construído acima passam a ser denominados *polinômios com coeficientes em* A e $(E, +, \cdot)$ é chamado *anel de polinômios com coeficientes em* A.

Se $f = (a_i)$ é um elemento não nulo de E, então existe um elemento $a_i \neq 0$ e, por outro lado, existe $p \in \boldsymbol{N}$ tal que $a_i = 0$ para todo $i > p$; portanto, o conjunto $\{i \in \boldsymbol{N} \mid a_i \neq 0\}$ é não vazio e finito. O máximo dêste conjunto é denominado grau do polinômio f. Precisamente, daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 3 - Chama-se *grau* de um polinômio não nulo $f = (a_i) \in E$ ao número natural

$$n = max\{i \in \boldsymbol{N} \mid a_i \neq 0\}.$$

Neste caso, a_n é denominado *coeficiente dominante* do polinômio f e se $a_n = 1$ diremos que f é um *polinômio unitário.*

O grau do polinômio $f \neq 0'$ será indicado pela notação ∂f (leia-se: grau de f); portanto, $n = \partial f$ se, e sòmente se, $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > n$.

Usaremos a expressão «o polinômio $f = (a_i) \in E$ tem grau inferior a n» caso se tenha $a_i = 0$ para todo $i > n$; portanto, se f tem grau inferior a n e se $f \neq 0'$, então $\partial f \leq n$. É imediato que se f e g têm graus inferiores a n, então $f+g$ também tem grau inferior a n. Se f tem grau inferior a m e se g tem grau inferior a n, então fg tem grau inferior a $m+n$.

Sejam $f = (a_i)$ e $g = (b_i)$ dois polinômios não nulos sôbre A e suponhamos que $f+g = (c_i) \neq 0'$. Se $m = \partial f \leq n = \partial g$, temos $c_n = a_n + b_n$ e $c_i = 0$ para todo $i > n$; portanto, $\partial(f+g) \leq n$. Se $m < n$, teremos $c_n = a_n + b_n = 0 + b_n = b_n \neq 0$ e $c_i = 0$ para todo $i > n$; portanto, $f+g \neq 0'$ e $\partial(f+g) = n$. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 2 - Sejam f e g dois polinômios não nulos sôbre A; temos:

a) se $f+g \neq 0'$, então $\partial(f+g) \leq max\{\partial f, \partial g\}$;

b) se $\partial f \neq \partial g$, então $f+g \neq 0'$ e $\partial(f+g) = max\{\partial f, \partial g\}$.

Sejam $f = (a_i)$ e $g = (b_j)$ dois elementos não nulos de E e seja $fg = (c_k)$. Se $m = \partial f$ e se $n = \partial g$, temos $c_{m+n} = a_m b_n$ e $c_k = 0$ para todo $k > m+n$. Portanto, se $fg \neq 0'$, teremos $\partial(fg) \leq m+n$; observemos que $\partial(fg) < m+n$ se $a_m b_n = 0$ o que acontecerá sòmente se a_m e b_n forem divisores próprios do zero em A. Daqui resulta que se a_m ou b_n é um elemento regular, então $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$, logo, $\partial(fg) = m+n$. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 3 - Sejam f e g dois polinômios não nulos sôbre A; temos:

a) se $fg \neq 0'$, então $\partial(fg) \leq \partial f + \partial g$;

b) se o coeficiente dominante de f ou de g é regular em A, então $fg \neq 0'$ e $\partial(fg) = \partial f + \partial g$.

A parte b) do teorema anterior nos dá, imediatamente, os seguintes corolários.

COROLÁRIO 1 - Se A é um anel de integridade e se f e g são dois polinômios não nulos com coeficientes em A, então $fg \neq 0'$ e $\partial(fg) = \partial f + \partial g$.

COROLÁRIO 2 - O anel de polinômios E, com coeficientes num anel comutativo A com elemento unidade é um anel de integridade se, e sòmente se, A é um anel de integridade.

Indiquemos por A' o subconjunto de E formado por todos os polinômios (a_i), onde $a_i = 0$ para todo $i > 0$; é fácil verificar que A' é um sub-anel unitário do anel E. Consideremos agora a aplicação $\varphi : A \longrightarrow A'$ definida por $\varphi(a) = (a_i)$, onde $a_0 = a$ e $a_i = 0$ para todo $i > 0$; é imediato que φ é bijetora e, além dis-

so, $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ e $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$, quaisquer que sejam a e b em A; portanto, φ é um isomorfismo de A em A'. No que se segue identificaremos o anel A com o anel A' por meio do isomorfismo φ, isto é, poremos $a=(a,0,\cdots,0,\cdots)$ para todo a em A; uma vez feita esta identificação, temos $0=0'$ e $1=1'$ e, além disso, A passa a ser considerado como um sub-anel unitário do anel E. Os elementos de A serão denominados *polinômios constantes.*

Para cada número natural r indiquemos por M_r o polinômio $(\delta_{r,i})_{i\in N'}$ onde $\delta_{r,r}=1\in A$ e $\delta_{r,i}=0\in A$ se $i\neq r$; por exemplo, temos $M_0=1'=1$. Afirmamos que

$$M_rM_s=M_{r+s} \tag{2}$$

quaisquer que sejam os números naturais r e s. Com efeito, pondo-se $M_rM_s=(c_k)$, temos em virtude da fórmula (1):

$$c_k=\sum_{i+j=k}'\delta_{r,i}\delta_{s,j}$$

e daqui resulta, fàcilmente, que $c_k=0$ para $k\neq r+s$ e $c_{r+s}=1$; portanto, $c_k=\delta_{r+s,k}$ e então $(c_k)=M_{r+s}$. ∎

Mostraremos, a seguir, que para todo $a\in A$, tem-se

$$aM_r=(a\delta_{r,i})_{i\in N} \tag{3}.$$

Com efeito, o elemento a está identificado com o polinômio $(a\delta_{0,i})_{i\in N}$ e pondo-se $aM_r=(c_k)$, teremos

$$c_k=\sum_{i+j=k}'a\delta_{0,i}\delta_{r,j}=a\delta_{r,k};$$

portanto, vale a fórmula (3).

Seja $f=(a_i)$ um polinômio qualquer de E e indiquemos por n um número natural tal que $a_i=0$ para todo $i>n$, logo,

$$f=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\cdots);$$

daqui resulta, conforme a definição de soma de polinômios e a fórmula (3),

$$f=a_0M_0+a_1M_1+\cdots+a_nM_n \tag{4}.$$

Indicando-se por X o polinômio M_1, a fórmula (2) nos mostra que $M_r=X^r$ para todo $r>0$ e como $M_0=1=X^0$ a fórmula (4) pode ser posta sob a forma

$$f=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n=\sum_{i=0}^{n}{}'a_iX^i \tag{5}.$$

Esta é a expressão usual de um polinômio em X e com coeficientes em A. Cada polinômio $M_i=X^i$ é denominado *monômio* e como $\delta(M_i)=i$ também diremos que M_i é o *monômio de grau* i; o elemento a_i, em (5), é chamado *coeficiente do monômio* X^i *em* f ou *i-ésimo coeficiente de* f e a_iX^i é denominado *têrmo i-ésimo do polinômio* f. O monômio $M_1=X$ é chamado *indeterminada* e diremos, então, que (5) *é um polinômio na indeterminada* X *e com coeficientes em* A. Convém observar que os coeficientes $a_0,a_1,\cdots,a_n$ do polinômio f, dado por (5), não são determinados de modo único, pois para todo $m>n$ também temos $f=\sum_{i=0}^{m}{}'a_iX^i$; no entanto, se $f\neq 0$ e se $\partial f=n$, então existe uma única família $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, de elementos de A, tal que (5) seja verdadeira. Neste caso, diz-se que $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ é a *família dos coeficientes do polinômio* f.

Observemos ainda que o polinômio f, determinado em (5), é nulo se, e sòmente se, $a_i=0$ para $i=0,1,\cdots,n$. Se $g=(b_i)\in E$ e se n é um número natural tal que $b_i=0$ para todo $i>n$, logo,

$$g=\sum_{i=0}^{n}{}'b_iX^i \tag{6},$$

então, temos, $f=g$ se, e sòmente se, $a_i=b_i$ para $i=0,1,\cdots,n$; em particular, se $f=g$ e se $f\neq 0$, então $\partial f=\partial g$.

A soma dos polinômios f e g, dados por (5) e (6), é determinada por

$$f+g=\sum_{i=0}^{n}{}'(a_i+b_i)X^i$$

e temos

$$-f=\sum_{i=0}^{n}{}'(-a_i)X^i.$$

Finalmente, se

$$f=\sum_{i=0}^{m}{}'a_iX^i \quad \text{e} \quad g=\sum_{j=0}^{n}{}'b_jX^j$$

são dois elementos quaisquer de E, temos

$$fg=\sum_{k=0}^{m+n}{}'c_kX^k \tag{7},$$

onde podemos representar c_k sob a forma (fazendo-se a convenção: $a_i=0$ para todo $i>m$ e $b_j=0$ para todo $j>n$):

$$c_k=\sum_{i+j=k}'a_ib_j.$$

A fórmula (7) nos dá o processo usual para determinar o produto dos polinômios f e g e podemos dizer que êste produto é obtido «multiplicando-se cada têrmo de f por todos os têrmos de g e efetuando-se a seguir a soma dêstes produtos».

É imediato que o sub-anel, de E, gerado pelo conjunto $A\cup\{X\}$ (ver o §1.6, Capítulo IV), que é indicado pela nota-

ção $A[X]$, coincide com E: $E = A[X]$. Daqui por diante indicaremos o anel de polinômios E pela notação $A[X]$ e êste anel será denominado *anel de polinômios na indeterminada X e com coeficientes em A.*

Seja K um corpo e consideremos o anel de polinômios na indeterminada X e com coeficientes em K; o corolário 2 do teorema 3 nos mostra que $K[X]$ é um anel de integridade, logo, podemos construir o corpo de frações M de $K[X]$ (§2.1, Capítulo IV) e é imediato que o sub-corpo, de M, gerado por $K \cup \{X\}$ é o próprio M; portanto, podemos indicar M pela notação $K(X)$. Os elementos de $K(X)$ são chamados *frações racionais na indeterminada X e com coeficientes em K*; $K(X)$ é denominado *corpo de frações racionais na indeterminada X e com coeficientes em K*, ou, *corpo de frações racionais em X sôbre o corpo K*. Tôda fração racional em X e com coeficientes em K é da forma f/g, onde f e g são elementos de $K[X]$ e $g \neq 0$; notemos que $f/g = f'/g'$ se, e sòmente se, $fg' = gf'$. A soma e o produto de duas frações racionais f/g e p/q são determinadas pelas fórmulas:

$$\frac{f}{g}+\frac{p}{q}=\frac{fq+gp}{gq} \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}\cdot\frac{p}{q}=\frac{fp}{gq};$$

além disso, temos

$$-\frac{f}{g}=\frac{-f}{g}=\frac{f}{-g}.$$

A inversa da fração racional não nula f/g, logo, $f \neq 0$, é a fração racional g/f.

Outras propriedades das frações racionais serão dadas no Capítulo seguinte ao estudarmos os anéis fatoriais.

EXERCÍCIOS

1. Escrever sob a forma (5) os seguintes polinômios pertencentes a $A[X]$:

a) $(-4+3X+X^3)(3+2X+X^2)$, $A = \mathbf{Z}$;

b) $(3X^3-\frac{1}{2}X+2)(\frac{2}{3}X^2+4X+3)$, $A = \mathbf{Q}$;

c) $X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$, $A = F_5$ (§1.7, Capítulo IV);

d) $(X^3+2X^2+X+2)^3$, $A = F_3$;

e) $(2X^3+3X+5)^3$, $A = F_8$;

f) $(aX^2+bX+c)(dX^2+eX+f)$, $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, onde $a=(1,0)$, $b=(0,1)$, $c=(1,1)$, $d=(0,1)$, $e=(1,0)$ e $f=(-1,0)$.

2. Determinar os graus dos seguintes polinômios pertencentes a $A[X]$:

a) $(2X^2+X+2)(6X^2+2X+1)(X^3+1)$, $A = \mathbf{Q}$;

b) $(2X^2+X+2)(6X^2+2X+1)$, $A = F_{12}$;

c) $(2X^2+1)^4$, $A = F_8$;

d) $(aX^2+b)(cX^2+d)$, $A = F_4 \times \mathbf{Z}$, onde $a=(2,2)$, $b=(1,-1)$, $c=(2,3)$ e $d=(1,1)$.

3. Determinar todos os polinômios de grau 2 do anel $F_3[X]$.

4. Consideremos o anel de polinômios $A[X]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade e o conjunto A é finito e tem q elementos; determinar:

a) o número de polinômios de grau $\leq n$;

b) o número de polinômios de grau n;

c) o número de polinômios unitários e de grau n.

5. Determinar a e b de modo que o polinômio

$$X^4+3X^3+5X^2+aX+b \in F_7[X]$$

seja um quadrado perfeito em $F_7[X]$.

6. Se g um polinômio não nulo do anel $A[X]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade; supondo-se que $g^n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ o que se pode afirmar sôbre o grau dêste polinômio? Mostrar que se o coeficiente dominante de g não é um divisor do zero, então $\partial g^n = n \partial g$.

7. Calcular, em $\boldsymbol{R}(X)$:

a) $\dfrac{X+5}{X^2+7X+10}-\dfrac{X-1}{X^2+5X+6}$;

b) $\dfrac{X^4-a^4}{(X-a)^2}\cdot\dfrac{a^2}{X^2+a^2}\cdot\dfrac{X-a}{aX+a^2}$ $(a \in \boldsymbol{R}^*)$;

c) $\left(\dfrac{2X}{X-1}+\dfrac{X^2}{X^2-1}\right)\dfrac{1-X}{X^3}$.

8. Calcular em $F_p(X)$:

a) $\left(\dfrac{X}{X-1}\right)^5+\left(\dfrac{X}{X+1}\right)^5$, $p=5$;

b) $\dfrac{X^7-X}{(X-1)(X-2)}+\dfrac{X^7-X}{(X-3)(X-4)}+\dfrac{X^7-X}{(X-5)(X-6)}$, $p=7$;

c) $\dfrac{X}{X-1}+\dfrac{X+2}{X-2}+\dfrac{X+1}{X}$, $p=3$.

9. Mostrar que não existe um elemento x, de $F_5(X)$, tal que $x^5 = X$.

10. Mostrar que não existe um elemento x, de $\boldsymbol{R}(X)$, tal que $x^2 = X^3+X+1$.

1.2 - ALGORITMO DA DIVISÃO

Estenderemos, nesta secção, o algoritmo da divisão euclidiana considerado no anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros (§2.2, Capítulo III) para um anel de polinômios.

TEOREMA 4 - Sejam f e g dois polinômios pertencentes ao anel $A[X]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade e suponhamos que $f\neq 0$, $\partial f = n$ e que o coeficiente dominante a_n, de f, seja um elemento inversível em A. Nestas condições, existe um único par (q,r), de elementos de $A[X]$, tal que $g = qf+r$, onde $\partial r < n$ se $r\neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Vejamos, em primeiro lugar, a unicidade do par (q,r). Suponhamos que

$$g = qf+r = q'f+r' \qquad (8),$$

onde q, r, q' e r' são elementos de $A[X]$, $\partial r < n$ se $r\neq 0$ e $\partial r' < n$ se $r'\neq 0$. Se, por absurdo, $q\neq q'$ temos $(q-q')f\neq 0$, pois, o coeficiente dominante de f é regular; neste caso, a parte b) do teorema 3 nos mostra que

$$\partial[(q-q')f] = \partial(q-q')+\partial f \geq n \qquad (9).$$

Por outro lado, de (8) resulta que $r'-r = (q-q')f$, logo, $r'-r\neq 0$ e em virtude do teorema 2 temos

$$\partial[(q-q')f] = \partial(r'-r) < n$$

o que está em contradição com (9). Portanto, $q = q'$ e então $r = r'$.

Consideremos agora o conjunto S de todos os polinômios, de $A[X]$, que são da forma $g-hf$, com $h\in A[X]$; dois casos podem se apresentar: a) o polinômio nulo pertence a S; b) todo polinômio de S é diferente de zero.

a) Existe, por hipótese, $q\in A[X]$ tal que $g = qf$ e basta escolher $r = 0$.

b) Temos $g-hf\neq 0$ para todo $h\in A[X]$, logo, existe em S um polinômio r de grau mínimo; de $r\in S$ vem $r = g-qf$, com $q\in A[X]$, portanto, basta demonstrar que $\partial r < n$. Suponhamos, por absurdo, que $\partial r = m \geq n$ e seja b_m o coeficiente dominante de r; consideremos, então, o polinômio

$$r_1 = r - b_m a_n^{-1} X^{m-n} f.$$

Temos

$$r_1 = g - (q + b_m a_n^{-1} X^{m-n}) f,$$

logo, $r_1\in S$ e então $r_1\neq 0$. Mas, pela própria definição de r_1, temos $\partial r_1 < \partial r$ e obtemos, dêste modo, uma contradição, pois, r indica um polinômio de grau mínimo pertencente a S. ∎

Os polinômios q e r são denominados, respectivamente, *quociente e resto da divisão euclidiana de g por f*; se $r = 0$, diz-se que esta divisão é *exata*.

A hipótese «o coeficiente dominante de f é um elemento inversível» está certamente satisfeita quando A é um corpo; neste caso, o teorema 4 pode ser enunciado sob a forma:

COROLÁRIO - Se f e g são dois polinômios na indeterminada X com coeficientes num corpo K e se $f\neq 0$, então existe um único par (q,r), de polinômios de $K[X]$, tal que $g = qf+r$, onde $\partial r < n$ se $r\neq 0$.

Vamos estender o teorema 4 para o caso em que o coeficiente dominante de f seja elemento qualquer (não nulo) de A:

TEOREMA 5 - Sejam f e g dois polinômios pertencentes ao anel $A[X]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade; suponhamos que $f\neq 0$, $\partial f = n$ e que g tenha grau $\leq m$. Nestas condições, se a_n é o coeficiente dominante de f e se $k = max\{m-n+1, 0\}$, então existem polinômios q e r em $A[X]$, tais que

$$a_n^k g = qf+r,$$

onde $\partial r < n = \partial f$ se $r\neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $g = 0$ basta escolher $q = 0$ e $r = 0$, logo, podemos supor que $g\neq 0$ e, além disso, que $\partial g = m$. Faremos a demonstração por indução finita sôbre m.

1) $m = 0$. Se $n = 0$, temos $k = 1$ e basta escolher $q = g$ e $r = 0$; se $n > 0$, temos $k = 0$ e escolhemos $q = 0$ e $r = g$.

2) Suponhamos que $m > 0$ e que o teorema acima seja verdadeiro para todo polinômio não nulo de $A[X]$ e de grau estritamente inferior a m. Seja $g\in A[X]$ um polinômio não nulo de grau m e indiquemos por b_m o coeficiente dominante de g. Se $m < n$, temos $k = 0$ e basta escolher $q = 0$ e $r = g$. Se $m \geq n$, consideremos o polinômio

$$g_1 = a_n g - b_m X^{m-n} f \qquad (10).$$

Se $g_1 = 0$ temos

$$a_n g = b_m X^{m-n} f,$$

de onde vem,

$$a_n^k g = (a_n^{k-1} b_m X^{m-n}) f$$

e, neste caso, escolhemos $q = a_n^{k-1} b_m X^{m-n}$ e $r = 0$. Se $g_1\neq 0$, resulta de (10) que $\partial g_1 \leq m-1$; portanto, podemos aplicar a hipótese de indução aos polinômios g_1 e f e teremos

$$a_n^{k'} g_1 = q_1 f + r \qquad (11),$$

onde $k' = max\{m-1-n+1, 0\} = m-n$ e $\partial r < n$ se $r\neq 0$. De (10) e (11) concluímos que

$$a_n^{m-n+1} g = a_n^{m-n}(a_n g) = a_n^{m-n}(b_m X^{m-n} f + g_1) = (a_n^{m-n} b_m X^{m-n} + q_1) f + r$$

e fica assim verificado o teorema para polinômios de grau m. ∎

Completaremos o teorema acima mostrando que os polinômios q e r são determinados de modo único no caso em que o coeficiente dominante a_n, de f, é um elemento regular em A. Com efeito, de

$$a_n^k g = qf + r = q'f + r',$$

vem $(q-q')f = r'-r$. Se, por absurdo, $q \neq q'$ temos $(q-q')f \neq 0$, pois a_n é regular e então $r'-r \neq 0$. Por outro lado, temos $\partial[(q-q')f] \geq n$ e $\partial(r'-r) < n$, o que é absurdo. Portanto, $q = q'$ e $r = r'$. ∎

Vejamos dois exemplos para mostrar que se o coeficiente dominante de f não é regular, então q e r não são, em geral, determinados de modo único.

Exemplo 1 - Consideremos os polinômios $g = 2X^2+X+1$ e $f = 2X+1$ com coeficientes no anel F_{12} dos inteiros módulo 12. O coeficiente dominante de f é 2 que é um divisor próprio do zero em F_{12}. Temos

$$2^2 \cdot (2X^2+X+1) = 4X \cdot (2X+1)+4 = (10X+3)(2X+1)+1;$$

portanto, q e r não são únicos.

Exemplo 2 - Consideremos os polinômios $g = 4X^2+10X+6$ e $f = 2X+3$ com coeficientes no anel F_{12} dos inteiros módulo 12; temos $2^2(4X^2+10X+6) = (8X+8)(2X+3) = (2X+5)(2X+3)+9$,

portanto, q e r não são únicos. Observemos que na primeira divisão tem-se $r = 0$ e na segunda $r \neq 0$.

A demonstração da parte b) do teorema 4 nos dá o processo usual da determinação do quociente e do resto da divisão euclidiana de g por f. Veremos dois exemplos numéricos para mostrar como se determinam q e r a partir de g e f.

Exemplo 3 - Consideremos os polinômios $g = X^4+X^3+X+1$ e $f = 2X^2+X+1$ pertencentes a $\mathbf{Q}[X]$; para determinar o quociente q e o resto r da divisão euclidiana de g por f disporemos os cálculos do seguinte modo:

$$\begin{array}{r|l}
X^4+X^3+X+1 & 2X^2+X+1 \\
\hline
-X^4-\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{2}X^2 & \frac{1}{2}X^2+\frac{1}{4}X-\frac{3}{8} \\
\hline
\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{2}X^2+X+1 & \\
-\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{4}X^2-\frac{1}{4}X & \\
\hline
-\frac{3}{4}X^2+\frac{3}{4}X+1 & \\
\frac{3}{4}X^2+\frac{3}{8}X+\frac{3}{8} & \\
\hline
\frac{9}{8}X+\frac{11}{8} &
\end{array}$$

portanto, $q = \frac{1}{2}X^2+\frac{1}{4}X-\frac{3}{8}$ e $r = \frac{9}{8}X+\frac{11}{8}$.

Notemos que nos cálculos acima não é necessário escrever a indeterminada X nas operações indicadas; além disso, podemos simplificar êstes cálculos utilizando-se o teorema 5 como nos mostra o seguinte

Exemplo 4 - Consideremos os polinômios g e f dados no exercício anterior e com coeficientes no anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros. Temos $k = max\{m-n+1, 0\} = 3$, portanto, devemos efetuar a divisão do polinômio $8g$ por f; disporemos os cálculos do seguinte modo

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 2\ 1\ 1 \\
\hline
-8 & -4 & -4 & & & 4\ 2\ -3 \\
\hline
 & 4 & -4 & 8 & 8 & \\
 & -4 & -2 & -2 & & \\
\hline
 & & -6 & 6 & 8 & \\
 & & 6 & 3 & 3 & \\
\hline
 & & & 9 & 11 &
\end{array}$$

portanto, $q_1 = 4X^2+2X-3$, $r_1 = 9X+11$ e $8g = q_1 f + r_1$. Considerando-se agora os polinômios g e f com coeficientes em $\mathbf{Q}$ obtém-se a partir desta última igualdade $g = (\frac{1}{8}a_1)f + \frac{1}{8}r_1$ e ficam assim determinados os polinômios $q = \frac{1}{8}q_1$ e $r = \frac{1}{8}r_1$ do exercício anterior.

EXERCÍCIOS

11. Determinar o quociente e o resto da divisão euclidiana do polinômio $g \in A[X]$ pelo polinômio $f \in A[X]$ nos seguintes casos:

a) $g = 3X^5-4X^2+6X+1$, $f = 2X^3+3X+2$, $A = \mathbf{Q}$;

b) $g = 4X^3+3X^2+5X+2$, $f = 5X^2+4X+3$, $A = F_{12}$;

c) $g = X^{12}-1$, $f = X^4-X^2+1$, $A = F_5$;

d) $g = 8X^4+3X+7$, $f = 9X^2+5X+1$, $A = F_{13}$.

12. Aplicar o teorema 5 nos seguintes casos:

a) $g = 3X^4+2X^3+X^2+3X+2$, $f = 2X^2+X+3$, $A = \mathbf{Z}$;

b) $g = X^4-X^2+1$, $f = 3X^2+2X+1$, $A = F_6$;

c) $g = aX^3+bX^2+c$, $f = bX^2+a$, onde $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $a = (1,2)$, $b = (1,0)$ e $c = (0,1)$.

13. Mostrar que as hipóteses feitas no teorema 4 são essenciais considerando-se os polinômios $g = X^2+5X+1$ e $f = 3X+1$ do anel $F_6[X]$.

14. Determinar a e b para que a divisão euclidiana do polinômio $g = X^3+aX+b \in \mathbf{R}[X]$ por $f = X^2+bX-1 \in \mathbf{R}[X]$ seja exata.

15. Determinar a, b e c para que a divisão euclidiana do polinômio $g = X^{12}+X^{11}+X^{10}+\cdots+X+1 \in F_3[X]$ pelo polinômio $f = X^3+aX^2+bX+c \in F_3[X]$ seja exata.

1.3 - ELEMENTOS INVERSÍVEIS E DIVISORES DO ZERO

Seja A um anel comutativo com elemento unidade e consideremos o anel de polinômios $A[X]$ na indeterminada X e com coeficientes em A. Indicaremos por $U(A)$ e $U(A[X])$ os grupos dos elementos inversíveis de A e de $A[X]$ (ver o §1.2 do Capítulo IV) e notemos que

$$U(A) \subset U(A[X]).$$

Vejamos um exemplo para mostrar que, em geral, $U(A) \neq U(A[X])$, isto é, que um polinômio não constante pode ser inversível.

EXEMPLO 5 - Tomemos $A = F_4$ e consideremos o polinômio $f = 2X+1$ de $F_4[X]$; temos $ff = 1$, logo, $f \in U(A[X])$ com $f \notin U(A)$.

No caso em que A é um anel de integridade temos $U(A) = U(A[X])$ conforme o seguinte

TEOREMA 6 - Se A é um anel de integridade, então os únicos elementos inversíveis de $A[X]$ são os elementos inversíveis de A.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $f \in A[X]$ um elemento inversível em $A[X]$, logo, existe $g \in A[X]$ tal que $fg = 1$; de acôrdo com o corolário 1 do teorema 3, temos $\partial f + \partial g = 0$, logo, $\partial f = \partial g = 0$, isto é, f e g são constantes, portanto, $f \in U(A)$. ∎

Veremos a seguir como são os divisores próprios do zero em $A[X]$. É imediato que se $a \in A$ é um divisor próprio do zero em A, então a também é um divisor próprio do zero em $A[X]$. Suponhamos que $f \in A[X]$ seja um divisor próprio do zero em $A[X]$, logo, existe $g \in A[X]$, $g \neq 0$, tal que $fg = 0$; demonstraremos que o polinômio g pode ser escolhido como um polinômio constante:

TEOREMA 7 - Se um polinômio $f \in A[X]$ é um divisor próprio do zero em $A[X]$, então existe $c \in A$, $c \neq 0$, tal que $cf = 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Indiquemos por S o conjunto de todos os polinômios $g \in A[X]$, $g \neq 0$, tais que $gf = 0$. O conjunto S não é vazio, pois, por hipótese, f é um divisor próprio do zero em $A[X]$; portanto, existe em S um polinômio g de grau mínimo. Se demonstrarmos que o grau de g é nulo obteremos a tese do

teorema acima. Suponhamos, por absurdo, que $\partial g > 0$ e seja c o coeficiente dominante de g. Se

$$f = a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$$

e se

$$a_ig = 0 \quad \text{para} \quad i = 0,1,\cdots,n,$$

teremos $a_ic = 0$ $(i = 0,1,\cdots,n)$, logo, $cf = o$ contra a hipótese feita sôbre o grau de g. Portanto, existe um índice r, com $0 \leqslant r \leqslant n$, tal que $a_rg \neq 0$ e $a_ig = 0$ para $i = r+1,\cdots,n$; mas, de $gf = 0$ vem

$$ga_0+ga_1X+\cdots+ga_nX^n = 0,$$

ou,

$$g(a_0+a_1X+\cdots+a_rX^r) = 0,$$

logo, $ca_r = 0$. Portanto, o polinômio $h = a_rg$ é não nulo e $\partial h < \partial g$; por outro lado, temos $hf = a_rgf = 0$, logo, $h \in S$, contra a definição do polinômio g. ∎

Como conseqüência imediata dêste teorema temos o

COROLÁRIO - Se um polinômio não nulo $f \in A[X]$ é um divisor próprio do zero em $A[X]$, então todos os coeficientes de f são divisores do zero em A; se pelo menos um dos coeficientes de f é regular em A, então f é regular em $A[X]$.

É interessante notar que não vale, em geral, a recíproca da primeira parte do corolário acima:

EXEMPLO 6 - Consideremos o polinômio $f = 3+4X \in F_{12}[X]$ cujos coeficientes 3 e 4 são divisores próprios do zero em F_{12}; f é regular em $F_{12}[X]$, pois zero é o único elemento c, de F_{12}, tal que $3c = 4c = 0$.

EXERCÍCIOS

16. Mostrar que o polinômio não constante $2X^3+2X^2+2X+1 \in F_4[X]$ é inversível.

17. Determinar todos os elementos inversíveis do anel $F_4[X]$.

18. Determinar todos os polinômios de grau 4, do anel $F_4[X]$, que são divisores do zero em $F_4[X]$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §1

19. Seja K o corpo de frações de um anel de integridade A; mostrar que o corpo de frações $A(X)$ do anel de polinômios $A[X]$ é isomorfo ao corpo de frações $K(X)$ de $K[X]$.

20. Mostrar que a aplicação $x \mapsto x^p$, de $F_p(X)$ em $F_p(X)$ (p: número natural primo) é um monomorfismo que não é um automorfismo.

21. Dar uma outra demonstração da parte de existência do teorema 4 procedendo por indução finita sôbre o grau de $g \neq 0$.

22. Sejam g e $f \neq 0$ dois polinômios do anel $K[X]$ (K é um corpo) e sejam q e r, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de g por f. Mostrar que, para todo $h \in K[X]$, $h \neq 0$, q e rh são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de gh por fh.

23. Mostrar que todo polinômio não nulo $f \in K[X]$, com coeficientes num corpo K, pode ser representado de modo único sob a forma

$$f = b_0 + b_1(X-c) + b_2(X-c)^2 + \cdots + b_n(X-c)^n,$$

onde $n = \partial f$, $c \in K$ e $b_i \in K$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$. Sugestão: fazer a demonstração por indução finita sôbre o grau de f, utilizando o algoritmo da divisão.

24. Consideremos o anel de polinômios $K[X]$ na indeterminada X e com coeficientes num corpo K; seja $p \in K[X]$ um polinômio não constante e unitário. Demonstrar que para todo $f \in K[X]$, $f \neq 0$, existe uma única família $(f_i)_{0 \leq i \leq r}$, de elementos de $K[X]$, satisfazendo as seguintes condições:

a) $f = f_0 + f_1 p + \cdots + f_r p^r$;

b) se $f_i \neq 0$ $(0 \leq i \leq r)$, então $\partial f_i < \partial p$;

c) $f_r \neq 0$;

d) $\partial f = \partial f_r + r\partial p$.

Sugestão: Proceder de modo análogo ao que fizemos para introduzir a representação m-ádica de um número natural (§2.2, Capítulo III).

25. Sejam g e $f \neq 0$ dois polinômios na indeterminada X e com coeficientes racionais; mostrar que o processo dado no exemplo 3, para determinar o quociente e o resto da divisão euclidiana de g por f, pode ser desenvolvido de modo a utilizar sòmente coeficientes inteiros. Sugestão: teorema 5 e exercícios 19 e 22.

26. Consideremos no anel de polinômios $\boldsymbol{R}[X]$ o subconjunto P^* formado por todos os polinômios não nulos $f \in \boldsymbol{R}[X]$ tais que o coeficiente dominante de f seja estritamente positivo e ponhamos $P = P^* \cup \{0\}$.

a) Demonstrar que o subconjunto P satisfaz as condições I, II, III e IV do teorema 39 do Capítulo IV; portanto, obtém-se uma estrutura de anel ordenado sôbre $\boldsymbol{R}[X]$.

b) Conforme o teorema 47 do Capítulo IV, $\boldsymbol{R}(X)$ é um corpo ordenado; mostrar que $\boldsymbol{R}(X)$ não é arquimediano.

c) Mostrar que a sucessão (a^n), onde $a \in \boldsymbol{R}$ e $a > 1$, é crescente e majorada mas não é convergente em $\boldsymbol{R}(X)$.

27. Consideremos o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes num corpo K e seja $f \in K[X]$ um polinômio não nulo e de grau $n > 0$; seja E o subconjunto, de $K[X]$, formado por todos os polinômios $c_0 + c_1 X + \cdots + c_{n-1} X^{n-1}$. Se g e h são dois elementos quaisquer de E colocaremos, por definição, $g \oplus h = g + h$ e $g \odot h = r$, onde r é o resto da divisão euclidiana de gh por f.

a) Mostrar que $(E, \oplus, \odot)$ é um anel comutativo com elemento unidade.

b) Notar que, em geral, êste anel tem divisores próprios do zero.

28. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e consideremos o conjunto $E = A^{\boldsymbol{N}}$ de tôdas as sucessões (a_i) de elementos de A. Se $f = (a_i)$ e $g = (b_i)$ são dois elementos quaisquer de E colocaremos, por definição, $f + g = (c_i)$ e $fg = (d_k)$, onde $c_i = a_i + b_i$ e $d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

a) Mostrar que estas operações definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sôbre o conjunto E.

b) Mostrar que A é isomorfo ao sub-anel A', de E, formado por tôdas as sucessões (a_i), onde $a_i = 0$ para todo $i \neq 0$. No que se segue identificaremos A com A'.

c) Mostrar que $A[X]$, onde $X = (\delta_{1,i})_{i \in \boldsymbol{N}}$ (ver o §1.1 dêste Capítulo), é um sub-anel unitário de E.

O anel E introduzido acima é indicado pela notação $A[[X]]$ e todo elemento $f = (a_i) \in E$ é representado pela «soma formal»

$$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \tag{12}$$

e é denominado *série formal na indeterminada X e com coeficientes em A*; $A[[X]]$, por sua vez, passa a ser denominado *anel das séries formais em X e com coeficientes em A*.

d) Demonstrar que $A[[X]]$ é um anel de integridade se, e sòmente se, A é um anel de integridade.

e) Demonstrar que a série formal (12) é inversível se, e sòmente se, a_0 é inversível.

f) Determinar o inverso de $1 - X$ em $A[[X]]$.

§2 - FUNÇÕES POLINOMIAIS

2.1 - VALOR DE UM POLINÔMIO

Seja A um conjunto não vazio e seja B um anel comutativo com elemento unidade; indicaremos por $F(A, B)$ o conjunto de tôdas as aplicações de A em B. Conforme vimos no exemplo 10, Capítulo IV, as operações

$$(f, g) \mapsto f + g \quad \text{e} \quad (f, g) \mapsto fg,$$

onde

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

para todo x em A, definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sôbre o conjunto $F(A, B)$. O anel $F(A, B)$ é denominado *anel das aplicações de A em B*, ou, *anel das funções definidas sôbre A e com valores em B* ou ainda *anel das funções de A em B*. Notemos que todo elemento b, de B, determina uma função $x \mapsto b$, de A em B, que é denominada *função constante determinada por b*; as funções constantes determinadas por $b = 0$ e

$b=1$ serão ainda indicadas por 0 e 1. Indicaremos por $F_c(A,B)$ o conjunto de tôdas as aplicações constantes de A em B e é fácil verificar que $F_c(A,B)$ é um sub-anel unitário de $F(A,B)$; além disso, a aplicação que a todo elemento $b\in B$ faz corresponder a função constante determinada por b é um isomorfismo de B em $F_c(A,B)$, logo, $B\cong F_c(A,B)$.

Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de B; indicaremos por $F(B)=F(B,B)$ o anel das aplicações de B em B. Mostraremos que cada polinômio $f\in A[X]$ determina uma função de B em B e para isso daremos, inicialmente, o significado de valor de f num elemento x de B (é o correspondente de valor numérico de um polinômio na Álgebra Elementar):

DEFINIÇÃO 4 - Se

$$f=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i\in A[X]$$

e se x é um elemento qualquer de B, chama-se *valor que f assume em x* ou *valor de f quando se substitui X por x*, ao elemento

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i.$$

Se $f(x)=0$ diremos que x é uma *raiz* ou um *zero* do polinômio f.

EXEMPLO 7 - Se $B=A[X]$ e se $x=X$, temos

$$f(X)=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i=f,$$

o que justifica a notação $f(X)$ para indicar o polinômio f.

Demonstra-se, fàcilmente, o seguinte

TEOREMA 8 - Se f e g são dois elementos quaisquer de $A[X]$ e se x é um elemento qualquer de B, temos

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (13),$$

$$(-f)(x)=-f(x) \qquad (14)$$

e

$$(fg)(x)=f(x)g(x) \qquad (15).$$

As fórmulas (13) e (15) nos mostram que a aplicação

$$\sigma_x: A[X]\longrightarrow B,$$

definida por

$$\sigma_x(f)=f(x),$$

é um homomorfismo e como $\sigma_x(a)=a$ para todo a em A, diremos que σ_x é um A-homomorfismo. Notando-se que $A\cup\{x\}\subset Im(\sigma_x)$ resulta $A[x]\subset Im(\sigma_x)$, pois $Im(\sigma_x)$ é um sub-anel de B (teorema 11, Capítulo IV); por outro lado, é imediato que $Im(\sigma_x)\subset A[x]$, portanto, $Im(\sigma_x)=A[x]$. Finalmente, é fácil verificar que se λ é um A-homomorfismo de $A[X]$ em B e se $\lambda(X)=x$, então $\lambda=\sigma_x$. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 9 - Para todo elemento $x\in B$ existe um único A-homomorfismo $\sigma_x: A[X]\longrightarrow B$ tal que $\sigma_x(X)=x$; além disso, a imagem de σ_x é o sub-anel $A[x]$, de B, gerado pelo conjunto $A\cup\{x\}$.

Conforme vimos acima todo elemento $y\in A[x]$ é da forma $y=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, com $a_i\in A$ para $i=0,1,\cdots,n$. Parece, então, natural dizer que y é um polinômio em x com coeficientes em A; no entanto, não usaremos esta nomenclatura no caso geral, pois nem sempre a família dos coeficientes $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ é determinada de modo único.

EXEMPLO 8 - Tomemos $B=\boldsymbol{R}$, $A=\boldsymbol{Z}$, $x=\sqrt{2}$ e $y=3+2\sqrt{2}$. Nesta representação y tem para coeficientes 3 e 2; mas

$$3+2\sqrt{2}=5+6\sqrt{2}+(-1)(\sqrt{2})^2+(-2)(\sqrt{2})^3$$

e agora y tem para coeficientes 5, 6, -1 e -2.

EXEMPLO 9 - Seja A um anel comutativo com elemento unidade e tomemos $B=A[X]$ e $x=X^2$. Se y é um elemento qualquer de $A[X^2]$, então existe um único $f\in A[X]$ tal que $y=f(X^2)$; portanto, neste caso, é legítimo dizer que y é um polinômio em X^2 com coeficientes em A.

Para ver em que condições podemos considerar certos elementos de B como polinômios com coeficientes em A, introduziremos as noções de elemento algébrico e de elemento transcendente dadas pela

DEFINIÇÃO 5 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de B; diz-se que um elemento $x\in B$ é *algébrico* sôbre A se, e sòmente se, existe um polinômio não nulo $g\in A[X]$ tal que $g(x)=0$. Caso contrário, diz-se que x é *transcendente sôbre A*.

Portanto, x é transcendente sôbre A se, e sòmente se, o polinômio nulo é o único polinômio $g\in A[X]$ tal que $g(x)=0$. Daqui resulta, imediatamente, o seguinte corolário do teorema 9:

COROLÁRIO - Um elemento $x\in B$ é transcendente sôbre A se, e sòmente se, o A-homomorfismo σ_x é um A-monomorfismo.

Portanto, se $x \in B$ é transcendente sôbre A, então o anel $A[X]$ é A-isomorfo ao anel $A[x]$ e neste caso diremos que todo elemento de $A[x]$ é um *polinômio em x com coeficientes em A* e que $A[x]$ é um *anel de polinômios em x com coeficientes em A*.

Todo número complexo que é algébrico (resp., transcendente) sôbre o corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais é denominado *número algébrico* (resp., *número transcendente*). Os primeiros exemplos de números transcendentes foram dados por Liouville (1809-1882) em 1844. Hermite (1822-1901) demonstrou em 1873 que o número $e = lim(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ é transcendente e Lindemann demonstrou em 1882 que o número π é transcendente. Êste último resultado tem importância para o problema da quadratura do círculo e por intermédio da teoria de Galois (1811-1832) demonstra-se, então, que êste problema não tem solução pela régua e compasso.

Convém notar que para um mesmo elemento x, de B, as noções introduzidas na definição 5 dependem do sub-anel A de B (ver o exemplo abaixo e o exercício 39).

EXEMPLO 10 - Consideremos o anel de polinômios $B = A[X]$. A indeterminada X é transcendente sôbre A e é algébrica sôbre o sub-anel $A[X^2]$.

EXEMPLO 11 - Todo elemento x, de A, é algébrico sôbre A, pois x é raiz do polinômio não nulo $X-x \in A[X]$.

EXEMPLO 12 - Os números complexos $\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}+i\sqrt{3}$ e $i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ são algébricos, pois, êstes números são, respectivamente, raízes dos seguintes polinômios de $\mathbf{Q}[X]$: X^2-2, X^4-10X^2+1, X^2-4X+1 e X^4+4X^2+1.

EXERCÍCIOS

29. Verificar, detalhadamente, as fórmulas (13), (14) e (15).

30. Consideremos os polinômios

$$g = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \quad \text{e} \quad f = X - x$$

pertencentes a $A[X]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade e sejam

$$q = b_0X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \quad \text{e} \quad b_n$$

o quociente e o resto da divisão euclidiana de g por f. Notar que b_n é, necessàriamente, um elemento de A, pois, se $b_n \neq 0$, então $\partial b_n < \partial(X-x) = 1$, logo, $\partial b_n = 0$.

a) Mostrar que $b_n = g(x)$. Concluir que a divisão euclidiana de g por $X-x$ é exata se, e sòmente se, x é raiz de g.

b) Mostrar que $b_0 = a_0$ e $b_i = xb_{i-1} + a_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

c) Demonstrar que se as divisões de g por $X-x$ e de q por $X-y$, com $y \in A$, são exatas, então a divisão de g por $(X-x)(X-y)$ também é exata. Generalizar.

Os cálculos indicados em b) são dispostos do seguinte modo:

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
x		xa_0	xb_1	$\cdots$	xb_{n-1}
	a_0	$xa_0 + a_1 = b_1$	$xb_1 + a_2 = b_2$	$\cdots$	$xb_{n-1} + a_n = b_n$

31. Aplicar o processo do exercício anterior para determinar o valor que $g \in A[X]$ assume em $x \in A$ nos seguintes casos:

a) $g = X^4 - 4X^3 + 5X^2 + 6X - 2$, $A = \mathbf{Z}$ e $x = 3$;

b) $g = 3X^5 + 4X^3 + 6X^2 + 3X + 2$, $A = F_{15}$ e $x = 4$;

c) $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $A = \mathbf{Z} \times F_4$, $x = (1,2)$, $a = (1,0)$, $b = (1,3)$, $c = (2,2)$ e $d = (0,1)$.

32. Os restos das divisões euclidianas de $g \in K[X]$ (K é um corpo) por $X-a$ e por $X-b$, com $a \neq b$, são p e q; determinar o resto da divisão euclidiana de g pelo produto $(X-a)(X-b)$.

33. Mostrar que a divisão euclidiana de

$$g = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \in \mathbf{Q}[X],$$

onde $n \in \mathbf{N}^*$, por $f = (X-1)^2$ é exata. Sugestão: parte c) do exercício 30.

34. Determinar a soma dos coeficientes do polinômio

$$(X^4 - 4X + 2)^{252}(X^4 - 2X + 2)^{250}$$

com coeficientes em $\mathbf{Z}$.

35. Mostrar que os seguintes números complexos são algébricos:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; b) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+i\sqrt{2})^{-1}$; c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

36. Admitindo-se que o número π seja transcendente demonstrar que os números reais $\pi+2$, $\sqrt{2}+2\pi$ e $\pi\sqrt{2}$ também são transcendentes.

37. Mostrar que $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbf{R} \mid a \in \mathbf{Q} \text{ e } b \in \mathbf{Q}\}$.

38. Mostrar que $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in \mathbf{R} \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q} \text{ e } c \in \mathbf{Q}\}$.

39. Com as notações do exercício 100 do Capítulo V, mostrar que todo elemento de $\mathbf{Q}[\varepsilon]$ é da forma $\sum_{i=0}^{n-1} a_i\varepsilon^i$, onde $a_i \in \mathbf{Q}$ para $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

40. Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e seja A_0 um sub-anel unitário de A. Mostrar que valem as seguintes propriedades:

a) se $x \in B$ é algébrico sôbre A_0, então x é algébrico sôbre A;

b) se $x \in B$ é transcendente sôbre A, então x também é transcendente sôbre A_0.

Escolher B, A, A_0 e $x \in B$ de modo que cada uma das seguintes afirmações seja verdadeira:

c) x é algébrico sôbre A e x é transcendente sôbre A_0;

d) x é transcendente sôbre A_0 e sôbre A.

2.2 - FUNÇÕES POLINOMIAIS

Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de B; indicaremos por $F(B)$ o anel das funções de B em B. Com estas notações daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 6 - Chama-se *função polinomial* definida sôbre B e determinada por um polinômio $f \in A[X]$, a aplicação $f_B: B \to B$ definida por $f_B(x) = f(x)$ para todo x em B.

EXEMPLO 13 - Todo polinômio constante $a \in A[X]$ determina uma função constante $a_B: B \to B$ definida por $a_B(x) = a$; em particular, tem-se $0_B = 0 \in F(B)$ e $1_B = 1 \in F(B)$.

Indicaremos por $P_A(B)$ o conjunto de tôdas as funções polinomiais definidas sôbre B e determinadas pelos polinômios pertencentes a $A[X]$; temos $P_A(B) \subset F(B)$ e, em geral, $P_A(B) \neq F(B)$, isto é, nem tôda função de B em B é uma função polinomial (ver o teorema 16).

TEOREMA 10 - $P_A(B)$ é um sub-anel unitário de $F(B)$.

DEMONSTRAÇÃO - Vimos acima que $1_B = 1 \in P_A(B)$. Se f_B e g_B são dois elementos quaisquer de $P_A(B)$, com f e g em $A[X]$, temos, em virtude das fórmulas (13), (14) e (15):

$$(f_B + g_B)(x) = f_B(x) + g_B(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) = (f+g)_B(x),$$

$$(-f_B)(x) = -f_B(x) = -f(x) = (-f)(x) = (-f)_B(x)$$

e

$$(f_B g_B)(x) = f_B(x) g_B(x) = f(x) g(x) = (fg)(x) = (fg)_B(x),$$

para todo x em B, logo, $f_B + g_B$, $-f_B$ e $f_B g_B$ são elementos de $P_A(B)$. ∎

Consideremos agora a aplicação $\varphi: A[X] \to P_A(B)$ definida por $\varphi(f) = f_B$; é imediato que φ é sobrejetora e as fórmulas $(f+g)_B = f_B + g_B$ e $(fg)_B = f_B g_B$ nos mostram que φ é um homomorfismo, portanto, φ é um epimorfismo de $A[X]$ em $P_A(B)$.

Consideraremos, a seguir, o caso em que $B = A$ e usaremos, então, as seguintes notações:

$F(A)$ indicará o anel das funções de A em A;

$P(A) = P_A(A)$ indicará o anel das funções polinomiais sôbre A e determinadas pelos polinômios de $A[X]$;

$F_c(A)$ indicará o sub-anel, de $F(A)$, formado pelas funções constantes.

Temos $F_c(A) \subset P(A) \subset F(A)$,

sendo que $F_c(A)$ é um sub-anel unitário de $P(A)$ e êste, por sua vez, é um sub-anel unitário de $F(A)$. É imediato que $F_c(A)$ coincide com o conjunto das funções polinomiais determinadas pelos polinômios constantes $a \in A$, o que justifica a notação $P_c(A)$ para indicar êste anel. A aplicação $\varphi: A[X] \to P(A)$, definida por $\varphi(f) = f_A$, é um epimorfismo e, além disso, a restrição de φ a A, é um isomorfismo de A em $P_c(A)$.

Na Álgebra Elementar é fundamental o princípio de identidade de polinômios que diz o seguinte: se f e g são dois polinômios em X e com coeficientes reais e se $f(x) = g(x)$ para todo x real (isto é, se f e g são idênticos), então $f = g$, ou seja, os coeficientes de f são ordenadamente iguais aos coeficientes de g. Êste princípio pode ser posto sob a forma mais simples: se f é um polinômio em X e com coeficientes reais e se $f(x) = 0$ para todo x real (isto é, se f é idênticamente nulo), então $f = 0$, ou seja, todos os coeficientes de f são iguais a zero. Com as notações introduzidas acima o princípio de identidade de polinômios pode ser enunciado sob a forma: se f e g são dois polinômios de $\boldsymbol{R}[X]$ e se $f_{\boldsymbol{R}} = g_{\boldsymbol{R}}$, então $f = g$. O correspondente do segundo enunciado é o seguinte: se f é um polinômio de $\boldsymbol{R}[X]$ e se $f_R = 0$, então, $f = 0$. Uma vez demonstrado o princípio de identidade de polinômios resulta que $P(\boldsymbol{R})$ é um anel de integridade, pois, neste caso, os anéis $\boldsymbol{R}[X]$ e $P[\boldsymbol{R}]$ são isomorfos e já sabemos que $\boldsymbol{R}[X]$ é um anel de integridade (corolário 2 do teorema 3). No caso geral que estamos considerando mostraremos que em $P(A)$ nem sempre é verdadeiro o princípio de identidade de polinômios e também que nem sempre $P(A)$ é um anel de integridade.

Daremos, inicialmente, a seguinte

DEFINIÇÃO 7 - Diz-se que o anel $P(A)$ satisfaz o *princípio de identidade de polinômios* se, e sòmente se, é válida a condição: quaisquer que sejam f e g em $A[X]$, se $f_A = g_A$, então $f = g$.

É fácil verificar que $P(A)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios se, e sòmente se, $P(A)$ satisfaz o *princípio dos polinômios idênticamente nulos*: qualquer que seja f em $A[X]$, se $f_A = 0$, então $f = 0$.

É também imediato que $P(A)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios se, e sòmente se, o epimorfismo $\varphi: A[X] \to P(A)$ é um isomorfismo.

Daremos diversos exemplos para mostrar que, em geral, $P(A)$ não satisfaz o princípio de identidade de polinômios e também que $P(A)$ nem sempre é um anel de integridade.

EXEMPLO 14 - Tomemos $A=F_3$ e seja $f=X^3+2X\in F_3[X]$; temos $f(0)=f(1)=f(2)=0$, portanto, $f_A=0$ com $f\neq 0$, isto é, $P(A)$ não satisfaz o princípio de identidade de polinômios. Notemos ainda que $P(A)$ não é um anel de integridade, pois, se $g=X$ e $h=X^2+2$, temos $g_A\neq 0$, $h_A\neq 0$, e $g_Ah_A=(gh)_A=f_A=0$.

Podemos generalizar o exemplo acima do seguinte modo:

EXEMPLO 15 - Seja K um corpo finito e com n elementos $a_1,a_2,\cdots,a_n$ e consideremos o polinômio

$$f=(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)\in K[X];$$

temos $f\neq 0$ e $f(a_i)=0$ para $i=1,2,\cdots,n$, logo, $f_K=0$; portanto, $P(K)$ não satisfaz o princípio de identidade de polinômios. Observemos que $P(K)$ não é um anel de integridade, pois, se

$$g=X-a_1 \quad \text{e} \quad h=(X-a_2)\cdots(X-a_n),$$

temos $g_K\neq 0$, $h_K\neq 0$ e $g_Kh_K=(gh)_K=f_K=0$.

EXEMPLO 16 - Se A é um anel comutativo com elemento unidade e se A não é um anel de integridade, então $P(A)$ também não é um anel de integridade, pois $A\cong P_c(A)$.

EXEMPLO 17 - O exemplo 16 pode ser estendido para um anel comutativo finito $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. Com efeito, o polinômio

$$f=(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)\in A[X]$$

é não nulo e $f_A=0$, logo, $P(A)$ não satisfaz o princípio de identidade de polinômios. Se A é um anel de integridade, então A é um corpo (teorema 8, Capítulo IV) e conforme o exemplo 15, $P(A)$ não é um anel de integridade. Se A não é um anel de integridade, o exemplo anterior nos mostra que $P(A)$ tem divisores próprios do zero.

Dos exemplos acima tiramos as seguintes conclusões:

TEOREMA 11 - a) Se A é um anel comutativo com elemento unidade e se o conjunto A é finito, então $P(A)$ não satisfaz o princípio de identidade de polinômios e $P(A)$ não é um anel de integridade.

b) Se A é um anel comutativo com elemento unidade e se A não é um anel de integridade, então $P(A)$ também não é um anel de integridade.

No que se segue procuraremos caracterizar os anéis A tais que $P(A)$ seja um anel de integridade e para isso demonstraremos, inicialmente, o seguinte

TEOREMA 12 - Se A é um anel de integridade, então todo polinômio não nulo $f\in A[X]$ tem, no máximo, $n=\partial f$ raízes em A.

DEMONSTRAÇÃO - Faremos a demonstração por indução finita sôbre o grau n de f. Se $n=0$ o teorema é imediato; suponhamos que $n>0$ e que o teorema acima seja verdadeiro para todo polinômio não nulo de $A[X]$ e de grau $<n$. Seja $f\in A[X]$, $f\neq 0$, $\partial f=n$ e seja a_n o coeficiente dominante de f; suponhamos, por absurdo, que f tenha $n+1$ raízes distintas $x_0,x_1,\cdots,x_n$ em A e consideremos o polinômio

$$g=f-a_n(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)\in A[X].$$

Temos

$$g(x_0)=-a_n(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n),$$

com $a_n\neq 0$ e $x_0-x_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, logo, $g(x_0)\neq 0$, pois A é um anel de integridade. Portanto, $g\neq 0$ e pela própria definição do polinômio g resulta que $\partial g=m<n$, logo, em virtude da hipótese de indução, g tem no máximo m raízes em A; mas, por outro lado, temos $g(x_i)=0$ para $i=1,2,\cdots,n$, contra o que afirmamos acima. ∎

COROLÁRIO 1 - Se A é um anel de integridade infinito e se f é um polinômio qualquer de $A[X]$ tal que $f_A=0$, então $f=0$.

É uma conseqüência imediata do teorema acima.

COROLÁRIO 2 - Sejam f e g dois polinômios de graus inferiores a n na indeterminada X, com coeficientes num anel de integridade A, e suponhamos que o número de elementos do conjunto A seja estritamente maior do que n; nestas condições, temos:

a) se $f_A=0$, então $f=0$;

b) se $f_A=g_A$, então $f=g$.

Com efeito, a parte a) é uma conseqüência imediata do teorema acima e para verificar b) basta considerar o polinômio $f-g$. ∎

Daremos os seguintes exemplos para mostrar que as hipóteses feitas no teorema 12 são essenciais:

EXEMPLO 18 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja $A=B\times B$ o anel produto do anel B por si mesmo; se $a=(b,0)\in A$, com $b\neq 0$, o polinômio $f=aX$ admite

as raizes $(0,x)$ com $x \in B$. Tomando-se B infinito tem-se um polinômio do primeiro grau que admite infinitas raizes.

EXEMPLO 19 - De um modo geral, seja A um anel comutativo com elemento unidade e suponhamos que A não seja um anel de integridade, logo, existem a e b em A tais que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $ab = 0$. O polinômio $f = aX \in A[X]$ tem grau 1 e tem pelo menos duas raizes distintas: 0 e b.

TEOREMA 13 - Se A é um anel comutativo com elemento unidade, então $P(A)$ é um anel de integridade se, e sòmente se, A é um anel de integridade infinito.

DEMONSTRAÇÃO - Se A é um anel de integridade infinito, então o corolário 1 do teorema 12 nos mostra que $P(A)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios, logo, $A[X] \cong P(A)$; por outro lado, de acôrdo com o corolário 2 do teorema 3, $A[X]$ é um anel de integridade, portanto, $P(A)$ também é um anel de integridade. Recìprocamente, suponhamos que $P(A)$ seja um anel de integridade; conforme o exemplo 16, A é um anel de integridade e o conjunto A não é finito em virtude do exemplo 17. ∎

EXEMPLO 20 - Verifica-se, fàcilmente, que se $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ é o anel produto do anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros por si mesmo, então $P(A)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios e, no entanto, A não é um anel de integridade.

EXERCÍCIOS

41. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e suponhamos que o conjunto A seja finito e tenha q elementos.

a) Determinar o número de funções de A em A.

b) Se $A = F_{12}$, determinar uma função de A em A que não seja uma função polinomial.

42. Mostrar que se $f = aX^2 + bX + c \in A[X]$, onde $A = F_2 \times \mathbf{Z}$ e $a \neq 0$, é tal que $f_A = 0$, então $a = b = (1,0)$ e $c = (0,0)$.

43. Verificar que o anel $P(A)$, onde $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, satisfaz o princípio de identidade de polinômios (exemplo 20).

44. Mostrar que se três polinômios f, g e h, de $\mathbf{R}[X]$, verificam uma das seguintes igualdades:

a) $f^2 + g^2 + h^2 = 0$;

b) $f^2 = X(g^2 - f^2)$;

c) $f^2 + h^2 = Xg^2$,

então $f = g = h = 0$.

2.3 - FUNÇÕES POLINOMIAIS SÔBRE UM CORPO FINITO

Afirmamos na secção anterior que se A é um anel comutativo com elemento unidade tem-se, em geral, $P(A) \neq F(A)$, isto é, nem tôda função de A em A é uma função polinomial. Examinaremos agora em que condições sôbre o anel A tem-se $P(A) = F(A)$; para isso daremos, inicialmente, a fórmula de interpolação de Lagrange que aparece na demonstração do seguinte

TEOREMA 14 - Sejam $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ e $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ duas famílias de elementos de um corpo K e suponhamos que $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ $(0 \leq i, j \leq n)$; nestas condições, existe um único polinômio $f \in K[X]$, de grau $\leq n$, tal que $f(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \cdots, n$.

DEMONSTRAÇÃO - Para cada índice i, com $0 \leq i \leq n$, consideremos o polinômio

$$g_i = \prod_{j \neq i} (X - a_j) \qquad (16);$$

é imediato que $\partial g_i = n$, $g_i(a_p) = 0$ se $p \neq i$ e

$$g_i(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j) = c_i \neq 0.$$

Pondo-se

$$f = \sum_{j=0}^{n} b_j c_j^{-1} g_j \qquad (17),$$

resulta que o polinômio f tem grau $\leq n$ e além disso $f(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \cdots, n$. Se $g \in K[X]$ é tal que $g(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \cdots, n$ e se g tem grau $\leq n$, temos $(f - g)(a_i) = 0$ para $i = 0, 1, \cdots, n$, portanto, em virtude do corolário 2 do teorema 12, teremos $f = g$. ∎

A fórmula (17), onde os g_j são definidos por (16), é conhecida sob o nome de *fórmula de interpolação de Lagrange.*

TEOREMA 15 - Se A é um anel comutativo com elemento unidade, então $P(A) = F(A)$ se, e sòmente se, A é um corpo finito.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que A seja um conjunto finito com n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e que o anel A seja um corpo. Seja h uma função qualquer de A em A e ponhamos $h(a_i) = b_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$; conforme o teorema anterior existe $f \in A[X]$ tal que $f(a_i) = b_i$, logo, $f(a_i) = h(a_i)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$, de onde vem, $f_A = h$ e então $P(A) = F(A)$. Para demonstrar a

recíproca veremos, inicialmente, que se A não é um corpo, então $P(A) \neq F(A)$. Com efeito, existe por hipótese um elemento não nulo $a \in A$, com a não inversível; consideremos, então, a aplicação $h \in F(A)$ definida por $h(0)=1$, $h(a)=1$ e $h(x)=0$ para todo x em A, com $x \neq 0$ e $x \neq a$. Se $h \in P(A)$ existe

$$f = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \in A[X]$$

tal que $f(x)=h(x)$ para todo x em A e como $h(0)=1$ $h(1)=0$ concluímos que $f \neq 0$ e $\partial f \geqslant 1$; por outro lado, temos $b_0 = f(0) = h(0) = 1$ e $f(a)=1$, logo,

$$a \sum_{i=1}^{n} b_i a^{i-1} = 1,$$

e a seria inversível, portanto, $h \notin P(A)$. Fica assim demonstrado que se $P(A)=F(A)$, então A é um corpo e falta sòmente demonstrar que o conjunto A é finito. Ora, se A é infinito, a função $h \in F(A)$ definida por $h(0)=1$ e $h(x)=0$ para todo $x \in A^*$, não pode ser polinomial em virtude do teorema 13. ∎

Seja K um corpo finito e com n elementos; se h é uma função qualquer de K em K existe, conforme o teorema anterior, um polinômio $f \in K[X]$ tal que $f_K = h$. Êste polinômio f não é determinado de modo único, pois, se

$$g = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n),$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são os elementos de K, temos

$$(f+g)_K = f_K + g_K = h+0 = h.$$

No que se segue determinaremos todos os polinômios $f \in K[X]$ tais que $f_K = h$ e para isso basta determinar todos os polinômios $f \in K[X]$ tais que $f_K = 0$. Inicialmente mostraremos que $x^n = x$ para todo elemento x de K. Com efeito, conforme as notações acima temos $K = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ e podemos supor $a_1 = 0$, logo, $K^* = \{a_2, \cdots, a_n\}$ e basta, então, demonstrar que $x^{n-1} = 1$ para todo x em K^*. Ora, temos $xa_i \neq 0$ e $xa_i \neq xa_j$ se $i \neq j$ $(i, j = 2, \cdots, n)$, logo,

$$K^* = \{a_2, \cdots, a_n\} = \{xa_2, \cdots, xa_n\},$$

de onde vem

$$a_2 \cdots a_n = (xa_2)\cdots(xa_n),$$

ou

$$a_2 \cdots a_n = x^{n-1}(a_2 \cdots a_n)$$

e como $a_2 \cdots a_n \neq 0$, teremos $x^{n-1} = 1$. Demonstraremos agora o seguinte

TEOREMA 16 - Seja K um corpo finito e com n elementos e seja f um polinômio de $K[X]$; nestas condições, temos $f_K = 0$ se, e sòmente se, $f = (X^n - X)q$, com $q \in K[X]$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $f = (X^n - X)q$, com $q \in K[X]$, temos, em virtude do que observamos acima:

$$f(x) = (x^n - x)q(x) = 0 \cdot q(x) = 0,$$

para todo x em K, logo, $f_K = 0$. Recìprocamente, suponhamos que $f_K = 0$; de acôrdo com o algoritmo da divisão temos

$$f = (X^n - X)q + r,$$

onde $q \in K[X]$, $r \in K[X]$ e $\partial r < n$ se $r \neq 0$. Desta relação vem $r(x) = 0$ para todo x em K; portanto, de acôrdo com o teorema 12, temos, necessàriamente, $r = 0$ e então $f = (X^n - X)q$. ∎

COROLÁRIO - Seja K um corpo finito e com n elementos; se f e g são dois polinômios em X com coeficientes em K e se $f_K = g_K$, então existe $q \in K[X]$ tal que $f = g + (X^n - X)_q$.

Basta aplicar o teorema anterior ao polinômio $f-g$.

EXERCÍCIOS

45. Determinar um polinômio $f \in F_5[X]$, $f \neq 0$ e $\partial f = 3$, tal que $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=2$ e $f(4)=3$.

46. Determinar uma função de F_{18} em F_{18} que não seja uma função polinomial.

47. Determinar uma função de F_n em F_n, onde $n>1$ e n é composto, que não seja uma função polinomial.

48. Seja $K = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um corpo finito e com n elementos; mostrar que

$$(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n) = X^n - X.$$

Sugestão: teorema 17.

49. Aplicar o exercício anterior para $K = F_p$ e mostrar que $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, para todo número natural primo p.

50. Seja $A = K \times \mathbf{Z}$, onde K é um corpo finito e com n elementos; determinar todos os polinômios $f \in A[X]$ tais que $f_A = 0$.

51. Sejam K e K' dois corpos finitos e seja $A = K \times K'$ o anel produto do corpo K pelo corpo K'; determinar todos os polinômios $f \in A[X]$ tais que $f_A = 0$.

2.4 - ANÉIS DE POLINÔMIOS

Nesta secção daremos mais algumas propriedades dos elementos transcendentes introduzindo, em particular, a noção geral de anel de polinômios que já foi considerada em 2.1.

DEFINIÇÃO 8 - Seja E um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de E. Diz-se que E é

um *anel de polinômios com coeficientes em* A se, e sòmente se, existe um elemento x, de E, transcendente sôbre A, tal que $E = A[x]$. Todo elemento x de E que satisfaz estas condições é denominado *gerador* sôbre A do anel de polinômios E. Os elementos de E são chamados *polinômios em* x *com coeficientes em* A e também diremos que E é um *anel de polinômios em* x *com coeficientes em* A.

EXEMPLO 21 - O anel de polinômios $A[X]$ na indeterminada X também é um anel de polinômios segundo a definição acima.

EXEMPLO 22 - Se E é um anel de polinômios em x e com coeficientes em A, então, para todo $a \in A$, o elemento $x+a$ também é um gerador de E sôbre A. Êste exemplo nos mostra que existe sempre mais de um gerador de E sôbre A (ver o teorema 18).

EXEMPLO 23 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e consideremos o anel de polinômios $B[X]$ na indeterminada X; é imediato que $A[X]$ é um anel de polinômios segundo a definição acima.

TEOREMA 17 - Sejam A e A' dois anéis comutativos com elementos unidades e consideremos os anéis de polinômios $A[X]$ e $A'[Y]$ nas indeterminadas X e Y. Se A e A' são isomorfos, então para todo isomorfismo $\lambda: A \to A'$ existe um único isomorfismo $\bar{\lambda}: A[X] \to A'[Y]$ tal que $\bar{\lambda}(X) = Y$ e $\bar{\lambda}(a) = \lambda(a)$ para todo a em A.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ um elemento qualquer de $A[X]$ e ponhamos

$$\bar{\lambda}(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda(a_i) Y^i;$$

fica assim definida uma aplicação $\bar{\lambda}: A[X] \to A'[Y]$ e é imediato que $\bar{\lambda}(X) = Y$ e $\bar{\lambda}(a) = \lambda(a)$ para todo a em A. Além disso, verifica-se fàcilmente que $\bar{\lambda}$ é um homomorfismo e que a aplicação $\bar{\lambda}$ é bijetora; portanto, $\bar{\lambda}$ é um isomorfismo que satisfaz as condições acima. Finalmente, se $\lambda_1: A[X] \to A'[Y]$ é um isomorfismo e se $\lambda_1(X) = Y$, $\lambda_1(a) = \lambda(a)$ para todo a em A, teremos

$$\lambda_1(f) = \lambda_1\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_1(a_i)(\lambda_1(X))^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda(a_i) Y^i = \bar{\lambda}(f),$$

qualquer que seja f em $A[X]$; portanto, $\lambda_1 = \bar{\lambda}$. ∎

O teorema acima pode ser estendido para um homomorfismo λ de A em A' e os resultados que se obtém estão enunciados no exercício 64.

COROLÁRIO 1 - Se $A[X]$ é o anel de polinômios na indeterminada X e se λ é um automorfismo do anel A, então existe um único automorfismo $\bar{\lambda}$ de $A[X]$ tal que $\bar{\lambda}(X) = X$ e $\bar{\lambda}(a) = \lambda(a)$ para todo a em A.

É um caso particular do teorema 17 quando se escolhe $A' = A$ e, portanto, $Y = X$.

COROLÁRIO 2 - Sejam A e A' dois anéis comutativos com elementos unidades e consideremos os anéis de polinômios $A[x]$ e $A'[y]$ nos elementos transcendentes x e y. Se A e A' são isomorfos, então para todo isomorfismo $\lambda: A \to A'$ existe um único isomorfismo $\varphi: A[x] \to A'[y]$ tal que $\varphi(x) = y$ e $\varphi(a) = \lambda(a)$ para todo a em A.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} A[X] & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & A'[Y] \\ {\scriptstyle \sigma_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_y} \\ A[x] & \xrightarrow{\varphi} & A'[y] \end{array}$$

onde $\bar{\lambda}$ é o isomorfismo definido na demonstração do teorema 17, σ_x é o A-isomorfismo tal que $\sigma_x(X) = x$ (corolário do teorema 8), σ'_y é o A'-isomorfismo tal que $\sigma'_y(Y) = y$ (mesmo corolário) e a aplicação φ é definida por

$$\varphi = \sigma'_y \circ \bar{\lambda} \circ (\sigma_x)^{-1}.$$

Daqui resulta imediatamente que φ é um isomorfismo e é imediato que $\varphi(x) = y$ e $\varphi(a) = \lambda(a)$ para todo a em A. Finalmente, se φ_1 é um isomorfismo de $A[x]$ em $A'[y]$, que satisfaz estas condições temos

$$((\sigma'_y)^{-1} \circ \varphi_1 \circ \sigma_x)(X) = Y$$

e

$$((\sigma'_y)^{-1} \circ \varphi_1 \circ \sigma_x)(a) = \lambda(a),$$

para todo a em A; portanto, $(\sigma'_y)^{-1} \circ \varphi_1 \circ \sigma_x = \varphi$, de onde vem, $\varphi_1 = \sigma'_y \circ \bar{\lambda} \circ (\sigma_x)^{-1} = \varphi$. ∎

COROLÁRIO 3 - Se $A[x]$ e $A[y]$ são dois anéis de polinômios nos elementos transcendentes x e y, então existe um único A-isomorfismo $\varphi: A[x] \to A[y]$ tal que $\varphi(x) = y$.

É uma conseqüência imediata do corolário anterior quando se escolhe λ como a aplicação idêntica de A.

Seja $A[x]$ um anel de polinômios no elemento transcendente x e com coeficientes em A. Se y é um elemento qual-

quer de $A[x]$, então existe um único polinômio $f \in A[X]$ tal que $y = f(x)$. Supondo-se que $y \neq 0$, temos $f \neq 0$ e, neste caso, o grau de f é denominado *grau de y em relação a x* (notação: $\partial_x y$); além disso, o coeficiente dominante de f é chamado *coeficiente dominante de y em relação ao gerador x*. A definição do grau de y depende, em geral, do gerador considerado no caso em que A tenha divisores próprios do zero:

EXEMPLO 24 - Consideremos o anel de polinômios $A[X]$ na indeterminada X e com coeficientes no anel $A = F_{12}$ dos inteiros módulo 12; o polinômio $Y = X + 6X^2$ tem grau 2 em relação a X e tem grau 1 em relação a Y desde que se demonstre que Y é um gerador de $A[X]$. Ora, temos $A[Y] \subset A[X]$ e como $X = Y + 6Y^2$ também temos $A[X] \subset A[Y]$ e então $A[X] = A[Y]$; portanto, só falta demonstrar que Y é transcendente sôbre A. Suponhamos, por absurdo, que Y seja algébrico sôbre A, logo, existe um polinômio não nulo $f \in A[X]$ tal que $f(Y) = 0$ e indiquemos por a_s o primeiro coeficiente não nulo de f, portanto,

$$f = a_s X^s + a_{s+1} X^{s+1} + \cdots + a_n X^n.$$

Notemos agora que $(X + 6X^2)^s = X^s$ se s é par e $(X + 6X^2)^s = X^s + 6X^{s+1}$ se s é ímpar e como $f(Y) = 0$ conclui-se que $a_s = 0$, o que é absurdo. Fica assim demonstrado que Y é transcendente sôbre A.

LEMA 1 - Seja E um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de E. Se f e g são dois elementos quaisquer de $A[X]$, tem-se

$$(f(g))(x) = f(g(x))$$

para todo x em E.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o A-homomorfismo $\sigma_x : A[X] \longrightarrow E$ determinado por x e ponhamos $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, logo,

$$f(g) = \sum_{i=0}^{n} a_i g^i,$$

de onde vem,

$$(f(g))(x) = \sigma_x(f(g)) = \sigma_x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i g^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\sigma_x(g))^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (g(x))^i = f(g(x)). \quad \blacksquare$$

LEMA 2 - Seja A um anel de integridade e consideremos o anel de polinômios $A[X]$. Se $g \in A[X]$ e se $g \notin A$, então, para todo polinômio não nulo $f \in A[X]$, tem-se $f(g) \neq 0$ e $\partial(f(g)) = \partial f \cdot \partial g$; em particular, g é transcendente sôbre A.

DEMONSTRAÇÃO - O lema acima é imediato no caso em que $\partial f = 0$; suponhamos, então, que $\partial f = n > 0$ e que o lema seja verdadeiro para todo polinômio não nulo de $A[X]$ e de grau estritamente menor do que n. O polinômio f é da forma

$$f = f_1 + a_n X^n,$$

onde $a_n \in A^*$, $f_1 \in A[X]$ e f_1 tem grau $\leqslant n-1$. Se $f_1 = 0$, temos $f(g) = a_n g^n \neq 0$ e $\partial(f(g)) = \partial(a_n g^n) = \partial(g^n) = n\,\partial f$ e, neste caso, o lema 2 é verdadeiro. Se $f_1 \neq 0$, a hipótese de indução nos mostra que $f_1(g) \neq 0$ e $\partial(f_1(g)) = \partial f_1 \cdot \partial g < n\,\partial g$; mas $f(g) = f_1(g) + a_n g^n$, onde $\partial(a_n g^n) = n\,\partial g > \partial(f_1(g))$, portanto, em virtude do teorema 2, temos $f(g) \neq 0$ e $\partial(f(g)) = n\,\partial g$. $\blacksquare$

Observemos que o lema acima não é, em geral, verdadeiro caso A tenha divisores próprios do zero:

EXEMPLO 25 - Consideremos os polinômios $g = 2X + 1$ e $f = X^2$ pertencentes a $F_4[X]$; temos $f(g) = (2X+1)^2 = 1$, logo, $\partial(f(g)) = 1 < \partial f$. Para $g = 2X + 2$, temos $f(g) = (2X+2)^2 = 0$. Notemos que ao mesmo tempo fica demonstrado que os polinômios não constantes $2X + 1$ e $2X + 2$ são algébricos sôbre F_4.

TEOREMA 18 - Seja $A[x]$ um anel de polinômios no elemento transcendente x com coeficientes num anel de integridade A e seja y um elemento de $A[x]$; nestas condições, temos:

a) se $y \notin A$, então y é transcendente sôbre A;

b) se $y \notin A$, então y é um gerador de $A[x]$ se, e sòmente se, $\partial_x y = 1$ e o coeficiente dominante de y em relação a x é um elemento inversível do anel A.

DEMONSTRAÇÃO

a) Temos $y = g(x)$, com $g \in A[X]$ e $g \notin A$; se $f \in A[X]$ e se $f \neq 0$, o lema 2 nos mostra que $f(g) \neq 0$ e como x é transcendente sôbre A, teremos $(f(g))(x) \neq 0$, de onde resulta em virtude do lema 1, $f(g(x)) \neq 0$ ou $f(y) \neq 0$ e, portanto, y é transcendente sôbre A.

b) Suponhamos que y seja um gerador de $A[x]$, logo, existe um polinômio não nulo $h \in A[X]$ tal que $x = h(y)$. Por outro lado, o elemento y é da forma $g(x)$, com $g \in A[X]$ e $g \notin A$; portanto, em virtude do lema 1, temos

$$x = h(y) = h(g(x)) = (h(g))(x),$$

de onde resulta $h(g) = X$ e então o lema 2 nos mostra que $\partial h \cdot \partial g = 1$, logo, $h = a + bX$ e $g = c + dX$, com a, b, c e d em A e $b \neq 0$, $d \neq 0$. Daqui concluímos que $\partial_x y = 1$ e como $h(g) = X$,

teremos $bdX+(ad+c)=X$, logo, $bd=1$ e, portanto, o coeficiente dominante de y em relação a x é um elemento inversível em A. Recìprocamente, suponhamos que $y=a+bx$, com a e b em A, $b\neq 0$ e b inversível em A; a parte a) dêste teorema nos mostra que y é transcendente sôbre A e é imediato que $A[y]\subset A[x]$. Por outro lado, temos $x=-ab^{-1}+b^{-1}y$, logo, $x\in A[y]$, de onde vem, $A[x]\subset A[y]$ e então $A[x]=A[y]$; portanto, y é um gerador de $A[x]$ sôbre A. ∎

COROLÁRIO - Seja $A[x]$ um anel de polinômios no elemento transcendente x e com coeficientes num anel de integridade A; nestas condições, para todo gerador y de $A[x]$ e para todo elemento não nulo $z\in A[x]$, temos $\partial_x z=\partial_y z$.

É uma conseqüência imediata do lema 2 e do teorema acima.

Tôdas as noções que tínhamos visto no §1 transportam-se para um anel de polinômios $A[x]$ no elemento transcendente x e com coeficientes num anel de integridade A, pois, conforme já sabemos o anel $A[X]$ é A-isomorfo ao anel $A[x]$ e o corolário acima nos mostra que a noção de grau não depende do gerador x de $A[x]$. Assim, em particular, valem em $A[x]$ os teoremas sôbre a divisão euclidiana (teoremas 4 e 5).

EXERCÍCIOS

52. Determinar todos os geradores do anel de polinômios $F_3[X]$.

53. Determinar o número de geradores do anel $K[X]$, onde K é um corpo finito e com n elementos.

54. Mostrar que se $K(x)$ e $K(y)$ são dois corpos e se x e y são transcendentes sôbre o corpo K, então existe um único K-isomorfismo $\lambda: K(x)\longrightarrow K(y)$ tal que $\lambda(x)=y$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

55. Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de B; consideremos um elemento $g\in B[X]$. Mostrar que se existe $f\in A[X]$, $f\neq 0$, tal que $gf\in A[X]$ e se o coeficiente dominante de f é inversível em A, então $g\in A[X]$.

56. Sejam f e g dois polinômios com coeficientes num corpo K; mostrar que se a divisão euclidiana de $f(X^3)+Xg(X^3)$ por X^2+X+1 é exata, então $f(1)=g(1)=0$.

57. Seja $f\in K[X]$, $f\neq 0$ e $\partial f=n$, onde K é um corpo; mostrar que se $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ é uma família de elementos de K e se $x_i\neq x_j$ para $i\neq j$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$, então existe uma única famíla $(c_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, de elementos de K, tal que

$$f=c_0+c_1(X-x_1)+c_2(X-x_1)(X-x_2)+\cdots+c_n(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n).$$

58. Seja $(f_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ uma família de polinômios de $K[X]$, onde K é um corpo, e suponhamos que $f_i\neq 0$ e $\partial f_i\neq i$. Mostrar que para todo polinômio não nulo $f\in K[X]$, de grau $k\leqslant n$, existe uma única família $(c_j)_{0\leqslant j\leqslant k}$, de elementos de K, tal que $f=\sum_{j=0}^{n} c_j f_j$.

59. Sejam A e B dois anéis comutativos com elementos unidades e consideremos o anel produto $A\times B$ dos anéis A e B; demonstrar que $P(A\times B)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios se, e sòmente se, $P(A)$ e $P(B)$ satisfazem o mesmo princípio.

60. Seja A um anel comutativo com elemento unidade; mostrar que $P(A)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios se, e sòmente se, a aplicação idêntica de A é transcendente sôbre A.

61. Seja K um subcorpo de um corpo E e seja x um elemento de E; demonstrar que x é algébrico sôbre K se, e sòmente se, o sub-anel $K[x]$ é um subcorpo de E.

62. Seja K um subcorpo de um corpo E; mostrar que todo elemento de E é algébrico sôbre K se, e sòmente se, todo sub-anel A de E tal que $K\subset A$ é um subcorpo de E.

63. Consideremos o anel de polinômios $A[X]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade; se f e g são dois elementos quaisquer de $A[X]$ colocaremos, por definição, $f*g=f(g)$ e obtemos dêste modo uma operação $*$ sôbre $A[X]$.

a) Mostrar que a operação $*$ é associativa.

b) Mostrar que $*$ é distributiva à esquerda em relação à adição e em relação à multiplicação, isto é, que $(f+g)*h=f*h+g*h$ e $(fg)*h=(f*h)\cdot(g*h)$, quaisquer que sejam f, g e h em $A[X]$.

c) Se A é um anel de integridade e se $f*g=0$, então $f=0$ ou g é constante.

d) Se A é um corpo e se q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de g por f, onde $g\in A[X]$, $f\in A[X]$ e $f\neq 0$, então, para todo polinômio não constante $u\in A[X]$, $q*u$ e $r*u$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de $g*u$ por $f*u$.

64. Sejam A e A' dois anéis comutativos com elementos unidades, seja λ um homomorfismo de A em A' e consideremos os anéis de polinômios $A[X]$ e $A'[Y]$ nas indeterminadas X e Y.

a) Mostrar que existe um único homomorfismo $\bar{\lambda}: A[X]\to A'[Y]$ tal que $\bar{\lambda}(X)=Y$ e $\bar{\lambda}(a)=\lambda(a)$ para todo a em A.

b) Verificar que $Ker(\bar{\lambda})=(Ker(\lambda))[X]$ e $Im(\bar{\lambda})=(Im(\lambda))[Y]$.

c) Mostrar que $\bar{\lambda}$ é um epimorfismo (resp., monomorfismo) se, e sòmente se, λ é um epimorfismo (resp., monomorfismo).

d) Concluir que $\bar{\lambda}$ é um isomorfismo se, e sòmente se, λ é um isomorfismo.

65. Estender os resultados do exercício anterior para o caso em que $A[x]$ e $A'[y]$ são anéis de polinômios nos elementos transcendentes x e y.

§3 - ANÉIS DE POLINÔMIOS COM DIVERSAS INDETERMINADAS

3.1 - CONSTRUÇÃO DO ANEL DE POLINÔMIOS COM n INDETERMINADAS.

Seja n um número natural não nulo e consideremos o conjunto $\boldsymbol{N}^n$ de tôdas as n-uplas de números naturais, isto é, $\boldsymbol{N}^n$ é o conjunto de tôdas as aplicações do intervalo $[1,n]$ (ver o §2.1, Capítulo II) no conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais. Portanto, um elemento de $\boldsymbol{N}^n$ é uma aplicação $i:[1,n]\longrightarrow \boldsymbol{N}$ e esta aplicação também é indicada pela notação indexada $i=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$, onde $i_r=i(r)$ para $r=1,2,\cdots,n$. No que se segue preferiremos, em geral, indicar um elemento de $\boldsymbol{N}^n$ pela primeira notação.

Se i e j são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{N}^n$ definiremos $i+j$ por $(i+j)(r)=i(r)+j(r)$ para $r=1,2,\cdots,n$; é imediato que $i+j\in\boldsymbol{N}^n$ e é fácil verificar que a operação $(i,j)\mapsto i+j$ define uma estrutura de monóide comutativo sôbre $\boldsymbol{N}^n$ e que todo elemento dêste monóide é regular para a adição. Notemos que o elemento zero dêste monóide é a aplicação nula, ainda indicada por 0, de $[1,n]$ em $\boldsymbol{N}$. Além disso, é importante notar que para todo $k\in\boldsymbol{N}^n$ existe sòmente um número finito de pares ordenados $(i,j)\in\boldsymbol{N}^n\times\boldsymbol{N}^n$ tais que $i+j=k$; efetivamente, o número dêstes pares é $\prod_{r=1}^{n}(k_r+1)$, onde $k_r=k(r)$.

Definiremos uma relação $<$ sôbre $\boldsymbol{N}^n$ do seguinte modo: se i e j são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{N}^n$, com $i\neq j$, então $i<j$ se, e sòmente se, existe um índice $p\in[1,n]$ tal que $i(p)<j(p)$ e $i(r)=j(r)$ para todo $r\in[1,n]$ e $r<p$. É fácil verificar que a relação $<$ é uma ordem estrita total (ver o §2.4 do Capítulo I); portanto, obtém-se, dêste modo, uma ordem total $\leqslant$ sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}^n$, que é denominada *ordem lexicográfica.*

LEMA 3 - A ordem lexicográfica é compatível com a adição definida sôbre $\boldsymbol{N}^n$ e, além disso, é uma boa ordem sôbre $\boldsymbol{N}^n$ (definição 10, Capítulo I); portanto, $(\boldsymbol{N}^n,+,\leqslant)$ é um monóide bem ordenado.

DEMONSTRAÇÃO - É fácil verificar que a ordem lexicográfica é compatível com a adição, logo, só falta mostrar que todo subconjunto não vazio de $\boldsymbol{N}^n$ tem mínimo, o que faremos por indução finita sôbre o número natural não nulo n. Para $n=1$ esta afirmação é verdadeira em virtude do axioma N4 utilizado para definir o conjunto $\boldsymbol{N}$ dos números naturais (§2.1, Capítulo II); suponhamos que $n\leqslant 1$ e que a ordem lexicográfica sôbre $\boldsymbol{N}^n$ seja uma boa ordem e seja A um subconjunto não vazio de $\boldsymbol{N}^{n+1}$. Seja B o subconjunto de $\boldsymbol{N}^n$ definido do seguinte modo: uma n-upla $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ pertence a B se, e sòmente se, existe um número natural i_{n+1} tal que $(i_1,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1})\in A$. É imediato que B é não vazio, logo, conforme a hipótese de indução, existe $(b_1,b_2,\cdots,b_n)=minB$; por outro lado, o conjunto de todos os números naturais j tais que $(i_1,i_2,\cdots,i_n,j)\in A$ é não vazio, portanto, existe o mínimo b_{n+1} dêste conjunto e é evidente que $(b_1,b_2,\cdots,b_n,b_{n+1})=minB$.

Seja A um anel comutativo com elemento unidade e consideremos o conjunto $F(\boldsymbol{N}^n,A)$ de tôdas as aplicações de $\boldsymbol{N}^n$ em A. No que se segue adotaremos a notação indexada para indicar os elementos de $F(\boldsymbol{N}^n,A)$; assim, uma aplicação $f:\boldsymbol{N}^n\longrightarrow A$ será indicada por $f=(a_i)_{i\in\boldsymbol{N}^n}$ ou $f=(a_i)$, onde $a_i=f(i)$ para tôda n-upla $i\in\boldsymbol{N}^n$. Definimos no §2.1 dêste Capítulo a soma de dois elementos quaisquer $f=(a_i)$ e $g=(b_i)$ de $F(\boldsymbol{N}^n,A)$ por meio de $f+g=(c_i)$, onde $c_i=a_i+b_i$. Sabemos que a operação de adição $(f,g)\mapsto f+g$ define uma estrutura de grupo comutativo sôbre $F(\boldsymbol{N}^n,A)$; observemos que o elemento zero dêste grupo é a família nula $0'=(a_i)$, onde $a_i=0$ para tôda n-upla $i\in\boldsymbol{N}^n$.

DEFINIÇÃO 9 - Diz-se que uma família $(a_i)\in F(\boldsymbol{N}^n,A)$ é *quase-nula* se, e sòmente se, $a_i\neq 0$ sòmente para um número finito de n-uplas $i\in\boldsymbol{N}^n$.

EXEMPLO 26 - A família nula $0'$ é quase-nula. Para tôda n-upla $r\in\boldsymbol{N}^n$, a família $M_r=(\delta_{r,i})_{i\in\boldsymbol{N}^n}$, onde $\delta_{r,r}=1\in A$ e $\delta_{r,i}=0\in A$ se $r\neq i$, é quase-nula.

É fácil ver que uma família $(a_i)\in F(\boldsymbol{N}^n,A)$ é quase-nula se, e sòmente se, existe um número natural p tal que $a_i=0$ para tôda n-upla $i=(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in\boldsymbol{N}^n$ tal que $i_1+i_2+\cdots+i_n>p$. Por meio desta propriedade verifica-se, fàcilmente, que o conjunto E de tôdas as famílias quase-nulas pertencentes a $F(\boldsymbol{N}^n,A)$ é fechado em relação à adição e é imediato que esta operação induz uma estrutura de grupo comutativo sôbre E.

DEFINIÇÃO 10 - Chama-se *produto* de duas famílias quaisquer $f=(a_i)$ e $g=(b_j)$, de E, à família $fg=(c_k)$ definida por

$$c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j \tag{18}$$

para tôda n-upla $k\in N^n$.

Conforme tínhamos observado acima, no segundo membro de (18) só temos um número finito de parcelas e, de fato, êste número é igual a $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_n+1)$. Pode-se verificar, fàcilmente, que a família produto $fg=(c_k)$ é quase-nula, logo, $fg\in E$; fica assim definida uma operação de multiplicação $(f,g)\mapsto fg$ sôbre o conjunto E e com processo completamente análogo ao utilizado na demonstração do teorema 1 mostra-se que é válido o seguinte

TEOREMA 19 - As operações de adição e de multiplicação introduzidas acima definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sôbre o conjunto E.

Observemos, simplesmente, que o elemento unidade dêste anel é a família $M_0=1'$ definida no exemplo 26.

Os elementos de E passam a ser denominados *polinômios com coeficientes em* A e também diremos que $(E,+,\cdot)$ é um *anel de polinômios com coeficientes em* A.

Consideremos sôbre o conjunto N^n a ordem lexicográfica $\leqslant$ e seja $f=(a_i)\in E$ um polinômio não nulo; o conjunto $\{i\in N^n \mid a_i\neq 0\}$ é não vazio e finito, portanto, em virtude do lema 3 existe o máximo p (em relação à ordem lexicográfica) dêste conjunto e é imediato que $a_p\neq 0$ e $a_i=0$ para tôda n-upla $i>p$.

DEFINIÇÃO 11 - Chama-se *grandeza* de um polinômio não nulo $f=(a_i)\in E$ à n-upla

$$p=max\{i\in N^n \mid a_i\neq 0\};$$

neste caso, a_p é denominado *coeficiente dominante* do polinômio f.

A grandeza do polinômio não nulo f será indicada por $gd(f)$; portanto, $p=gd(f)$ se, e sòmente se, $a_p\neq 0$ e $a_i=0$ para tôda n-upla $i>p$. Notemos que para $n=1$, tem-se $gd(f)=\partial f$ para todo polinômio não nulo f.

Sejam $f=(a_i)$ e $g=(b_i)$ dois elementos não nulos de E e suponhamos que $f+g=(c_i)\neq 0'$. Se $p=gd(f)\leqslant q=gd(f)$, temos $c_q=a_q+b_q$ e $c_i=0$ para tôda n-upla $i>q$; portanto, $gd(f+g)\leqslant q$. Se $p<q$ teremos $c_q=a_q+b_q=0+b_q=b_q\neq 0$ e $a_i=0$ para tôda n-upla

$i>q$; portanto, $f+g\neq 0'$ e $gd(f+g)=q$. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 20 - Se f e g são dois elementos não nulos de E, temos:

a) se $f+g\neq 0'$, então $gd(f+g)\leqslant max\{gd(f),gd(g)\}$;

b) se $gd(f)\neq gd(g)$, então
$f+g\neq 0'$ e $gd(f+g)=max\{gd(f),gd(g)\}$.

Consideremos agora dois elementos não nulos $f=(a_i)$ e $g=(b_j)$ de E, seja $fg=(c_k)$, onde c_k é determinado por (18) e ponhamos $p=gd(f)$ e $q=gd(g)$; vamos, então determinar o coeficiente c_{p+q} de fg. Para isso, notemos que se $i<p$ e $j\leqslant q$, então $i+j<p+j$ (pois, j é regular em N^n) e $p+j\leqslant p+q$, logo, $i+j<p+q$; anàlogamente, se $i\leqslant p$ e se $j<q$, conclui-se que $i+j<p+q$. Portanto, $c_{p+q}=a_pb_q$ e $c_k=0$ para tôda n-upla $k>p+q$ e daqui resulta que se $fg\neq 0'$, então $gd(fg)\leqslant p+q$; observemos que $gd(fg)<p+q$ se $a_pb_q=0$, o que acontecerá sòmente quando a_p e b_q são divisores próprios do zero em A. Concluímos assim que se a_p ou b_q é regular em A, então $c_{p+q}=a_pb_q\neq 0$, logo, $gd(fg)=gd(f)+gd(g)$. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 21 - Se f e g são dois elementos não nulos de E, temos:

a) se $fg=0'$, então $gd(fg)\leqslant gd(f)+gd(g)$;

b) se o coeficiente dominante de f ou de g é regular, então $fg\neq 0'$ e $gd(fg)=gd(f)+gd(g)$.

A parte b) do teorema acima nos dá, imediatamente, os seguintes corolários:

COROLÁRIO 1 - Se A é um anel de integridade e se f e g são dois polinômios não nulos com coeficientes em A, então $fg\neq 0'$ e $gd(fg)=gd(f)+gd(g)$.

COROLÁRIO 2 - O anel de polinômios E, com coeficientes num anel comutativo A com elemento unidade, é um anel de integridade se, e sòmente se, A é um anel de integridade.

Consideremos o subconjunto A', de E, formado por todos os polinômios (a_i) tais que $a_i=0$ para tôda n-upla $i\neq 0$; é fácil verificar que A' é um sub-anel unitário de E e que a aplicação $a\mapsto(a_i)$, onde $a_0=a$ e $a_i=0$ para $i\neq 0$, é um isomorfismo de A em A'. No que se segue identificaremos o anel

A com o anel A' por meio dêste isomorfismo, isto é, para todo $a \in A$ poremos $a = (a_i)$, onde $a_0 = a$ e $a_i = 0$ para $i \neq 0$; em particular, temos $0 = 0'$ e $1 = 1'$. Portanto, A passa a ser considerado como um sub-anel unitário de E e diremos, então, que todo elemento de A é um *polinômio constante.*

Para cada n-upla $r \in \boldsymbol{N}^n$ consideremos o polinômio $M_r = (\delta_{r,i})_{i \in \boldsymbol{N}^n}$ definido no exemplo 20; afirmamos que

$$M_r M_s = M_{r+s} \tag{19}$$

quaisquer que sejam as n-uplas r e s em $\boldsymbol{N}^n$ Com efeito, pondo-se $M_r M_s = (c_k)$, temos

$$c_k = \sum_{i+j=k} \delta_{r,i} \delta_{s,j} \tag{20}.$$

Supondo-se $k \neq r+s$ e $i+j=k$ temos, necessàriamente, $(i,j) \neq (r,s)$, logo, todos os têrmos do segundo membro de (20) são nulos e então $c_k = 0$. Supondo-se $k = r+s$ e $i+j=k$ temos $\delta_{r,i}\delta_{s,j} = 0$ para todo par (i,j) tal que $i \neq r$ e para $i = r$ temos $j = s$, logo, $\delta_{r,r}\delta_{s,s} = 1$; portanto, $c_{r+s} = 1$. Fica assim demonstrado que $c_k = \delta_{r+s,k}$ para tôda n-upla $k \in \boldsymbol{N}^n$, ou seja, que a fórmula (20) é verdadeira. ∎

Mostraremos, a seguir, que para todo $a \in A$ tem-se

$$aM_r = (a\delta_{r,k})_{k \in \boldsymbol{N}^n} \tag{21}.$$

Com efeito, o elemento a está identificado com o polinômio $(a\delta_{0,i})_{i \in \boldsymbol{N}^n}$ e pondo-se $aM_r = (c_k)$ teremos

$$c_k = \sum_{i+j=k} a\delta_{0,i}\delta_{r,j} = a\delta_{r,k}$$

o que termina a verificação de (21). ∎

Para cada índice $p \in [1,n]$ indicaremos por e_p a n-upla $(i_1, i_2, \cdots i_n) \in \boldsymbol{N}^n$ definida por $i_p = 1$ e $i_q = 0$ se $q \neq p$; é imediato que para tôda n-upla $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in \boldsymbol{N}^n$ tem-se

$$r = r_1 e_1 + r_2 e_2 + \cdots + r_n e_n \tag{22}.$$

Pondo-se $X_p = M_{e_p} = (\delta_{e_p,i})_{i \in \boldsymbol{N}^n}$ teremos em virtude das fórmulas (19) e (22)

$$M_r = X_1^{r_1} X_2^{r_2} \cdots X_n^{r_n}$$

para tôda n-upla $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in \boldsymbol{N}^n$.

Os polinômios $X_1, X_2, \cdots, X_n$ passam a ser denominados *indeterminadas* e cada polinômio

$$M_r = \prod_{i=1}^{n} X_i^{r_i}$$

é denominado *monômio* (precisamente, monômio determinado pela n-upla $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in \boldsymbol{N}^n$).

Seja agora $f = (a_i)_{i \in \boldsymbol{N}^n}$ um elemento qualquer de E, logo, existe um número natural p tal que $a_i = 0$ para tôda n-upla $i = (i_1, \cdots, i_n)$ tal que $i_1 + \cdots + i_n > p$; conforme os resultados estabelecidos acima temos

$$f = \Sigma a_i M_i,$$

onde a somatória está estendida a tôdas as n-uplas $i = (i_1, \cdots, i_n) \in \boldsymbol{N}^n$ tais que $i_1 + \cdots + i_n \leq p$. Esta fórmula pode ser representada por

$$f = \sum_{k=0}^{p} \left(\sum a_{(i_1, \cdots, i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \right) \tag{23}$$

onde a somatória entre os parêntesis está estendida a tôdas as n-uplas $(i_1, \cdots, i_n)$ tais que $i_1 + \cdots + i_n = k$.

Esta é a expressão usual de um polinômio em $X_1, \cdots, X_n$ e com coeficientes em A. Cada polinômio

$$a_{(i_1, \cdots, i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

é chamado *têrmo* do polinômio f e também diremos que $a_{(i_1, \cdots, i_n)}$ é o *coeficiente do têrmo em* $M_i = X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ *em* f. Supondo-se que $f \neq 0$ e que exista um coeficiente não nulo $a_{(i_1, \cdots, i_n)}$, com $i_1 + \cdots + i_n = p$, diremos que $(a_i)_{i_1 + \cdots + i_n \leq p}$ é a *família dos coeficientes do polinômio* f. Observemos ainda que o polinômio f, representado por (23), é nulo se, e sòmente se, $a_{(i_1, \cdots, i_n)} = 0$ para tôda n-upla $(i_1, \cdots, i_n)$ tal que $i_1 + \cdots + i_n \leq p$.

É imediato que o sub-anel de E gerado pelo conjunto

$$A \cup \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

que se indica por $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ (ver o §1.6 do Capítulo IV) coincide com E. Daqui por diante indicaremos o anel de polinômios E pela notação mais sugestiva $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$; cada elemento dêste anel é denominado *polinômio nas indeterminadas* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *com coeficientes em* A e diremos que $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ é o *anel de polinômios nas indeterminadas* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *com coeficientes em* A.

Suponhamos que o polinômio $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, representado em (23), seja não nulo; neste caso, chama-se *grau* (total) de f ao máximo do conjunto $\{i_1 + \cdots + i_n \mid a_{(i_1, \cdots, i_n)} \neq 0\}$. O grau de f será indicado pela notação ∂f; portanto, voltando à fórmula (23), temos $\partial f = p$ se, e sòmente se, existe uma n-upla $(i_1, \cdots, i_n)$ tal que $i_1 + \cdots + i_n = p$ e $a_{(i_1, \cdots, i_n)} \neq 0$. É imediato que se $f = g$ e se $f \neq 0$, então $\partial f = \partial g$. Demonstra-se, fàcilmente, o seguinte (ver a demonstração do teorema 2).

TEOREMA 22 - Sejam f e g dois polinômios não nulos de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$; temos:

a) se $f+g \neq 0$, então $\partial(f+g) \leqslant max\{\partial f, \partial g\}$;

b) se $\partial f \neq \partial g$, então $f+g \neq 0$ e $\partial(f+g) = max\{\partial f, \partial g\}$.

Chama-se *forma* ou *polinômio homogêneo* a todo polinômio $f_k \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ tal que

$$f_k = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} a_{(i_1,\cdots,i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \qquad (24);$$

portanto, uma forma é todo polinômio que é uma «combinação linear» com coeficientes em A de monômios $X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ que têm o mesmo grau $k = i_1 + \cdots + i_n$. Se $f_k \neq 0$ diremos que f_k é um polinômio homogêneo de grau k. Como conseqüência do teorema 22 temos o seguinte: se $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ e se $(g_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ são duas famílias de polinômios homogêneos, com $f_p \neq 0$ e $g_q \neq 0$, tais que

$$\sum_{k=0}^{p} f_k = \sum_{j=0}^{q} g_j,$$

então $p = q$ e $f_k = g_k$ para $k = 0, 1, \cdots, p$.

De acôrdo com as fórmulas (23) e (24) o polinômio f pode ser representado sob a forma

$$f = \sum_{k=0}^{p} f_k$$

e se $f \neq 0$ e $\partial f = p$, então a observação acima nos mostra que os polinômios homogêneos $f_0, f_1, \cdots, f_p$ (com $f_p \neq 0$) são determinados de modo único. Diremos, neste caso, que $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ é a *família das componentes homogêneas do polinômio* f.

Consideremos agora dois polinômios não nulos f e g do anel $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ e suponhamos que $\partial f = p$ e $\partial g = q$, portanto, f e g podem ser representados sob as formas

$$f = \sum_{i=0}^{p} f_i \quad \text{e} \quad g = \sum_{j=0}^{q} g_j,$$

onde f_i e g_j são polinômios homogêneos, f_p e g_q são não nulos e $\partial f_i = i$, $\partial g_j = j$ se $f_i \neq 0$ e $g_j \neq 0$. Destas igualdades resulta

$$fg = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} f_i g_j \right),$$

onde se faz a convenção: $f_i = 0$ se $i > p$ e $g_j = 0$ se $j > q$. Ora, cada produto $f_i g_j$ é um polinômio homogêneo, logo, $h_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j$ também é um polinômio homogêneo e se $h_k \neq 0$ temos $\partial h_k = k$; portanto, se $fg \neq 0$ e se $\partial(fg) = r$, então $(h_k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ é a família das

componentes homogêneas do produto fg. Supondo-se que A seja um anel de integridade, o corolário 2 do teorema 20 nos mostra que $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ também é um anel de integridade; portanto, temos $h_{p+q} = f_p g_q \neq 0$ e então $\partial(fg) = p+q$. Demonstramos acima o seguinte

TEOREMA 23 - Sejam f e g dois polinômios não nulos de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade; temos:

a) se $fg \neq 0$, então $\partial(fg) \leqslant \partial f + \partial g$;

b) se A é um anel de integridade, então $fg \neq 0$ e $\partial(fg) = \partial f + \partial g$.

Seja K um corpo e consideremos o anel de polinômios $K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ nas indeterminadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ e com coeficientes em K; o corolário 2 do teorema 20 nos mostra que êste anel é de integridade, logo, podemos construir o corpo de frações M de $K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ (ver o §2.1, Capítulo IV) e é imediato que o subcorpo, de M, gerado por $K \cup \{X_1, \cdots, X_n\}$ é o próprio M; portanto, podemos indicar M pela notação $K(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Os elementos de $K(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ são denominados *frações racionais nas indeterminadas* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *com coeficientes em* K; $K(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é chamado *corpo de frações racionais nas indeterminadas* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *com coeficientes em* K ou *corpo de frações racionais em* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *sôbre o corpo* K.

EXERCÍCIOS

66. Verificar, detalhadamente, que a relação $<$, definida no início desta secção, é uma ordem estrita e total sôbre o conjunto $\boldsymbol{N}^n$.

67. Mostrar que uma família $f = (a_i) \in F(\boldsymbol{N}^n, A)$ é quase-nula se, e sòmente se, existe um número natural p tal que $a_i = 0$ para tôda n-upla $i = (i_1, \cdots, i_n) \in \boldsymbol{N}^n$ tal que $i_1 + \cdots + i_n > p$.

68. Demonstrar que o produto de duas famílias quase-nulas (de elementos de $F(\boldsymbol{N}^n, A)$) é uma família quase-nula.

69. Demonstrar o teorema 19.

70. Determinar as grandezas dos seguintes polinômios pertencentes a $A[X_1, X_2, X_3, X_4]$:

a) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$;

b) $X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4$,

c) $X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4$;

d) $X_1X_2X_3X_4$.

71. Determinar as grandezas dos seguintes polinômios pertencentes a $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$:

a) $2X_1+3X_2+X_3+X_1^2X_2^2X_3+X_1^3X_2X_3+X_3^4+X_2^3X_3^3$, $n=3$ e $A=\mathbf{Z}$;

b) $(X_1+X_2+X_1X_3+X_2X_3)(X_2+X_3+X_1X_2)$, $n=3$, $A=F_2$;

c) $(X_1+X_2+X_3)^2+(X_1+X_2+2X_3)^2$, $n=4$, $A=F_4$;

d) $(X_1+X_2)^2+(1+X_1+3X_2)^2+X_1^3X_2$, $n=2$, $A=\mathbf{Q}$.

72. Ordenar os polinômios dos exercícios 68 e 69 pela ordem lexicográfica.

73. Determinar os graus dos polinômios dos exercícios 68 e 69.

74. Determinar o número de monômios de grau r do anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$.

75. Determinar o número de monômios, de grau $\leqslant r$, do anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$.

76. Escrever sob a forma (23) os seguintes polinômios pertencentes a $A[X_1,X_2,X_3]$:

a) $(X_1+X_2+X_3)(X_1+wX_2+w^2X_3)(X_1+w^2X_2+wX_3)$, onde $A=\mathbf{C}$ e $w=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$;

b) $\frac{1}{a^2(a^2-b^2)}(X_1^2-a^2)(X_2^2-a^2)(X_3^2-a^2)+$

$$+\frac{1}{b^2(b^2-c^2)}(X_1^2-b^2)(X_2^2-b^2)(X_3^2-c^2)+\frac{1}{a^2b^2}X_1^2X_2^2X_3^2,$$

onde $A=\mathbf{R}$, a, b e c são números reais e $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq\pm b$ e $b\neq\pm c$.

77. Calcular, em $Q(X_1,X_2,X_3)$:

$$\frac{X_1^3(X_2^2-X_3^2)+X_2^3(X_3^2-X_1^2)+X_3^3(X_1^2-X_2^2)}{X_1^2(X_2-X_3)+X_2^2(X_3-X_2)+X_3^2(X_1-X_2)}.$$

78. Se A é um anel de integridade, mostrar que

$$U(A[X_1,X_2,\cdots,X_n])=U(A)$$

(ver o teorema 6 para o significado destas notações).

79. Aplicar o teorema 5 aos polinômios

$g=(X_1^2-X_1+1)X_2^3+(2X_1+3)X_2^2+X_1^3-X_1$ e $f=(X_1-1)X_2^2+(X_1-2)X_2+X_1^2-X_1$

do anel $Q[X_1,X_2]$.

3.2 - ANÉIS DE POLINÔMIOS

Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de B; consideremos o conjunto B^n ($n\in\mathbf{N}^*$) de tôdas as n-uplas de elementos de B e o anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ e com coeficientes em A.

DEFINIÇÃO 12 - Seja

$$f=\sum_{k=0}^{p}\Big(\sum_{i_1+\ldots+i_n=k}a_{(i_1,\ldots,i_n)}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\Big) \tag{25}$$

um polinômio de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ e seja $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ um elemento qualquer de B^n; chama-se *valor que f assume em* $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ou valor de f quando se substitui X_i por x_i ($i=1,2,\cdots,n$) ao elemento

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{k=0}^{p}\Big(\sum_{i_1+\ldots+i_n=k}a_{(i_1,\ldots,i_n)}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\Big) \tag{26}.$$

EXEMPLO 27 - Tomando-se $B=A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ e considerando-se a n-upla $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ temos $f(X_1,X_2,\cdots,X_n)=f$, o que justifica a notação $f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ para indicar um polinômio nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

EXEMPLO 28 - Para cada monômio

$$M_r=X_1^{r_1}X_2^{r_2}\cdots X_n^{r_n}$$

e para tôda n-upla $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B^n$, temos

$$M_r(x)=M_r(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{r_1}x_2^{r_2},\cdots,x_n^{r_n}.$$

Observemos que $M_r(x)$ é elemento do sub-anel $A[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, de B, gerado pelo conjunto $A\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ e daqui resulta imediatamente que o elemento $f(x)$, representado em (26), também pertence a êste sub-anel.

O seguinte teorema é de verificação imediata

TEOREMA 24 - Se f e g são dois polinômios de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ e se $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ é um elemento qualquer de B^n, então valem as seguintes fórmulas

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \tag{27},$$

$$(-f)(x)=-f(x) \tag{28}$$

e

$$(fg)(x)=f(x)g(x) \tag{29}.$$

As fórmulas (27) e (29) nos mostram que a aplicação

$$\sigma_x: A[X_1,X_2,\cdots,X_n]\to B$$

definida por

$$\sigma_x(f)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

é um homomorfismo e como $\sigma_x(a)=a$, para todo a em A, resulta que σ_x é um A-homomorfismo; além disso, é fácil verificar que

$$Im(\sigma_x)=A[x_1,x_2,\cdots,x_n].$$

Finalmente, se λ é um A-homomorfismo de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ em B e se $\lambda(X_i)=x_i$ para $i=1,2,\cdots,n$, então temos

$$\lambda(M_i) = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} = M_i(x)$$

para todo monômio $M_i = X_1^{i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}$, de onde resulta

$$\lambda(f) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sigma_x(f)$$

para todo polinômio $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$; portanto, $\lambda = \sigma_x$. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 25 - Para tôda n-upla $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B^n$ existe um único A-homomorfismo $\sigma_x: A[X_1, X_2, \cdots, X_n] \to B$ tal que $\sigma_x(X_i) = x_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$; além disso, a imagem de σ_x é o sub-anel $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, de B, gerado pelo conjunto $A \cup \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Daremos, a seguir, uma aplicação importante dêste teorema que será utilizada na secção 3.4 para o estudo dos polinômios simétricos. No §1.3 do Capítulo II definimos o grupo simétrico $(S_n, \circ)$ do conjunto $E = \{1, 2, \cdots, n\}$, onde n é um número natural não nulo; lembremos que todo elemento de S_n é uma permutação do conjunto E, que a operação $\circ$, considerada sôbre o conjunto S_n, é a composição de permutações e que o elemento unidade dêste grupo é a permutação idêntica 1 do conjunto E. Cada permutação $\sigma \in S_n$ determina uma n-upla $(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(n)})$ de elementos de $B = A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ e conforme o teorema 25 existe um único A-endomorfismo $\bar{\sigma}: B \to B$ tal que $\bar{\sigma}(X_i) = X_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. É usual indicar por σ o A-endomorfismo $\bar{\sigma}$ e neste caso escreve-se $\sigma \cdot f$ no lugar de $\bar{\sigma}(f)$, portanto, temos

$$\sigma \cdot X_i = X_{\sigma(i)} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\sigma \cdot f = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(n)})$$

e, em particular, $1 \cdot f = f$ para todo polinômio $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$.

EXEMPLO 29 - Considerando-se o polinômio

$$f = X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + 2X_1X_2X_3 + X_1^2X_2^2 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2, X_3]$$

e a permutação $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, temos

$$\sigma \cdot f = f(X_2, X_3, X_1) = X_2^2X_3 + X_2^2X_1 + 2X_2X_3X_1 + X_2^2X_3^2.$$

EXEMPLO 30 - Para tôda permutação $\sigma \in S_4$, se $f = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, temos

$$\sigma \cdot f = X_{\sigma(1)} + X_{\sigma(2)} + X_{\sigma(3)} + X_{\sigma(4)} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = f.$$

EXEMPLO 31 - Para todo monômio

$$M_{(r_1, r_2, \cdots, r_n)} = \prod_{i=1}^{n} X_i^{r_i} \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$$

e para tôda permutação $\sigma \in S_n$, temos

$$\sigma^{-1} \cdot M_{(r_1, \cdots, r_n)} = \prod_{i=1}^{n} X_{\sigma^{-1}(1)}^{r_i} = \prod_{i=1}^{n} X_i^{r_{\sigma(1)}} = M_{(r_{\sigma(1)}, \cdots, r_{\sigma(n)})} \qquad (30).$$

Observemos que se σ e τ são dois elementos quaisquer de S_n, temos

$$(\sigma \circ \tau) \cdot X_i = X_{(\sigma \circ \tau)(i)} = X_{\sigma(\tau(i))} = \sigma \cdot X_{\tau(i)} = \sigma \cdot (\tau \cdot X_i)$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$; portanto, em virtude do teorema 25, teremos

$$(\sigma \circ \tau) \cdot f = \sigma \cdot (\tau \cdot f) \qquad (31)$$

para todo polinômio $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$. Desta fórmula resulta em particular que

$$\sigma^{-1} \cdot (\sigma \cdot f) = f = \sigma \cdot (\sigma^{-1} \cdot f)$$

e daqui se conclui, fàcilmente, que a aplicação $f \mapsto \sigma \cdot f$ é bijetora e diremos, então, que esta aplicação é o *A-automorfismo determinado pela permutação* σ.

De acôrdo com o teorema 25, todo elemento y de $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ é da forma $y = f(x)$, onde $f(x)$ está representado em (26). Parece, então natural dizer que y é um polinômio em $x_1, x_2, \cdots, x_n$ com coeficientes em A; no entanto, esta nomenclatura não deve ser usada no caso geral, pois, o polinômio f não é necessàriamente determinado de modo único. Para ver em que condições podemos considerar certos elementos de B como polinômios com coeficientes em A introduziremos a noção de elementos algèbricamente independentes e o conceito geral de anel de polinômios.

DEFINIÇÃO 13 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de B. Diz-se que uma família $(x_i)_{1 \le i \le n}$, de elementos de B, é *algèbricamente ligada sôbre* A se, e sòmente se, existe um polinômio não nulo $g \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ tal que $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$. Caso contrário, diz-se que a família $(x_i)_{1 \le i \le n}$ é *algèbricamente livre sôbre* A.

EXEMPLO 32 - No anel de polinômios $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, a família $(X_i)_{1 \le i \le n}$ é algébricamente livre sôbre A.

É imediato que se $(x_i)_{1 \le i \le n}$ é algèbricamente livre sôbre A, então os elementos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são distintos dois a dois; além disso, verifica-se que a família $(x_{\sigma(i)})_{1 \le i \le n}$, onde σ é uma permutação qualquer de $E = \{1, 2, \cdots, n\}$, também é algèbricamente livre sôbre A. Por causa disso, diz-se que o conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é algèbricamente livre sôbre A, ou, que os elementos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são *algèbricamente independentes sôbre* A.

Valem observações análogas para uma família algèbricamente ligada cujos elementos sejam distintos dois a dois.

Notemos que os elementos $x_1,x_2,\cdots,x_n$ são algèbricamente independentes sôbre A se, e sòmente se, o A-homomorfismo σ_x, determinado pela n-upla $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B^n$, é um A-monomorfismo. Neste caso, para todo $y\in A[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ existe um único polinômio $f\in A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ tal que $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ e então é legítimo dizer que y é um polinômio em $x_1,x_2,\cdots,x_n$ com coeficientes em A. Precisamente, daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 14 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade e seja A um sub-anel unitário de B. Diz-se que B é um *anel de polinômios sôbre* A se, e sòmente se, existem elementos $x_1,x_2,\cdots,x_n$, de B, algèbricamente independentes sôbre A tais que $B=A[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. Neste caso, diremos que $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ é um *sistema de geradores de* B *sôbre* A e os elementos de B serão denominados *polinômios em* $x_1,x_2,\cdots,x_n$ *com coeficientes em* A; além disso, diremos que B é um *anel de polinômios em* $x_1,x_2,\cdots,x_n$ *com coeficientes em* A.

Esta definição é justificada pelo fato que nas condições acima temos $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]\cong A[x_1,x_2,\cdots,x_n]=B$, ou de modo mais preciso, existe um único A-isomorfismo σ de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ em B tal que $\sigma(X_i)=x_i$ para $i=1,2,\cdots,n$.

EXEMPLO 33 - O anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ também é um anel de polinômios sôbre A segundo a definição acima.

EXEMPLO 34 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e consideremos o anel de polinômios $B[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$; é imediato que o sub-anel $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, de $B[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, é um anel de polinômios segundo a definição acima.

Consideremos novamente o anel de polinômios

$$A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$$

nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ e suponhamos que $n>1$. Diz-se que um polinômio $f\in A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, representado em (25), não depende da indeterminada X_n se, e sòmente se, $a_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}=0$ para tôda n-upla $(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in\mathbf{N}^n$ tal que $i_1+i_2+\cdots+i_n\leq p$ e $i_n\neq 0$. Verifica-se, fàcilmente, que o conjunto de todos os polinômios que não dependem de X_n é o sub-anel $A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$.

Mostraremos que $A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$ é um anel de polinômios em $X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ segundo a definição 13. Com efeito, a partir do monóide $\mathbf{N}^{n-1}$ pode-se construir o anel de polinômios $A[Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n-1}]$ nas indeterminadas $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n-1}$ com coeficientes em A e conforme o teorema 25 a $(n-1)$-upla $(X_1,X_2,\cdots,X_{n-1})$ determina um único A-homomorfismo $\sigma: A[Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n-1}]\to A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ tal que $\sigma(Y_i)=X_i$ para $i=1,2,\cdots,n-1$. Ora, é imediato que σ é injetora e, por outro lado, sabemos que $Im(\sigma)=A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$; portanto, σ é um A-isomorfismo de $A[Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n-1}]$ em $A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$ e daqui resulta que $A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$ é um anel de polinômios em $X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ com coeficientes em A segundo a definição 13. Completaremos êste resultado com o seguinte

TEOREMA 26 - Seja $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n>1)$ com coeficientes em A e seja $S=A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$ o sub-anel, de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, formado por todos os polinômios que não dependem de X_n. Nestas condições, temos:

a) S é um anel de polinômios em $X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ com coeficientes em A;

b) $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]=S[X_n]$ é um anel de polinômios em X_n com coeficientes em S (segundo a definição 7).

Só falta demonstrar a parte b) e para isso basta demonstrar que X_n é transcendente sôbre S. Ora, suponhamos que $g(X_n)=0$, com

$$g=b_0+b_1X+\cdots+b_sX^s\in S[X],$$

logo, cada b_i é um polinômio em $X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ com coeficientes em A; temos

$$b_0(X_1,\cdots,X_{n-1})+b_1(X_1,\cdots,X_{n-1})X_n+\cdots+b_s(X_1,\cdots,X_{n-1})X_n^s=0,$$

relação esta que é verdadeira em $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ e daqui resulta, fàcilmente, que os coeficientes de cada polinômio b_i são iguais a zero, portanto, $g=0$. ∎

COROLÁRIO - Para todo polinômio não nulo $f\in A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ existe uma única família $(f_i)_{0\leq i\leq s}$ de elementos de $A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$ tal que

$$f=f_0+f_1X_n+\cdots+f_sX_n^s,$$

onde $f_s\neq 0$.

É uma conseqüência imediata do fato que $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]=S[X_n]$ é um anel de polinômios em X_n com coeficientes em $S=A[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}]$.

O teorema acima é utilizado na demonstração de propriedades de polinômios com n indeterminadas quando se faz o raciocínio por indução finita sôbre o número n (ver o exercício 86 e o lema 4).

O teorema 26 pode ser estendido para anéis de polinômios segundo a definição 14.

TEOREMA 27 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n>1)$ elementos de B. Nestas condições, B é um anel de polinômios em $x_1, x_2, \cdots, x_n$ com coeficientes em A se, e sòmente se,

a) $S = A[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$ é um anel de polinômios em $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ com coeficientes em A;

b) $B = S[x_n]$ é um anel de polinômios em x_n com coeficientes em S.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que B seja um anel de polinômios em $x_1, x_2, \cdots, x_n$ com coeficientes em A, logo, existe um único A-isomorfismo $\sigma: A[X_1, X_2, \cdots, X_n] \longrightarrow A[x_1, x_2, \cdots, x_n] = B$ tal que $\sigma(X_i) = x_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. É imediato que σ induz um A-isomorfismo de $A[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$ em S; portanto, S é um anel de polinômios em $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ com coeficientes em A e, por outro lado, vale a parte b) em virtude da parte b) do teorema anterior. Recìprocamente, suponhamos que estejam verificadas as condições a) e b) dêste teorema; como $B = S[x_n] = A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ só falta verificar que os elementos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são algèbricamente independentes sôbre A. Supondo-se, por absurdo, que êstes elementos sejam algèbricamente dependentes sôbre A resulta que existe um polinômio não nulo $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ tal que $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ e como $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ são algèbricamente independentes sôbre A concluímos que o polinômio f não pode ser independente da indeterminada X_n. Conforme o corolário do teorema 26, o polinômio f é da forma

$$f = f_0 + f_1 X_n + \cdots + f_s X_n^s,$$

onde $f_i \in A[X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}]$, $f_s \neq 0$ e $s \geqslant 1$, logo, temos

$$f_0(x_1, \cdots, x_{n-1}) + f_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n + \cdots + f_s(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n = 0,$$

onde $f_i(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in S$ $(i = 0, \cdots, s)$; portanto, $f_s(x_1, \cdots, x_{n-1}) = 0$, pois, por hipótese, x_n é transcendente sôbre S. Obtivemos assim uma contradição, pois, $f_s \neq 0$ e $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ são algèbricamente independentes sôbre A. ∎

COROLÁRIO - Se $B = A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ é o anel de polinômios nas indeterminadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ com coeficientes em A e se $S[X]$ é o anel de polinômios na indeterminada X com coeficientes em S, então $S[X] = A[X_1, X_2, \cdots, X_n, X]$ é um anel de polinômios em $X_1, X_2, \cdots, X_n, X$ com coeficientes em A.

Observação - Pode-se demonstrar a seguinte propriedade: se $S = A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ é um anel de polinômios em $x_1, x_2, \cdots, x_n$ com coeficientes em A e se S também é um anel de polinômios em $y_1, y_2, \cdots, y_m$ com coeficientes em A, então $m = n$, ou seja, todos os sistemas de geradores de um anel de polinômios têm o mesmo número de elementos.

EXERCÍCIOS

80. Demonstrar o teorema 24.

81. Seja

$$f = X_1 + 2X_2 + X_3 + X_1^2 X_2 + X_1 X_3 + 2X_1 X_2 X_3 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2, X_3];$$

determinar todos os polinômios $\sigma \cdot f$, onde $\sigma \in S_3$.

82. Seja $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ com coeficientes em A e consideremos o grupo simétrico $(S_n, \circ)$. Definiremos uma relação R sôbre $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ do seguinte modo: se f e g são dois elementos quaisquer dêste anel, então $f R g$ se, e sòmente se, existe $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma \cdot f = g$. a) Demonstrar que R é uma relação de equivalência sôbre $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ - A classe de equivalência módulo R determinada por um polinômio f é chamada órbita de f b) Determinar as órbitas dos seguintes polinômios de $A[X_1, X_2, X_3]$:

1) $X_1 + X_2 + X_3$; 2) $X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_1 X_3$; 3) $X_1 X_2 X_3$;

4) $X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + 3X_1 X_2 + 2X_2 X_3$.

83. Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e consideremos uma família $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, de elementos de B, algèbricamente livre sôbre A. Verificar as seguintes propriedades:

a) Se m é um número natural tal que $1 \leqslant m < n$, então a família $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ é algèbricamente livre sôbre A. Daqui resulta, em particular, que todo elemento x_i é transcendente sôbre A.

b) Para tôda permutação $\sigma \in S_n$, a família $(x_{\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant m}$ é algèbricamente livre sôbre A.

c) Se $i_1, i_2, \cdots, i_r$ são números naturais tais que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$, então a família $(x_{i_p})_{1 \leqslant p \leqslant r}$ é algèbricamente livre sôbre A.

84. Mostrar que se $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ é o anel de polinômios nas indeterminadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$, então $A[X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2]$ é um anel de polinômios segundo a definição 13.

85. Seja $B = A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ um anel de polinômios nos elementos algèbricamente independentes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e com coeficientes em A.

a) Definir grau e grandeza de um elemento não nulo $y \in B$ em relação ao sistema de geradores $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

b) Estabelecer os correspondentes dos teoremas 20, 21 e 22.

c) Considerando-se o anel $A[X_1, X_2] = A[y_1, y_2]$, onde $y_1 = X_1$ e $y_2 = X_2 + X_1^2$, mostrar que $\{y_1, y_2\}$ é algèbricamente livre sôbre A e que as noções definidas em a) dependem do sistema de geradores.

86. Utilizando o teorema 26 dar uma outra demonstração, por indução finita, do corolário 2 do teorema 21.

87. Sejam A e A' dois anéis comutativos com elementos unidades e seja φ um homomorfismo de A em A'; consideremos ainda os anéis de polinômios $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ e $A'[y_1, y_2, \cdots, y_n]$.

a) Mostrar que existe um único homomorfismo

$$\overline{\varphi}: A[x_1, x_2, \cdots, x_n] \to A'[y_1, y_2, \cdots, y_n]$$

tal que $\overline{\varphi}(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ e $\overline{\varphi}(a) = \varphi(a)$ para todo a em A.

b) Mostrar que $\overline{\varphi}$ é um epimorfismo se, e sòmente se, φ é um epimorfismo.

c) Demonstrar que $\overline{\varphi}$ é um isomorfismo se, e sòmente se, φ é um isomorfismo.

3.3 - FUNÇÕES POLINOMIAIS

Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e consideremos o conjunto $\Delta = B^n$ de tôdas as n-uplas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de elementos de B e o anel $F(\Delta, B)$ de tôdas as funções de Δ em B.

DEFINIÇÃO 15 - Chama-se *função polinomial de n variáveis* definida sôbre $\Delta = B^n$ e determinada por um polinômio $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, a aplicação

$$f_\Delta : \Delta \to B$$

definida por

$$f_\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

para tôda n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B^n$.

Indicaremos por $P_A(\Delta)$ o subconjunto de $F(\Delta, B)$ formado por tôdas as funções polinomiais definidas sôbre Δ e determinadas pelos polinômios de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$. Se f_Δ e g_Δ são dois elementos quaisquer de $P_A(\Delta)$, com f e g em $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, as fórmulas (27), (28) e (29) nos mostram que

$$(f+g)_\Delta = f_\Delta + g_\Delta \tag{32},$$

e

$$(-f)_\Delta = -f_\Delta$$

$$(fg)_\Delta = f_\Delta g_\Delta \tag{33};$$

portanto, $P_A(\Delta)$ é um sub-anel unitário de $F(\Delta, B)$. As fórmulas (32) e (33) nos mostram que a aplicação $\varphi: A[X_1, X_2, \cdots, X_n] \to P_A(\Delta)$ definida por $\varphi(f) = f_\Delta$ é um homomorfismo e pela própria definição de $P_A(\Delta)$ resulta que φ é um epimorfismo. De acôrdo com o que vimos no §2.2, φ não é, em geral, um isomorfismo mesmo quando se escolhe $B = A$.

DEFINIÇÃO 16 - Diz-se que o anel $P_A(\Delta)$, com $\Delta = A^n$, *satisfaz o princípio de identidade de polinômios* se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: quaisquer que sejam f e g em $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, se $f_\Delta = g_\Delta$, então $f = g$.

É evidente que $P_A(\Delta)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios se, e sòmente se, o epimorfismo φ é um isomorfismo. Em virtude do que vimos no §2.2 sabemos que, em geral, $P_A(\Delta)$ não é um anel de integridade e que $P_A(\Delta)$ nem sempre satisfaz o princípio de identidade de polinômios. Para ver em que condições $P_A(\Delta)$ é um anel de integridade precisamos da seguinte propriedade preliminar:

LEMA 4 - Seja A um anel de integridade infinito e seja M uma parte infinita do conjunto A; se f é um polinômio não nulo de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, então existe uma n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in M^n$ tal que $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o teorema 12 êste lema é verdadeiro para $n = 1$; suponhamos, então, que $n > 1$ e que o lema seja verdadeiro para $n-1$. Em virtude do corolário do teorema 26 o polinômio f pode ser representado sob a forma

$$f = f_0 + f_1 X_n + \cdots + f_s X^s,$$

onde $f_i \in A[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ $(i = 0, 1, \cdots, s)$ e $f_s \neq 0$. Ora, $A[X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}]$ é um anel de polinômios e f_s é um elemento não nulo dêste anel, logo, de acôrdo com a hipótese de indução, existe $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in M^{n-1}$ tal que $f_s(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \neq 0$ e considerando-se a n-upla $(x_1, \cdots, x_{n-1}, X_n)$, de elementos de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, teremos

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, X_n) = b_0 + b_1 X_n + \cdots + b_s X_n^s,$$

onde $b_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ para $i = 0, 1, \cdots, s$ e $b_s \neq 0$. Portanto, o polinômio

$$g = b_0 + b_1 X + \cdots + b_s X^s \in A[X]$$

é não nulo, logo, conforme o teorema 12, existe $x_n \in M$ tal que $g(x_n) \neq 0$ e notando-se que $g(x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ obteremos a tese do lema acima. ∎

COROLÁRIO - Seja A um anel de integridade infinito; se f é um polinômio qualquer de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ e se $f_\Delta = 0$, então $f = 0$.

TEOREMA 28 - O anel $P_A(\Delta)$, onde $\Delta = A^n$, é de integridade se, e sòmente se, A é um anel de integridade infinito.

DEMONSTRAÇÃO - Se A é um anel de integridade infinito, o corolário acima nos mostra que $P_A(\Delta)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios, logo, $A[X_1,X_2,\cdots,X_n] \cong P_A(\Delta)$; por outro lado, de acôrdo com o corolário 2 do teorema 21, $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ é um anel de integridade, portanto, $P_A(\Delta)$ também o é. Reciprocamente, suponhamos que $P_A(\Delta)$ seja um anel de integridade; conforme o exemplo 16 que pode, evidentemente, ser adaptado para o nosso caso, A é um anel de integridade e o conjunto A não é finito em virtude do exemplo 15. ∎

COROLÁRIO - Se A é um anel de integridade infinito, então $P_A(\Delta)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios e $A[X_1,X_2,\cdots,X_n] \cong P_A(\Delta)$.

EXERCÍCIOS

88. Seja A um anel de integridade infinito e sejam $S_1,S_2,\cdots,S_n$ partes infinitas de A. Mostrar que para todo polinômio não nulo $f \in A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ existem infinitas n-uplas $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ em $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ tais que $f(a_1,a_2,\cdots,a_n) \neq 0$.

89. Utilizando o exercício anterior, mostrar que se A é um anel de integridade infinito, então $A[X_1,X_2,\cdots,X_n] \cong P_A(\Delta)$, onde $\Delta = A^n$.

90. Seja A um anel de integridade infinito e seja $(g_t)_{1\leq t\leq m}$ uma família de polinômios não nulos de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$. Mostrar que se $f \in A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ é tal que $f(a_1,a_2,\cdots,a_n) = 0$, para tôda n-upla $(a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \Delta = 4^n$ tal que $g_i(a_1,a_2\cdots,a_n) \neq 0$ $(i = 1,2,\cdots,m)$, então $f = 0$. Sugestão: Considerar o polinômio $h = fg_1g_2\cdots g_m$.

3.4 - POLINÔMIOS SIMÉTRICOS

Consideremos o anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ com coeficientes no anel comutativo com elemento unidade A e seja $(S_n,\circ)$ o grupo simétrico do conjunto $E = \{1,2,\cdots,n\}$. Conforme vimos na secção 3.2, para tôda permutação $\sigma \in S_n$ existe um único A-automorfismo $f \mapsto \sigma \cdot f$ de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ tal que $\sigma \cdot X_i = X_{\sigma(i)}$ para $i = 1,2,\cdots,n$.

DEFINIÇÃO 17 - Diz-se que um polinômio $f \in A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ é *simétrico* se, e sòmente se, $\sigma \cdot f = f$ para tôda permutação $\sigma \in S_n$.

EXEMPLO 35 - Todo polinômio constante é simétrico.

EXEMPLO 36 - Para $n = 3$ podemos citar os seguintes exemplos de polinômios simétricos:

a) $X_1+X_2+X_3$; b) $X_2X_3+X_3X_1+X_1X_2$; c) $X_1X_2X_3$;
d) $X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_2X_3+X_3X_1+X_1X_2+X_1X_2X_3$.

Indicaremos por $\mathfrak{S}_n(A)$ o conjunto de todos os polinômios simétricos do anel $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$; o exemplo 35 nos mostra que $A \subset \mathfrak{S}_n(A)$ e demostraremos, nesta secção, que $\mathfrak{S}_n(A)$ é um anel de polinômios sôbre A e para isso necessitamos de diversas propriedades preliminares que serão dadas nos lemas abaixo.

LEMA 5 - $\mathfrak{S}_n(A)$ é um sub-anel unitário de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$.

Com efeito, se f e g são elementos de $\mathfrak{S}_n(A)$ e se σ é um elemento qualquer de S_n, temos

$$\sigma \cdot (f+g) = \sigma \cdot f + \sigma \cdot g = f+g,$$
$$\sigma \cdot (-f) = -(\sigma \cdot f) = -f$$

e

$$\sigma \cdot (fg) = (\sigma \cdot f)(\sigma \cdot g) = fg;$$

portanto, $f+g$, $-f$ e fg são elementos de $\mathfrak{S}_n(A)$. ∎

Indicaremos por $M_r = M_{(r_1,r_2,\cdots,r_n)}$ o monômio $X_1^{r_1}X_2^{r_2}\cdots X_n^{r_n}$ determinado pela n-upla $r = (r_1,r_2,\cdots,r_n) \in \mathbf{N}^n$; dêste modo, um polinômio f de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ pode ser representado por

$$f = \sum_{r_1+\cdots+r_n \leq p} a_{(r_1,\cdots,r_n)} M_{(r_1,\cdots,r_n)} \qquad (34).$$

LEMA 6 - O polinômio f é simétrico se, e sòmente se,

$$a_{(r_{\sigma(1)},\cdots,r_{\sigma(n)})} = a_{(r_1,\cdots,r_n)} \qquad (35)$$

para tôda permutação $\sigma \in S_n$ e para tôda n-upla $(r_1,\cdots,r_n) \in \mathbf{N}^n$ tal que $r_1+\cdots+r_n \leq p$.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme a definição de $\sigma^{-1} \cdot f$ e a fórmula (30), temos

$$\sigma^{-1} \cdot f = \sum_{r_1+\cdots+r_n \leq p} a_{(r_1,\cdots,r_n)} M_{(r_{\sigma(1)},\cdots,r_{\sigma(n)})};$$

portanto, $\sigma^{-1} \cdot f = f$ se, e sòmente se, vale a fórmula (35) para tôda n-upla $(r_1,r_2,\cdots,r_n) \in \mathbf{N}^n$ tal que $r_1+r_2+\cdots+r_n \leq p$. Notando-se que o polinômio f é simétrico se, e sòmente se, $\sigma^{-1} \cdot f = f$ para tôda permutação $\sigma \in S_n$ obtém-se, imediatamente, a tese do lema acima. ∎

Para cada índice $i\in[1,n]$ indicaremos por J_i o conjunto de todos os elementos $r=(r_1,r_2,\cdots,r_i)\in N^i$ tais que

$$1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_i\leqslant n;$$

verifica-se, fàcilmente, que o número de elementos do conjunto J_i é o coeficiente binomial $\binom{n}{i}$. Uma vez introduzida esta notação indicaremos por s_i ou $s_{n,1}$ o polinômio

$$\sum_{r\in J_i} X_{r_1}X_{r_2}\cdots X_{r_i} \qquad (36);$$

dêste modo temos, por exemplo,

$$s_1=X_1+X_2+\cdots X_n,$$
$$s_2=X_1X_2+X_1X_3+\cdots+X_1X_n+X_2X_3+\cdots+X_{n-1}X_n,$$
$$s_n=X_1X_2\cdots X_n.$$

Deixaremos a cargo do leitor a verificação do seguinte

LEMA 7 - Se $B[X]$ é o anel de polinômios na indeterminada X e com coeficientes em $B=A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, então, vale a seguinte fórmula

$$\prod_{i=1}^{n}(X-X_i)=X^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i X^{n-i} \qquad (37).$$

Seja σ um elemento qualquer de S_n e consideremos o A-automorfismo $f\mapsto\sigma\cdot f$, de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]=B$, determinado por σ; em virtude do corolário 1 do teorema 17, êste A-automorfismo determina um único automorfismo $\bar{\sigma}$ de $B[X]$ tal que $\bar{\sigma}(X)=X$ e $\bar{\sigma}(b)=\sigma\cdot b$ para todo $b\in B$. Aplicando-se $\bar{\sigma}$ a ambos os membros de (37) resulta

$$\prod_{i=1}^{n}(X-X_{\sigma(i)})=X^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\sigma\cdot s_i)X^{n-i}$$

e como

$$\prod_{i=1}^{n}(X-X_{\sigma(1)})=\prod_{i=1}^{n}(X-X_i)$$

concluímos que $\sigma\cdot s_i=s_i$ para $i=1,2,\cdots,n$; portanto, cada polinômio s_i é simétrico. Os polinômios $s_1,s_2,\cdots,s_n$, são denominados *polinômios simétricos elementares nas indeterminadas* $X_1,X_2,\cdots,X_n$. Notemos agora que podemos afirmar que $A[s_1,s_2,\cdots,s_n]\subset\mathfrak{S}_n(A)$ e o teorema principal desta secção vai nos mostrar que, de fato, vale a igualdade.

LEMA 8 - $gd(s_i)=(1,1,\cdots,\underset{i}{1},0,\cdots,0)$.

É uma conseqüência imediata da definição de grandeza de um polinômio e da definição de s_i dada pela fórmula (36).

LEMA 9 - Para todo monômio

$$M_r=M_{(r_1,r_2,\cdots,r_n)}=X_1^{r_1}X_2^{r_2}\cdots X_n^{r_n},$$

temos

$$gd(M_r(s_1,s_2,\cdots,s_n))=(\sum_{i=1}^{n}r_i,\sum_{i=2}^{n}r_i,\cdots,r_n).$$

Com efeito, de acôrdo com o teorema 21, parte b), e o lema anterior, temos

$$gd(M_r(s_1,s_2,\cdots,s_n))=gd(s_1^{r_1}s_2^{r_2}\cdots s_n^{r_n})=$$
$$=r_1gd(s_1)+r_2dg(s_2)+\cdots+r_ngd(s_n)=$$
$$=r_1(1,0,0,\cdots,0)+r_2(1,1,0,\cdots,0)+\cdots+r_n(1,1,\cdots,1)=$$
$$=(\sum_{i=1}^{n}r_i,\sum_{i=2}^{n}r_1,\cdots,r_n).$$ ∎

LEMA 10 - A aplicação $\lambda: N^n\longrightarrow N^n$ definida por

$$\lambda(r)=gd(M_r(s_1,s_2,\cdots,s_n))$$

é injetora.

Com efeito, se $\lambda(r)=\lambda(t)$, com r e t em N^n, temos, em virtude do lema 9, $r_n=t_n$ e para todo índice i, com $1\leqslant i<n$, teremos

$$\sum_{j=i}^{n}r_j=\sum_{j=i}^{n}t_j \quad\text{e}\quad \sum_{j=i+1}^{n}r_j=\sum_{j=i+1}^{n}t_j;$$

portanto,

$$r_i=\sum_{j=i}^{n}r_j-\sum_{j=i+1}^{n}r_j=\sum_{j=i}^{n}t_j-\sum_{j=i+1}^{n}t_j=t_i.$$ ∎

LEMA 11 - Se $f\in\mathfrak{S}_n(A)$, $f\neq 0$ e se $gd(f)=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$, então $r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_n$.

DEMONSTRAÇÃO - Para cada índice $j\in[1,n]$ com $j<n$ consideremos a permutação $\sigma\in S_n$ definida por

$$\sigma(i)=\begin{cases} j+1 & \text{se } i=j\\ j & \text{se } i=j+1\\ i & \text{se } i\neq j \text{ e } i\neq j+1;\end{cases}$$

de acôrdo com a fórmula (15), temos

$$a_{(r_{\sigma(1)},r_{\sigma(2)},\cdots,r_{\sigma(n)})}=a_{(r_1,r_2,\cdots,r_n)}.$$

Se $(r_{\sigma(1)},r_{\sigma(2)},\cdots,r_{\sigma(n)})\neq(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ temos

$$(r_{\sigma(1)},r_{\sigma(2)},\cdots,r_{\sigma(n)})<(r_1,r_2,\cdots,r_n),$$

pois, $a_{(r_1,r_2,\cdots,r_n)}$ é o coeficiente dominante de f; mas $r_{\sigma(i)}=r_i$ para $i<j$ ou para $i>j+1$, portanto, $r_{\sigma(j)}\neq r_j$ e então $r_{j+1}<r_j$. Se $(r_{\sigma(1)},r_{\sigma(2)},\cdots,r_{\sigma(n)})=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ resulta, fàcilmente, que $r_{j+1}=r_j$. Portanto, para todo índice $j\in[1,n]$, $j\neq n$, temos $r_j\geqslant r_{j+1}$. ∎

TEOREMA 29 - A aplicação

$$\varphi: A[X_1, X_2, \cdots, X_n] \longrightarrow \mathfrak{S}_n(A)$$

definida por

$$\varphi(f) = f(s_1, s_2, \cdots, s_n)$$

é um A-isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO - Já sabemos que φ é um A-epimorfismo de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ em $Im(\varphi) = A[s_1, s_2, \cdots, s_n] \subset \mathfrak{S}_n(A)$, portanto, falta demonstrar as seguintes propriedades: a) $A[s_1, s_2, \cdots, s_n] = \mathfrak{S}_n(A)$ e b) φ é injetora.

a) Suponhamos, por absurdo, que $A[s_1, s_2, \cdots, s_n] \neq \mathfrak{S}_n(A)$ e indiquemos por S o complementar de $A[s_1, s_2, \cdots, s_n]$ em $\mathfrak{S}_n(A)$. De acôrdo com o lema 3 o conjunto

$$\{gd(f) \in \boldsymbol{N}^n \mid f \in S\}$$

tem mínimo $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$, logo, existe um polinômio simétrico

$$f = \sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq p} a_{(i_1, \cdots, i_n)} M_{(i_1, \cdots, i_n)}$$

tal que $f \in A[s_1, s_2, \cdots, s_n]$ e $gd(f) = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$; notemos ainda que todo polinômio não nulo e simétrico de grandeza estritamente menor do que $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ pertente a $A[s_1, s_2, \cdots, s_n]$. Conforme o lema 11, temos $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$, logo, $r_i - r_{i+1} \geq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n-1$ e podemos, então, considerar o polinômio

$$g_1 = a_{(r_1, r_2, \cdots, r_n)} \left(\prod_{i=1}^{n-1} s_i^{r_i - r_{i+1}} \right) s_n^{r_n};$$

de acôrdo com o lema 9, temos

$$gd(g_1) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (r_i - r_{i+1}) + r_n, \sum_{i=2}^{n-1} (r_i - r_{i+1}) + r_n, \cdots, r_n \right) =$$

$$= (r_1, r_2, \cdots, r_n) = gd(f)$$

e é imediato que $a_{(r_1, r_2, \cdots, r_n)}$ é o coeficiente dominante de g_1. Portanto, o polinômio simétrico $g = f - g_1$ é não nulo e $gd(g) < gd(f)$, logo, $g \in A[s_1, s_2, \cdots, s_n]$, de onde vem, $f \in A[s_1, s_2, \cdots, s_n]$, contra a definição do polinômio f.

b) Consideremos um polinômio não nulo

$$g = \sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq p} b_{(i_1, \cdots, i_n)} M_{(i_1, \cdots, i_n)} \in A[X_1, \cdots, X_n]$$

e seja

$$T = \{i = (i_1, \cdots, i_n) \in \boldsymbol{N}^n \mid i_1 + \cdots + i_n \leq p \text{ e } b_{(i_1, \cdots, i_n)} \neq 0\};$$

temos

$$g(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \sum_{i \in T} b_i M_i(s_1, s_2, \cdots, s_n)$$

e conforme o lema 10 tem-se $gd(M_i(s_1, s_2, \cdots, s_n)) \neq gd(M_j(s_1, s_2, \cdots, s_n))$ quaisquer que sejam as n-uplas i e j em T com $i \neq j$. Daqui resulta imediatamente que $g(s_1, s_2, \cdots, s_n) \neq 0$, ou seja, $\varphi(g) \neq 0$ para todo polinômio não nulo g e, portanto, φ é injetora. ∎

COROLÁRIO - Para todo polinômio simétrico $g \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, existe um único polinômio $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ tal que $g = f(s_1, s_2, \cdots, s_n)$.

A demonstração do teorema 29 nos sugere um método para determinar o polinômio f cuja existência é assegurada no corolário ácima; vejamos dois exemplos.

EXEMPLO 37 - Seja

$$g = X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + 2X_1X_2X_3 \in \boldsymbol{Z}[X_1, X_2, X_3];$$

notemos que g é simétrico, que $gd(g) = (2, 1, 0)$ e que o coeficiente dominante de g é 1, portanto, devemos colocar

$$g_1 = g - s_1^{2-1} s_2^{1-0} s_3^0 = g - s_1 s_2 = -X_1X_2X_3 = -s_3,$$

logo, $g = s_1 s_2 - s_3$ e pondo-se $f = X_1X_2 - X_3$ teremos $g = f(s_1, s_2, s_3)$.

EXEMPLO 38 - Seja

$$g = 2X_1^3 + 2X_2^3 + 2X_3^3 - 3X_1X_2 - 3X_1X_3 - 3X_2X_3 \in \boldsymbol{Z}[X_1, X_2, X_3];$$

notemos que g é simétrico, que $gd(g) = (3, 0, 0)$ e que o coeficiente dominante de g é 2, logo, devemos colocar

$$g_1 = g - 2s_1^3 = -6X_1^2X_2 - 6X_1^2X_3 - 6X_1X_2^2 -$$

$$-6X_2^2X_3 - 6X_1X_3^2 - 6X_2X_3^2 - 12X_1X_2X_3 - 3X_1X_2 - 3X_1X_3 - 3X_2X_3.$$

Temos $gd(g_1) = (2, 1, 0)$ e o coeficiente dominante de g_1 é -6, logo, devemos colocar

$$g_2 = g_1 + 6s_1s_2 = 6X_1X_2X_3 - 3X_1X_2 - 3X_1X_3 - 3X_2X_3 = 6s_3 - 3s_2;$$

portanto,

$$g = 2s_1^3 + g_1 = 2s_1^3 - 6s_1s_2 + 6s_3 - 3s_2$$

e pondo-se $f = 2X_1^3 - 6X_1X_2 - 3X_2 + 6X_3$ teremos $g = f(s_1, s_2, s_3)$.

EXERCÍCIOS

91. Verificar a fórmula (37). Sugestão: indução finita sôbre o número natural não nulo n.

92. Quais dos seguintes polinômios de $\boldsymbol{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$:

a) $X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_3^2X_4 + X_4^2X_1$;

b) $(X_2 + X_3 + X_4)(X_3 + X_4 + X_1)(X_4 + X_1 + X_2)(X_1 + X_2 + X_3)$;

c) $(X_1X_2 + X_3X_4)(X_1X_3 + X_2X_4)(X_1X_4 + X_2X_3)$;

d) $(X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_1 - X_4)^2(X_2 - X_3)^2(X_2 - X_4)^2(X_3 - X_4)^2$;

e) $X_1X_2X_3X_4 + X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2X_3^2 + X_1X_2X_4^2$,

são simétricos?

93. Aplicar o processo dado nos exemplos 37 e 38 aos seguintes polinômios de $\mathbf{Z}[X_1, X_2, \cdots, X_n]$:

a) $(X_1-X_2)^2$, $n=2$;

b) $(X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2(X_2-X_3)^2$, $n=3$;

c) $(X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2(X_1-X_4)^2(X_2-X_3)^2(X_2-X_4)^2(X_3-X_4)^2$, $n=4$;

d) $(X_1X_2+X_3X_4)(X_1X_3+X_2X_4)(X_1X_4+X_2X_3)$, $n=4$;

e) $X_1^3+X_2^3+X_3^3$, $n=3$;

f) $(2X_1-X_2-X_3)(2X_2-X_1-X_3)(2X_3-X_1-X_2)$, $n=3$.

94. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e consideremos o anel de polinômios $A[X_1, X_2, \cdots, X_n, X]$ nas indeterminadas $X_1, \cdots, X_n, X$. Mostrar que para tôda n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$, vale a seguinte fórmula

$$\prod_{i=1}^{n}(X-x_i) = X^n + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i s_i(x_1, \cdots, x_n)X^{n-i}.$$

Sugestão: considerar o homomorfismo determinado pela $(n+1)$-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n, X)$ e utilizar a fórmula (37).

95. Em cada um dos casos abaixo determinar um polinômio $f \in A[X]$, $f \neq 0$, f unitário e de grau mínimo, que admita as raízes:

a) 1, 2 e 3, $A = \mathbf{Z}$;

b) 1, w, w^2, $A = \mathbf{C}$ e $w = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$;

c) $1+i$, $1-i$, $3+2i$, $3-2i$, $A = \mathbf{C}$;

d) 1, 1/2, 1/4, 1/8, $A = \mathbf{Q}$.

Sugestão: exercício anterior.

96. As raízes do polinômio $X^3-2X^2+6X-1 \in \mathbf{C}[X]$, em $\mathbf{C}$, são a, b e c; determinar os polinômios unitários e de grau mínimos que tenham para raízes:

a) $a-2$, $b-2$ e $c-2$;

b) $a+b$, $b+c$ e $a+c$;

c) a^2, b^2 e c^2;

d) ab, ac e bc;

e) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0$ e $c \neq 0)$.

Sugestão: exercícios 94 e 95.

97. Com as notações do exercício anterior, determinar: $a^3+b^3+c^3$, $a^4+b^4+c^4$ e $ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §3

98. Seja K um corpo e consideremos o anel de polinômios $K[X, Y]$ nas indeterminadas X e Y; seja

$$f = a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n \in K[X] \subset K[X, Y]$$

e consideremos o polinômio $f(X+Y) \in K[X, Y]$.

a) Mostrar que $f(X+Y) = f+f_1Y+gY^2$, onde $f_1 = \sum_{i=1}^{n} ia_iX^{i-1}$ e $g \in K[X, Y]$. O polinômio f_1 é denominado *derivada de* f e será indicado por Df; a aplicação D é chamada *derivação*.

b) Se f e g são dois elementos quaisquer de $K[X]$, mostrar que $D(f+g) = Df+Dg$ e $D(fg) = Df \cdot g+f \cdot Dg$.

c) Mostrar que $D(f^s) = sf^{s-1}Df$ $(s \in \mathbf{N}^*)$.

d) Demonstrar que $Ker(D)$ é um sub-anel de $K[X]$ e $K \subset Ker(D)$.

e) Verificar que $Ker(D) = K$ se, e sòmente se, K tem característica zero.

f) Supondo-se que a característica de K seja $p>0$, mostrar que $Ker(D) = K[X^p]$.

99. Com as notações do exercício anterior, poremos $D^0f = f$ e $D^if = D(D^{i-1}f)$ para todo $f \in K[X]$ e todo $i \in \mathbf{N}^*$. Supondo-se que o corpo K tenha característica zero, mostrar que (fórmula de Taylor)

$$f(X+Y) = \sum_{i=0}^{n}\frac{D^if}{i!}Y^i.$$

101. Consideremos o anel de polinômios $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ nas indeterminadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ e com coeficientes num anel comutativo A com elemento unidade. Definir o grau de $f \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, $f \neq 0$, em relação à indeterminada X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ e estabelecer os correspondentes dos teoremas 2 e 3. Sugestão: Corolário do teorema 26.

101. Seja A um anel de integridade e seja f um polinômio, de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, de grau $\leqslant k_i$ em relação à indeterminada X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; para cada índice i seja S_i um subconjunto de A com k_i+1 elementos. Mostrar que se $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$ para tôda n-upla

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n,$$

então $f = 0$.

102. Seja K um corpo finito e com q elementos e consideremos o anel de polinômios $K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ e o anel $P_k(\Delta)$ das funções polinomiais definidas sôbre $\Delta = K^n$.

a) Se $f \in K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ é tal que o grau de f em relação a X_i seja $\leqslant q-1$ e se $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$ para tôda n-upla $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n$, então $f = 0$.

b) Demonstrar que todo polinômio $f \in K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ pode ser representado sob a forma

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \cdot (X_i^q - X_i) + g_0,$$

onde $g_i \in K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ e g_0 tem grau $\leqslant q-1$ em relação a cada indeterminada X_i.

c) Demonstrar que se $f \in K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ é tal que $f_\Delta = 0$, então existem polinômios $g_1, \cdots, g_n$ em $K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot (X_i^q - X_i).$$

d) Seja $f \in K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ tal que $f(0,0,\cdots,0) = 0$ e $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$ para tôda n-upla $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0,0,\cdots,0)$, onde $a_i \in K$. Demonstrar que se $g = 1 - f^{q-1}$, então $g(0,0,\cdots,0) = 1$ e $g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$ se

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0,0,\cdots,0).$$

e) Se $g_0 = (1 - X_1^{q-1})(1 - X_1^{q-1}) \cdots (1 - X_n^{q-1})$, demonstrar que $g_{\downarrow} = (g_0)_{\downarrow}$, onde g é o polinômio definido na parte d).

103. Seja A um anel comutativo com elemento unidade; mostrar que $P_A(\downarrow) = F(\downarrow, A)$, onde $\downarrow = A^n$, se e sòmente se A é um corpo finito.

104. Consideremos no anel de polinômios $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ as somas de Newton

$$T_k = T_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k$$

onde k é um número natural; mostrar que valem as seguintes fórmulas

$$T_k - s_1 T_{k-1} + s_2 T_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} s_{k-1} T_1 + (-1)^k s_k T_0 = 0$$

para $k < n$ e

$$T_k - s_1 T_{k-1} + \cdots + (-1)^n s_n T_{k-n} = 0$$

para $k \geqslant n$, onde $s_1, s_2, \cdots, s_n$ são os polinômios simétricos elementares.

105. Consideremos o polinômio $g = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$, com coeficientes num corpo K e suponhamos que existam elementos $x_1 x_2, \cdots, x_n$ em K tais que $g = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$.

a) Se $f \in \Im_n(K)$, mostrar que existe um polinômio $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$ tal que $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e que p só depende de g.

b) Aplicar a parte a) para determinar a soma das quartas potências das raízes complexas do polinômio $f = X^5 - 6X^4 + 3X^3 + 2X^2 - 6X + 5 \in \mathbf{C}[X]$ (admite-se, evidentemente, a existência das raizes complexas de f).

c) Supondo-se que x_1, x_2 e x_3 sejam as raizes complexas do polinômio $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbf{C}[X]$, determinar os polinômios unitários e de graus mínimos que tenham para raizes:

1) $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ e $x_3 + x_1$;

2) $x_1^2 - x_2 x_3$, $x_2^2 - x_3 x_1$ e $x_3^2 - x_1 x_2$;

3) $(x_1 + w x_2 + w^2 x_3)^3$ e $(x_1 + w^2 x_2 + w x_3)^3$, onde $w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

106. Seja $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbf{C}[X]$ e sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números complexos tais que $f = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$. O número complexo

$$D = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2$$

é denominado discriminante do polinômio f.

a) Mostrar que existe $p \in \mathbf{C}[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ tal que $D = p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

b) Calcular o discriminante de f quando $n = 2$, 3 ou 4.

CAPÍTULO VII

ANÉIS FATORIAIS

INTRODUÇÃO

O §1 dêste Capítulo contém as propriedades gerais dos anéis fatoriais. Após estender as noções de elemento irredutível e de elemento redutível, que já foram vistas no anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros (§2, Capítulo III), para um anel de integridade qualquer, daremos na secção 1.2 a definição de anel fatorial que pode ser formulada, abreviadamente, do seguinte modo: é um anel de integridade no qual todo elemento, não nulo e não inversível, pode ser decomposto de um único modo num produto de elementos irredutíveis. O que se entende por unicidade da decomposição está colocado, de modo preciso, pela condição AF2 da definição 5. Ainda no §1.2 obteremos uma primeira caracterização de anel fatorial por intermédio da noção de elemento primo (definição 6 e teorema 6). Nas secções 1.3 e 1.4 estudaremos, de um modo geral, as noções de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum; mostraremos que estas noções são equivalentes (teorema 11) e obteremos duas caracterizações de um anel fatorial (teoremas 8 e 12).

No §2 estudaremos uma classe especial de anéis fatoriais: os anéis euclidianos. Abreviadamente, um anel de integridade A é euclidiano se, e sòmente se, está definido sôbre A um algoritmo da divisão análogo aos algoritmos introduzidos no anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros (teorema 19, Capítulo III) e no anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes num corpo K (corolário do teorema 4, Capítulo VII). Na secção 2.2 completaremos o estudo do anel de polinômios $K[X]$ estabelecendo as propriedades mais importantes da relação de divisibilidade sôbre êste anel. Introduziremos o conceito de corpo algèbricamente fechado (definição 13) e admitiremos o teorema fundamental da Álgebra (teorema 20) com o objetivo de obter uma classificação dos polinômios irre-

dutíveis dos anéis $C[X]$ e $R[X]$; a demonstração do teorema de D'Alembert se encontra no Apêndice dêste Capítulo. Finalmente, no §2.3 aplicaremos os resultados obtidos nas secções 2.1 e 2.2 para estudar a decomposição de uma fração racional como soma de frações racionais simples.

O §3 será, pràticamente, dedicado à demonstração do teorema de Gauss: se A é um anel fatorial, então $A[X]$ também é fatorial. Os diversos resultados auxiliares estabelecidos na secção 3.1 são também importantes para esclarecer a estrutura do anel $A[X]$; destacamos o teorema 24 que determina o conjunto dos polinômios não constantes que são irredutíveis em $A[X]$. Terminaremos o §3 com o critério de irredutibilidade de Eisenstein (teorema 27).

No §4 estudaremos os anéis fatoriais sob o ponto de vista da teoria dos ideais. A demonstração de que a condição das cadeias crescentes (CCC) (definição 22) é equivalente à condição maximal (MAX) (definição 23) utiliza o axioma da escolha; por causa disso completaremos na secção 4.2 o estudo dos conjuntos ordenados introduzindo, explìcitamente, o axioma de Zermelo e demonstrando a equivalência entre os axiomas CCC e MAX. Na secção 4.3 exprimiremos em têrmos de ideais principais as diversas caracterizações dos anéis fatoriais que foram estabelecidas no §1.

No §5 iniciaremos o estudo da teoria dos números algébricos expondo as propriedades mais importantes dos corpos quadráticos (§5.1) e dos anéis quadráticos (§5.2). Mostraremos que todo anel quadrático satisfaz a condição AF1 (teorema 52) e daremos diversos exemplos de anéis quadráticos N-euclidianos (teoremas 53 e 54). Os principais resultados dêste parágrafo são os teoremas 60 e 61; o primeiro teorema estabelece a existência e unicidade da decomposição de um ideal próprio, de um anel quadrático, num produto de ideais maximais e o segundo nos mostra que um anel quadrático é fatorial se, e sòmente se, êle é principal.

§1 - PROPRIEDADES GERAIS DOS ANÉIS FATORIAIS

1.1 - RELAÇÃO DE DIVISIBILIDADE

DEFINIÇÃO 1 - Sejam a e b dois elementos de um anel comutativo A com elemento unidade; diz-se que a é um *divisor* ou *fator* de b se, e sòmente se, existe c em A tal que $b = ac$.

Usaremos a notação $a|b$ para indicar que a é divisor de b e o símbolo $a|b$ deverá ser lido «a divide b» ou «a é divisor de b» ou ainda «b é múltiplo de a»; a negação de $a|b$ será indicada por $a \nmid b$. A relação «a é fator de b», que está sendo indicada pelo símbolo |, é denominada *relação de divisibilidade sôbre* A. Notemos que $a|0$ para todo a em A e que $0|a$ se, e sòmente se, $a = 0$; por causa desta última propriedade costuma-se excluir o caso em que o divisor é nulo, ou seja, considera-se a restrição da relação de divisibilidade ao subconjunto $A^* \times A$ de $A \times A$.

EXEMPLO 1 - Temos $u|1$ se, e sòmente se, u é um elemento inversível do anel A; portanto, o conjunto $U(A)$ dos elementos inversíveis de A pode ser definido por

$$U(A) = \{u \in A \mid u|1\}.$$

EXEMPLO 2 - Quaisquer que sejam a em A e u em $U(A)$, temos $u|a$ e $(au)|a$, pois $a = u(u^{-1}a) = (au)u^{-1}$.

TEOREMA 1 - Quaisquer que sejam os elementos a, b e c de um anel comutativo A com elemento unidade, tem-se

RD1: $a|a$ (propriedade simétrica);

RD2: se $a|b$ e se $b|c$, então $a|c$ (propriedade transitiva);

RD3: se $a|b$ e se $a|c$, então $a|(b \pm c)$;

RD4: se $a|b$, então $(ac)|(bc)$.

DEMONSTRAÇÃO

RD1: Basta notar que $a = a \cdot 1$.

RD2: Por hipótese existem d e d' em A tais que $b = ad$ e $c = bd'$, logo, $c = a(dd')$, de onde vem, $a|c$.

RD3: Por hipótese temos $b = ad$ e $c = ad'$, com d e d' em A, logo, $b \pm c = a(d \pm d')$, de onde vem, $a|(b \pm c)$.

RD4: De $b = ad$ resulta $bc = (ac)d$, logo, $(ac)|(bc)$. ∎

A propriedade RD4 nos mostra que a relação de divisibilidade é compatível com a multiplicação e no caso particular em que A é um anel de integridade ela pode ser completada pelo seguinte

COROLÁRIO - Quaisquer que sejam os elementos a, b e c de um anel de integridade A, com $c \neq 0$, temos $a|b$ se, e sòmente se, $(ac)|(bc)$.

Basta lembrar que vale em A a lei restrita do cancelamento da multiplicação.

TEOREMA 2 - Se a e b são dois elementos quaisquer de um anel de integridade A, temos $a|b$ e $b|a$ se, e sòmente se, existe u em $U(A)$ tal que $b = au$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $a|b$ e $b|a$; se $a=0$ temos, necessariamente, $b=0$, logo, $b=au$ com u arbitrário em $U(A)$; portanto, podemos supor que $a\neq 0$. De $a|b$ vem $b=au$ com $u\in A$, logo, de $b|a$ resulta $(au)|a$ e então o corolário do teorema 1 nos mostra que $u|1$, ou seja, $u\in U(A)$. Reciprocamente, se $b=au$ com $u\in U(A)$, temos $a|b$ e como $a=bu^{-1}$ também teremos $b|a$. ∎

DEFINIÇÃO 2 - Sejam a e b dois elementos quaisquer de um anel de integridade A; diz-se que a *é associado a* b se, e sòmente se, $a|b$ e $b|a$.

Usaremos a notação $a\sim b$ para indicar que a é associado a b; de acôrdo com o teorema 2, temos $a\sim b$ se, e sòmente se, existe $u\in U(A)$ tal que $b=au$. É fácil verificar que a relação $\sim$ é uma equivalência sôbre A e o teorema 2 nos mostra que a classe de equivalência módulo $\sim$, determinada por um elemento a, é o conjunto $\bar{a}=a\cdot U(A)$ de todos os produtos au com $u\in U(A)$; em particular, temos $0=\{0\}$ e $\bar{a}=U(A)$ se, e sòmente se, a é inversível.

EXEMPLO 3 - Para um corpo K temos $U(K)=K^*$, portanto, o conjunto quociente $K/\sim$ é formado pelas classes de equivalência $\{0\}$ e K^*; em outros têrmos, dois elementos não nulos de K são associados. Diz-se, neste caso, que a relação de divisibilidade é trivial.

EXEMPLO 4 - No §2.1 do Capítulo III estudamos a relação de divisibilidade sôbre o anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros; neste caso, temos $U(\mathbf{Z})=\{-1,1\}$, logo, dois números inteiros a e b são associados se, e sòmente se, $a=b$ ou $a=-b$. Portanto, em cada classe de equivalência $a\cdot U(\mathbf{Z})=\{a,-a\}$ pode-se fixar, de modo único, um representante b desta classe impondo-se que b seja positivo, ou seja, que $b=|a|$.

EXEMPLO 5 - Consideremos o anel de polinômios $A[X]$ na indeterminada X e com coeficientes num anel de integridade A; conforme o teorema 6 do Capítulo VI, temos $U(A[X])=U(A)$, logo, dois polinômios não nulos f e g são associados se, e sòmente se, existe $u\in U(A)$ tal que $f=ug$. Daqui resulta que se f e g são não constantes e unitários, então $f\sim g$ se, e sòmente se, $f=g$. Se o anel de integridade A é um corpo K, temos $U(K[X])=K^*$, logo, dois polinômios não nulos f e g, de $K[X]$, são associados se, e sòmente se, f e g diferem por um fator constante não nulo; portanto, em cada classe de equivalência $f\cdot K^*$ $(f\neq 0)$ pode-se fixar, de modo único, um representante g desta classe impondo-se que g seja unitário e temos $g=a^{-1}f$, onde a é o coeficiente dominante de f.

Consideremos o anel de polinômios $A[X]$ na indeterminada X e com coeficientes num anel comutativo A com elemento unidade; daremos, a seguir, um critério para que um binômio $X-a\in A[X]$ seja um divisor de um polinômio f de $A[X]$. De acôrdo com o algoritmo da divisão (teorema 4, Capítulo VI) existem polinômios q e r em $A[X]$ tais que $f=(X-a)q+r$, onde $\partial r<\partial(X-a)=1$ se $r\neq 0$, logo, r é constante e daqui resulta imediatamente que $f(a)=r$, de onde vem, o seguinte

TEOREMA 3 - $(X-a)|f$ se, e sòmente se, $f(a)=0$.

Para todo elemento não nulo a, de um anel de integridade A, colocaremos $D(a)=\{x\in A \mid x|a\}$;
notemos que $D(a)=D(b)$, com $b\in A^*$, se, e sòmente se, $a\sim b$. Em virtude do exemplo 2, temos

$$U(A)\cup aU(A)\subset D(a)$$

para todo $a\in A^*$. Os elementos do conjunto $U(A)\cup aU(A)$ passam a ser denominados *divisores impróprios* de a e qualquer outro divisor de a (caso exista) é chamado *divisor próprio* de a. Portanto, um elemento b, de A, é um divisor próprio de a se, e sòmente se, $b|a$ e b não é inversível e nem é associado ao elemento a; indicando-se por $P(a)$ o conjunto dos divisores próprios de a temos

$$D(a)=U(A)\cup aU(A)\cup P(a) \quad \text{e} \quad (U(A)\cup aU(A))\cap P(a)=\emptyset.$$

Observemos que se a e b são dois elementos quaisquer de A^* e se $a\sim b$, então temos

$$U(A)\cup aU(A)=U(A)\cup bU(A) \quad \text{e} \quad P(a)=P(b).$$

finalmente, se $u\in U(A)$ temos $D(u)=U(A)$, logo, $P(u)=\emptyset$, isto é, um elemento inversível não admite divisores próprios.

DEFINIÇÃO 3 - Diz-se que um elemento a de um anel de integridade A é *irredutível* se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) $a\notin U(A)\cup\{0\}$;

b) $P(a)=\emptyset$, isto é, os únicos divisores de a são os divisores impróprios.

DEFINIÇÃO 4 - Diz-se que um elemento a de um anel de integridade A é *redutível* se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) $a \notin U(A) \cup \{0\}$;

b) $P(a) \neq \emptyset$, isto é a admite pelo menos um divisor próprio.

É importante notar que as definições acima dependem do anel de integridade A e realmente deveríamos dizer «a é irredutível em A» ou «a é redutível em A» (ver os exercícios 13 e 14).

Consideremos um elemento a de um anel de integridade A e suponhamos que $a \notin U(A) \cup \{0\}$; se existirem elementos não inversíveis b e c em A tais que $a = bc$, então a é redutível. Portanto, a é irredutível se, e sòmente se, a igualdade $a = bc$, com b e c em A, implica $b \in U(A)$ ou $c \in U(A)$; na prática, supõe-se que $b \mid a$, com $b \notin U(A)$ e demonstra-se que $a \mid b$.

É imediato que se a e b são dois elementos não nulos e não inversíveis e se $a \sim b$, então a é irredutível (resp., redutível) se, e sòmente se, b é irredutível (resp., redutível). Finalmente, notemos que se a e b são irredutíveis e se $a \mid b$, então $a \sim b$.

Exemplo 6 - No caso de um corpo K temos $U(K) = K^*$; portanto, não existem em K elementos irredutíveis ou redutíveis.

Exemplo 7 - No anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros temos $U(\mathbf{Z}) = \{-1, 1\}$, logo, para todo inteiro não nulo a temos

$$U(\mathbf{Z}) \cup aU(\mathbf{Z}) = \{-1, 1, -a, a\}.$$

Um número inteiro p, com $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$, é irredutível se, e sòmente se, os únicos divisores de p são ± 1 e $\pm p$; portanto, em virtude da definição 7 do Capítulo III, p é irredutível se, e sòmente se, p é primo. Anàlogamente, um inteiro a é redutível se, e sòmente se, a é composto (definição 8, Capítulo III).

No anel de polinômios $A[X]$, com coeficientes num anel de integridade A, existem elementos irredutíveis conforme o seguinte

Teorema 4 - Para todo a em A o binômio $X - a$ é irredutível em $A[X]$.

Demonstração - Se $X - a = fg$, com f e g em $A[X]$, temos $1 = \partial f + \partial g$, logo, $\partial f = 1$ e $\partial g = 0$, ou, $\partial f = 0$ e $\partial g = 1$; no primeiro caso temos $f = bX + c$ e $g \in A$, logo, $(bX + c)g = X - a$, de onde vem, $bg = 1$ e então $g \in U(A) = U(A[X])$. No segundo caso conclui-se que $f \in U(A[X])$. ∎

Teorema 5 - Se p é um elemento irredutível de um anel de integridade A, então p é irredutível em $A[X]$.

Demonstração - Se $p = fg$, com f e g em $A[X]$, temos $\partial f + \partial g = 0$, logo, $\partial f = \partial g = 0$, isto é, f e g são elementos de A; portanto, um dêstes elementos é inversível, pois, por hipótese, p é irredutível em A. ∎

Consideremos o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes num corpo K; como $U(K[X]) = U(K) = K^*$ resulta que um polinômio redutível ou irredutível é, necessàriamente, não constante. Para verificar que um dado polinômio não constante $f \in K[X]$ é redutível basta mostrar que existe um polinômio não constante $g \in K[X]$ tal que $g \mid f$ e $\partial g < \partial f$. Portanto, um polinômio não constante $f \in K[X]$ é irredutível se, e sòmente se, é válida a condição: para todo polinômio não constante $g \in K[X]$, se $g \mid f$, então $\partial g = \partial f$. Finalmente, observemos que todo polinômio do primeiro grau $aX + b \in K[X]$, com $a \neq 0$, é irredutível, pois, $aX + b$ é associado ao polinômio irredutível $X + a^{-1}b$.

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que o corolário do teorema 1 não é verdadeiro no caso em que A tenha divisores próprios do zero.

2. Verificar as seguintes propriedades da relação de divisibilidade sôbre um anel comutativo A com elemento unidade:

a) $a \mid b$ se, e sòmente se, $(-a) \mid b$ ou $a \mid (-b)$, ou ainda, $(-a) \mid (-b)$;

b) se $a \mid b$, então $a \mid (bc)$;

c) se $a \mid b$, e se $a \mid (b + c)$, então $a \mid c$.

3. Mostrar que a relação «a é associado a b», sôbre um anel de integridade A, é uma relação de equivalência.

4. Dar um exemplo para mostrar que a hipótese «A é um anel de integridade», feita no teorema 2, é essencial.

5. Verificar que se a e b são dois elementos não nulos e não inversíveis de um anel de integridade A, então valem as seguintes propriedades:

a) $a \sim b$ se, e sòmente se, $D(a) = D(b)$;

b) se $a \sim b$, então $U(A) \cup aU(A) = U(A) \cup bU(A)$;

c) se $a \sim b$, então $P(a) = P(b)$;

d) se $a \sim b$, então a é irredutível (resp., redutível) se, e sòmente se, b é irredutível (resp., redutível).

6. Verificar as seguintes propriedades da relação de equivalência $\sim$ sôbre um anel de integridade A:

a) se $a \sim b$, então $c \mid a$ se, e sòmente se, $c \mid b$;

b) se $a \sim b$, então $a \mid c$ se, e sòmente se, $b \mid c$;

c) se $a \sim b$ e se $c \sim d$, então $ac \sim bd$;

d) se $a \sim b$ e se $c \sim d$, então em geral, $a + c \sim b + d$ é falso;

e) se $ac \sim bd$ e se $a \sim b$, com $a \neq 0$, então $c \sim d$.

7. Consideremos o sub-anel $\mathbf{Z}[i]$ do corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos; conforme o que vimos no §1.6 do Capítulo IV, sabemos que todo elemento de $\mathbf{Z}[i]$ é da forma $a+bi$ com a e b inteiros. Verificar as seguintes propriedades:

a) $U(\mathbf{Z}[i]) = \{-1, 1, -i, i\}$;

b) o número inteiro 2 é redutível em $\mathbf{Z}[i]$;

c) se a^2+b^2 é um número inteiro primo, então $a+bi$ e $a-bi$ são irredutíveis em $\mathbf{Z}[i]$.

Sugestão: utilizar as propriedades da norma de um número complexo (ver o §3.2 do Capítulo V).

8. Em que condições sôbre o corpo K a relação de divisibilidade sôbre $K[X]$ é anti-simétrica?

9. Mostrar que um polinômio do segundo grau $f = aX^2+bX+c \in K[X]$ $(a \neq 0)$, com coeficientes num corpo K, é redutível se, e sòmente se, existe x em K tal que $f(x) = 0$. Sugestão: teorema 3.

10. Demonstrar que um polinômio do terceiro grau $f = aX^3+bX^2+cX+d \in K[X]$ $(a \neq 0)$, com coeficientes num corpo K, é redutível se, e sòmente se, existe $x \in K$ tal que $f(x) = 0$. O mesmo resultado é verdadeiro para um polinômio de quarto grau? Dar exemplos.

11. Determinar quais dos seguintes polinômios de $K[X]$ são redutíveis ou irredutíveis:

a) X^2+1, $K = F_3$ ou $K = F_5$ ou $K = \mathbf{R}$;

b) X^3+X+2, $K = F_3$ ou $K = F_5$ ou $K = \mathbf{R}$;

c) X^3+X^2+1, $K = F_{13}$;

d) X^4+1, $K = F_5$ ou $K = \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ ou $K = \mathbf{Q}$.

12. Mostrar que o polinômio $X^2-2 \in \mathbf{Q}[X]$ é irredutível sôbre $\mathbf{Q}$ e sôbre $\mathbf{Q}[i]$, mas é redutível sôbre $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$.

13. Mostrar que o polinômio $X^4+1 \in \mathbf{C}[X]$ é irredutível sôbre $\mathbf{Q}$ e sôbre $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$, mas é redutível sôbre $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ e sôbre $\mathbf{Q}[i]$.

14. O número inteiro 2 é irredutível em $\mathbf{Z}$ e é, respectivamente; inversível, redutível e irredutível em $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}[i]$ e $\mathbf{Z}[i\sqrt{6}]$.

1.2 - DEFINIÇÃO DE ANEL FATORIAL

Seja A um anel de integridade e suponhamos que um elemento a de A seja igual a um produto de elementos irredutíveis $p_1, p_2, \cdots, p_s$

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s \qquad (1),$$

onde $p_i \in A$ e $s \geq 1$. Diz-se, neste caso, que (1) é uma decomposição de a em fatôres irredutíveis ou que a está representado como um produto de elementos irredutíveis. Quando $s>1$ esta decomposição não é única, pois podemos obter outras decomposições de a por um dos processos seguintes:

1) se $u_1, u_2, \cdots, u_s$ são elementos inversíveis de A tais que $u_1 u_2 \cdots u_s = 1$ e se $p_i' = u_i p_i$, então $a = p_1' p_2' \cdots p_s'$, onde cada p_i' é irredutível;

2) mudança da ordem dos fatôres irredutíveis em (1).

No que se segue consideraremos estas decomposições como idênticas e teremos assim a noção de unicidade da decomposição de a a menos da ordem dos fatôres irredutíveis e a menos de elementos inversíveis; um anel de integridade que satisfaz estas condições para todo elemento não nulo e não inversível é denominado anel fatorial. Precisamente, daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 5 - Diz-se que um anel de integridade A é um *anel fatorial* se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

AF1: para todo elemento não nulo e não inversível a existem elementos irredutíveis $p_1, p_2, \cdots, p_s$ em A tais que

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s;$$

AF2: quaisquer que sejam as famílias $(p_i)_{1 \leq i \leq s}$ e $(q_j)_{1 \leq j \leq t}$, de elementos irredutíveis de A, se

$$p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t,$$

então $s = t$ e existe uma permutação σ de $[1, s]$ tal que

$$p_i \sim q_{\sigma(i)}$$

para $i = 1, 2, \cdots, s$.

A condição AF2 exprime o fato que a decomposição de a, cuja existência é assegurada pela condição AF1, é única a menos da ordem dos fatôres irredutíveis e a menos de elementos inversíveis. Na prática usaremos a última parte da condição AF2 sob a forma: $s = t$ e com uma notação conveniente tem-se $p_i \sim q_i$ para $i = 1, 2, \cdots, s$.

Conforme o teorema fundamental da Aritmética (§2.5, Capítulo III) o anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é um anel fatorial; veremos mais adiante outros exemplos de anéis fatoriais como o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes num corpo K (§2.2), os anéis euclidianos (§2.1) e os anéis de polinômios com coeficientes num anel fatorial. Convém frizar que o problema da classificação de todos os anéis fatoriais ainda é um problema aberto em Matemática.

Introduziremos, a seguir, a noção de elemento primo com o objetivo de estabelecer uma caracterização de anel fatorial que será enunciada no teorema 6.

DEFINIÇÃO 6 - Diz-se que um elemento p, de um anel de integridade A, é *primo em* A se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

a) $p \notin U(A) \cup \{0\}$;

b) quaisquer que sejam a e b em A, se $p|(ab)$, então $p|a$ ou $p|b$.

É imediato que na verificação da condição b) pode-se supor que a e b não pertençam ao conjunto $U(A) \cup \{0\}$; na prática, supõe-se que $p \nmid a$ e demonstra-se que $p|b$. Verifica-se, por indução finita, que se p é primo e se $p|(a_1 a_2 \cdots a_n)$, com $a_i \in A$ e $n \geq 1$, então p divide pelo menos um dos fatôres a_i. Além disso, é imediato que se p e q são elementos associados, então p é primo se, e sòmente se, q é primo.

LEMA 1 - Todo elemento primo é irredutível.

DEMONSTRAÇÃO - Se p é primo tem-se, por definição, $p \notin U(A) \cup \{0\}$, logo, está satisfeita a condição a) da definição 3. Sejam a e b dois elementos de A e suponhamos que $p = ab$, logo, $p|(ab)$ e como p é primo tem-se $p|a$ ou $p|b$; de $p|a$ ou $(ab)|a$ resulta, em virtude do corolário do teorema 1, $b|1$, portanto, $b \in U(A)$. Anàlogamente, de $p|b$ resulta $a \in U(A)$. ∎

Veremos mais adiante (exercício 20) que não é válida, em geral, a recíproca do lema acima, isto é, existem elementos irredutíveis que não são primos; isto não acontece num anel fatorial conforme o seguinte

TEOREMA 6 - Um anel de integridade A é um anel fatorial se, e sòmente se, A satisfaz a condição AF1 e a seguinte condição

AF3: para todo $p \in A$, se p é irredutível, então p é primo.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que A seja um anel fatorial, logo, por definição, A satisfaz a condição AF1. Seja p um elemento irredutível em A e sejam a e b dois elementos de $A - (U(A) \cup \{0\})$ tais que $p|(ab)$; de acôrdo com AF1 existem elementos irredutíveis $p_1, p_2, \cdots, p_s, q_1, q_2, \cdots, q_t$ tais que

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s \quad \text{e} \quad b = q_1 q_2 \cdots q_t$$

e como $p|(ab)$ resulta que existe c em A tal que

$$pc = p_1 p_2 \cdots p_s q_1 q_2 \cdots q_t \qquad (2).$$

Em virtude da condição AF2, p é associado a um dos fatôres irredutíveis do segundo membro de (2), isto é, existe um índice i ou um índice j, com $1 \leq i \leq s$ e $1 \leq j \leq t$, tal que $p \sim p_i$ ou $p \sim q_j$ de, onde vem, $p|p_i$ ou $p|q_j$, logo, $p|a$ ou $p|b$, portanto, A satisfaz a condição AF3. Recìprocamente, suponhamos que o anel de integridade A satisfaça as condições AF1 e AF3; precisamos, então, demonstrar que AF2 também está satisfeita. Consideremos duas famílias $(p_i)_{1 \leq i \leq s}$ e $(q_j)_{1 \leq j \leq t}$ de elementos irredutíveis de A e suponhamos que

$$p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t \qquad (3);$$

precisamos mostrar que $s = t$ e que $p_i \sim q_i$ para $i = 1, 2, \cdots, s$ (usando-se uma notação conveniente), o que faremos por indução finita sôbre o número natural s. Para $s = 1$, temos $p_1 = q_1 q_2 \cdots q_t$ e como p_1 é irredutível resulta $t = 1$, logo, $p_1 = q_1$; suponhamos, então, que $s > 1$ e que a condição AF2 seja verdadeira para $s - 1$. Da igualdade (3) vem $p_1|(q_1 q_2 \cdots q_t)$ e como p_1 é primo resulta que existe um índice i, com $1 \leq i \leq t$, tal que $p|q_i$; usando-se uma notação conveniente podemos supor que $i = 1$, logo, $p_1|q_1$ e daqui concluímos que $p_1 = u p_1$, onde $u \in U(A)$. Pondo-se $p_2' = u p_2$ e cancelando-se o fator q_1 em (3), temos

$$p_2' p_3 \cdots p_s = q_2 q_3 \cdots q_t,$$

onde os fatôres $p_2', p_3, \cdots, p_s, q_2, q_3, \cdots, q_t$ são irredutíveis, logo, em virtude da hipótese de indução, temos $s - 1 = t - 1$ e, com uma notação conveniente, $p_2' \sim q_2, \cdots, p \sim q_s$; portanto, $s = t$ e $p_i \sim q_i$ para $i = 1, 2, \cdots, s$. ∎

EXERCÍCIOS

15. Demonstrar que se p e q são elementos associados, de um anel de integridade A, então p é primo se, e sòmente se, q é primo.

16. Seja p um elemento primo de um anel de integridade A e suponhamos que $p|(a_1 a_2 \cdots a_n)$, com $a_i \in A$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$; demonstrar que existe um índice i, com $1 \leq i \leq n$, tal que $p|a_i$.

17. Consideremos o sub-anel $\boldsymbol{Z}[i\sqrt{5}]$ do corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos; é imediato que todo elemento dêste sub-anel é da forma $a + bi\sqrt{5}$, com a e b inteiros. Verificar as seguintes propriedades

a) $U(\boldsymbol{Z}[i\sqrt{5}]) = \{-1, 1\}$;

b) os números complexos 3, $2 + i\sqrt{5}$ e $2 - i\sqrt{5}$ são irredutíveis em $\boldsymbol{Z}[i\sqrt{5}]$;

c) 3 não é primo em $\boldsymbol{Z}[i\sqrt{5}]$.

Sugestão: utilizar as propriedades da norma de um número complexo e notar que $3 \cdot 3 = (2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})$.

1.3 - MÁXIMO DIVISOR COMUM

A noção de máximo divisor comum introduzida no anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros (ver a definição 9, Capítulo III) será estendida para um anel de integridade qualquer do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 7 - Sejam a e b dois elementos quaisquer de um anel de integridade A; diz-se que um elemento d, de A, é um *máximo divisor comum* (*mdc*) de a e b se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

D1: $d|a$ e $d|b$;

D2: para todo d' em A, se $d'|a$ e se $d'|b$, então $d'|d$.

É fácil verificar que se d é um *mdc* de a e b, então um elemento $d_1 \in A$ também é um *mdc* de a e b se, e sòmente se, $d_1 \sim d$; portanto, o *mdc* caso (exista) de dois elementos de A não é, em geral, determinado de modo único. Notemos que se $a=b=0$, então $d=0$ é o único *mdc* de a e b; recìprocamente, se um *mdc* de a e b é nulo, então $a=b=0$ em virtude da condição D1. Finalmente, observemos que se um dos elementos a ou b é inversível, então existe um *mdc* de a e b e temos $d \sim 1$ ou seja $d \in U(A)$.

A definição de *mdc* pode ser estendida para uma família $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} (n \geqslant 1)$ de elementos de A (ver os exercícios 18, 19 e 20).

Conforme veremos mais adiante (teorema 9) nem sempre existe um *mdc* de dois elementos quaisquer de um anel de integridade arbitrário; destacaremos, então, os anéis de integridade que admitem *mdc* pela

DEFINIÇÃO 8 - Diz-se que um anel de integridade A é um *anel com máximo divisor comum* se, e sòmente se, é válida a seguinte condição

AF4: dois elementos quaisquer de A admitem um *mdc* em A.

EXEMPLO 8 - Em virtude do teorema 22 do Capítulo III, o anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros é um anel com máximo divisor comum.

LEMA 2 - Todo anel fatorial A é um anel com *mdc*.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam a e b dois elementos quaisquer de A; podemos, evidentemente, supor que

$$a \notin U(A) \cup \{0\} \quad \text{e} \quad b \notin U(A) \cup \{0\},$$

portanto, conforme a condição AF1 existem elementos irredutíveis $q_1, q_2, \cdots, q_s$ e $q_1', q_2', \cdots, q_t'$ tais que

$$a = q_1 q_2 \cdots q_s \quad \text{e} \quad b = q_1' q_2' \cdots q_t'.$$

Consideremos, então, o conjunto

$$\{\overline{q}_1, \overline{q}_2, \cdots, \overline{q}_s, \overline{q_1'}, \overline{q_2'}, \cdots, \overline{q_t'}\}$$

onde $\overline{q}_i = q_i U(A)$ $(i=1,2,\cdots,s)$ e $\overline{q_j'} = q_j' U(A)$ $(j=1,2,\cdots,t)$; indiquemos por r o número de elementos dêste conjunto e ponhamos

$$\{\overline{q}_1, \overline{q}_2, \cdots, \overline{q}_s, \overline{q_1'}, \overline{q_2'}, \cdots, \overline{q_t'}\} = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \cdots, \overline{p}_r\}.$$

Cada elemento p_i é irredutível e se $i \neq j$ $(1 \leqslant i,j \leqslant r)$ então p_i não é associado a p_j; além disso, cada elemento q_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ ou q_j' $(1 \leqslant j \leqslant t)$ é associado a um e sòmente um fator irredutível p_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Portanto, os elementos a e b podem ser representados sob a forma

$$a = u p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \quad \text{e} \quad b = v p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} \qquad (4),$$

onde cada α_i ou β_i é um número natural e u e v são elementos inversíveis de A. Observemos que, com estas notações, temos $a|b$ se, e sòmente se, $\alpha_i \leqslant \beta_i$ para $i=1,2,\cdots,r$.

Ponhamos $\delta_i = min\{\alpha_i, \beta_i\}$ $(i=1,2,\cdots,r)$ e consideremos o elemento

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_r^{\delta_r};$$

afirmamos que d é um *mdc* de a e b e para isso precisamos verificar as condições D1 e D2 da definição 7.

D1. Temos $\delta_i \leqslant \alpha_i$ e $\delta_i \leqslant \beta_i$ para $i=1,2,\cdots,r$, logo, $d|a$ e $d|b$.

D2. Seja $d' \in A$ um divisor comum de a e b; se $d' \in U(A)$ temos $d'|d$, logo, podemos supor que $d' \notin U(A)$; portanto, em virtude da condição AF1, existem elementos irredutíveis $q_1'', q_2'', \cdots, q_n''$ em A tais que

$$d' = q_1'' q_2'' \cdots q_n''.$$

Como $d'|a$ e $d'|b$ resulta que cada fator q_i'' é associado a um, e sòmente um, fator irredutível p_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, logo, d' pode ser representado sob a forma

$$d' = w p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_r^{r_r},$$

onde w é inversível e cada r_k é um número natural; de $d'|a$ e $d'|b$ resulta $r_k \leqslant \alpha_k$ e $r_k \leqslant \beta_k$, logo, $r_k \leqslant min\{\alpha_k, \beta_k\} = \delta_k$ para $k=1,2,\cdots,r$ e então $d'|d$. ∎

O lema acima nos mostra que todo anel fatorial satisfaz as condições AF1 e AF4; mostraremos a seguir que todo anel de integridade que satisfaz estas condições é um anel fatorial e para chegarmos a êste resultado introduziremos a noção de elementos primos entre si e daremos duas propriedades preliminares de um anel com *mdc*.

DEFINIÇÃO 9 - Sejam a e b dois elementos de um anel de integridade A e suponhamos que exista, em A, um *mdc* d de a e b; diz-se que a é *primo com* b se, e sòmente se, $d \sim 1$.

É imediato que se a é primo com b, então b é primo com a; por causa disso diremos que a e b são *primos entre si* ou que a e b *são relativamente primos*. A definição acima pode ser estendida para n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de A e diremos, então, que êstes elementos são *primos entre si* ou *relativamente primos*.

LEMA 3 - Sejam a e p dois elementos de um anel A com *mdc*; se p é irredutível e se $p \nmid a$, então, a e p são primos entre si.

Com efeito, seja d um *mdc* de a e p; de $d \mid p$ resulta $d \sim 1$ ou $d \sim p$ e não é válido o segundo caso, pois, por hipótese, $d \mid a$ e $p \nmid a$. ∎

TEOREMA 7 - Sejam a e b dois elementos quaisquer de um anel A com *mdc* e seja d um *mdc* de a e b; nestas condições, para todo c em A, o elemento cd é um *mdc* de ac e bc.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos, evidentemente, supor que a, b e c não sejam nulos; como A é um anel com *mdc* existe $e \in A$ que é um *mdc* de ac e bc e precisamos demonstrar que $e \sim cd$. Ora, temos $d \mid a$ e $d \mid b$, logo, $(cd) \mid (ac)$ e $(cd) \mid (bc)$; portanto, em virtude da condição D2, teremos $(cd) \mid e$ e então existe $u \in A$ tal que $e = cdu$. Por outro lado, temos $e \mid (ac)$ e $e \mid (bc)$, logo, $(cdu) \mid (ac)$ e $(cdu \mid bc)$, de onde resulta em virtude do corolário do teorema 1, $(du) \mid a$ e $(du) \mid b$; portanto, $(du) \mid d$ e então $e \mid (cd)$ e fica assim demonstrado que $e \sim cd$. ∎

TEOREMA 8 - Sejam a, b e c elementos de um anel A com *mdc*; se $a \mid (bc)$ e se a é primo com b, então $a \mid c$.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese, 1 é um *mdc* de a e b, logo, em virtude do teorema anterior, c é um *mdc* de ac e bc; por outro lado, $a \mid (ac)$ e $a \mid (bc)$; portanto, conforme a condição D2, temos $a \mid c$. ∎

TEOREMA 9 - Um anel de integridade A é um anel fatorial se, e sòmente se, A satisfaz as condições AF1 e AF4.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o lema 2 todo anel fatorial satisfaz a condição AF4. Recìprocamente, suponhamos que o anel de integridade A satisfaça as condições AF1 e AF4; mostraremos, então, que A satisfaz AF3 e daqui resultará, em virtude do teorema 6, que A é um anel fatorial. Seja p um elemento irredutível em A e suponhamos que $p \mid (ab)$ e $p \nmid a$, com a e b em A; conforme o lema 3, a e p são primos entre si; portanto, o teorema anterior nos garante que $p \mid b$. ∎

EXERCÍCIOS

18. Diz-se que um elemento d, de um anel de integridade A, é um *mdc* dos elementos $a_1 a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 1)$ de A se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições: D1. $d \mid a_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$; D2. para todo $d' \in A$, se $d' \mid a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, então $d' \mid d$. Demonstrar as seguintes propriedades:

a) Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 2)$ elementos de um anel de integridade A e suponhamos que exista em A um *mdc* d_1 de $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ e um *mdc* d de d_1 e a_n; nestas condições, d é um *mdc* de $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

b) Se A é um anel com *mdc*, então n elementos quaisquer de A admitem um *mdc* em A.

19. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ elementos de um anel A com *mdc* e seja d um *mdc* dêstes elementos; demonstrar que, para todo c em A, o elemento cd é um *mdc* de $a_1 c, a_2 c, \cdots, a_n c$.

20. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 1)$ elementos não simultâneamente nulos de um anel A com *mdc*, seja $d \in A$ um divisor comum dêstes elementos e ponhamos $a_i = db_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$; demonstrar que d é um *mdc* de $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se, e sòmente se, os elementos $b_1, b_2, \cdots, b_n$ são primos entre si.

21. Sejam a, b e c elementos de um anel fatorial A e suponhamos que a seja primo com b e com c; demonstrar que a é primo com o produto bc. Sugestão: supor que a não seja primo com bc e considerar um fator irredutível p de um *mdc* d de a e bc.

22. Sejam a, b e c elementos de um anel fatorial A e suponhamos que $b \mid a$ e $c \mid a$; demonstrar que se b e c são primos entre si, então $(bc) \mid a$.

23. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 2)$ elementos de um anel fatorial A e suponhamos que a_1 seja primo com a_i para $i = 2, \cdots, n$; demonstrar que a_1 é primo com o produto $a_2 \cdots a_n$. Sugestão: indução finita sôbre n e exercício 21.

1.4 - MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

A noção de mínimo múltiplo comum introduzida no anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros (ver o §2.4, Capítulo III) será estendida para um anel de integridade qualquer do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 10 - Sejam a e b dois elementos quaisquer de um anel de integridade A; diz-se que um elemento m, de A, é um *mínimo múltiplo comum* (*mmc*) de a e b se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições

M1: $a \mid m$ e $b \mid m$;

M2: para todo m' em A, se $a \mid m'$ e se $b \mid m'$, então $m \mid m'$.

É fácil verificar que se m é um *mmc* de a e b, então um elemento $m_1 \in A$ também é um *mmc* de a e b se, e sòmente se, $m_1 \sim m$; portanto, o *mmc* (caso exista) de dois elementos de A não é, em geral, determinado de modo único. Observemos que se $a=0$ ou $b=0$, então $m=0$ é o único *mmc* de a e b; recìprocamente, se um *mmc* de a e b é nulo, então $a=0$ ou $b=0$, em virtude da condição M1.

A definição de *mmc* pode ser estendida para uma família $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de elementos de A (ver os exercícios 24 e 25).

Conforme veremos mais adiante (teorema 11) nem sempre existe um *mmc* de dois elementos de um anel de integridade arbitrário; destacaremos, então, os anéis de integridade que admitem *mmc* pela

DEFINIÇÃO 11 - Diz-se que um anel de integridade A é um *anel com mínimo múltiplo comum* se, e sòmente se, é válida a seguinte condição

AF5: dois elementos quaisquer de A admitem um *mmc* em A.

Demonstraremos, a seguir, que as condições AF4 e AF5 são equivalentes; para isso veremos, em primeiro lugar, o análogo do teorema 7:

TEOREMA 10 - Sejam a e b dois elementos quaisquer de um anel A com *mmc* e seja m um *mmc* de a e b; nestas condições, para todo c em A, mc é um *mmc* de ac e bc.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos, evidentemente, supor que a, b e c não sejam nulos; como A é um anel com *mmc* existe $n \in A$ que é um *mmc* de ac e bc e precisamos demonstrar que $n \sim mc$. Ora, temos $a|m$ e $b|m$, logo, $(ac)|(mc)$ e $(bc)|(mc)$; portanto, em virtude da condição M2, teremos $n|(mc)$. Por outro lado, de $(ac)|n$ resulta $c|n$, logo, $n=cn_1$ com $n_1 \in A$ e como n é um *mmc* de ac e bc, temos $(ac)|n$ e $(bc)|n$, de onde vem, $a|n_1$ e $b|n_1$, logo, $m|n_1$ e então $(mc)|(n_1c)$ ou $(mc)|n$; portanto, $n \sim mc$. ∎

TEOREMA 11 - Um anel de integridade A é um anel com *mdc* se, e sòmente se, A é um anel com *mmc*.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que A seja um anel com *mdc* e sejam a e b dois elementos de A^*; indicando-se por d um *mdc* de a e b, temos $ab=dm$ com $m \in A$ e vamos, então, verificar as condições M1 e M2 para os elementos a, b e m.

M1. Temos $d|a$ e $d|b$, logo, $(db)|(ab)$ e $(da)|(ab)$, ou seja, $(db)|(dm)$ e $(da)|(dm)$, de onde vem, $b|m$ e $a|m$.

M2. Para todo $m' \in A$, se $a|m'$ e se $b|m'$, temos $(ab)|(bm')$ e $(ab)|(am')$, logo, em virtude do teorema 7, $(ab)|(dm')$, ou $(dm)|(dm')$, de onde vem, $m|m'$.

Recìprocamente, suponhamos que A seja um anel com *mmc* e sejam a e b dois elementos quaisquer de A^*; indicando-se por m um *mmc* de a e b, temos $ab=dm$ com $d \in A$ e vamos, então, verificar as condições D1 e D2 para os elementos a, b e d.

D1. Temos $a|m$ e $b|m$, logo, $(ab)|(bm)$ e $(ad)|(am)$, ou, $(dm)|(bm)$ e $(dm)|(am)$, de onde vem, $d|b$ e $d|a$.

D2. Para todo $d' \in A$, se $d'|a$ e se $d'|b$, temos $(bd')|(ab)$ e $(ad')|(ab)$, logo, de acôrdo com o teorema 10, $(d'm)|(ab)$, ou, $(d'm)|(dm)$ e então $d'|d$. ∎

Da demonstração do teorema acima resultam, imediatamente, os seguintes corolários:

COROLÁRIO 1 - Sejam a e b dois elementos quaisquer de um anel A com *mdc*; se $d \in A$ é um *mdc* de a e b e se $m \in A$ é um *mmc* de a e b, então $dm \sim ab$.

COROLÁRIO 2 - Sejam a e b dois elementos de um anel com *mdc*; se a e b são primos entre si, então ab é um *mmc* de a e b.

Conforme os teoremas 9 e 11 temos a seguinte caracterização de um anel fatorial

TEOREMA 12 - Um anel de integridade A é um anel fatorial se, e sòmente se, A satisfaz as condições AF1 e AF5.

EXERCÍCIOS

24. Diz-se que um elemento m de um anel de integridade A é um *mmc* dos elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geqslant 1)$ de A se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições: M1. $a_i|m$ para $i=1,2,\cdots,n$; M2. para todo $m' \in A$, se $a_i|m'$ $(i=1,2,\cdots,n)$, então $m|m'$. Verificar as seguintes propriedades:

a) Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ elementos de um anel de integridade A e suponhamos que exista em A um *mmc* m_1 de $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ e um *mmc* m de m_1 e a_n; nestas condições, demonstrar que m é um *mmc* de $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

b) Se A é um anel com mmc, então n elementos quaisquer de A admitem um mmc em A.

25. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ elementos de um anel A com mmc e seja $m \in A$ um mmc dêstes elementos; demonstrar que, para todo c em A, o elemento cm é um mmc de $a_1c, a_2c, \cdots, a_nc$.

26. Seja A um anel fatorial e sejam a e b dois elementos de $A-(U(A)\cup\{0\})$; supondo-se que a e b estejam representados por (4) e pondo-se $\mu_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}$ para $i = 1,2,\cdots,r$, demonstrar que $m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_r^{\mu_r}$ é um mmc de a e b.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §1

27. Demonstrar que se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são elementos distintos dois a dois de um anel de integridade A e se $f \in A[X]$ é tal que $f(a_i) = 0$ para $i = 1,2,\cdots,n$, então f é divisível pelo produto $(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)$. Sugestão: indução finita sôbre n utilizando o teorema 3.

28. Considerando-se o polinômio $X^2-1 \in F_{15}[X]$ mostrar que a hipótese «A é um anel de integridade», feita no exercício anterior, é essencial.

29. Utilizando o exercício 27 dar uma outra demonstração do teorema 12 do Capítulo VI.

30. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e suponhamos que exista um subconjunto infinito G, de A, tal que: a) G é fechado em relação à subtração; b) todo elemento não nulo, de G, é regular para a multiplicação. Nestas condições, demonstrar que $P(A)$ satisfaz o princípio de identidade de polinômios. Sugestão: Aplicar o mesmo método de demonstração do exercício 27.

31. Determinar todos os polinômios quadráticos, unitários e irredutíveis do anel $F_5[X]$. Sugestão: exercício 9.

32. Determinar o número de polinômios quadráticos, unitários e irredutíveis do anel $K[X]$, onde K é um corpo finito e com q elementos.

33. Determinar o número de polinômios cúbicos, unitários e irredutíveis do anel $K[X]$, onde K é um corpo finito e com q elementos. Sugestão: exercícios 10 e 32.

34. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 2)$ elementos não nulos de um anel de integridade A com mdc e para cada índice i, com $1 \leq i \leq n$, ponhamos

$$a_i' = a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n.$$

Verificar que

$$mdc(a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot mmc(a_1', a_2', \cdots, a_n') \sim a_1 a_2 \cdots a_n$$

e

$$mmc(a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot mdc(a_1', a_2', \cdots, a_n') \sim a_1 a_2 \cdots a_n.$$

§2 - ANÉIS EUCLIDIANOS

2.1 - PROPRIEDADES DE UM ANEL EUCLIDIANO

Estudaremos, neste parágrafo, certos anéis que admitem um algoritmo de divisão análogo ao que foi estabelecido para o anel $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros (teorema 19, Capítulo III) e para o anel de polinômios $K[X]$ com coeficiente num corpo K (corolário do teorema 4, Capítulo VI).

Seja A um anel fatorial e consideremos um elemento não nulo e não inversível a de A; de acôrdo com a condição AF1 existem elementos irredutíveis $p_1, p_2, \cdots, p_s$ em A tais que $a = p_1 p_2 \cdots p_s$ e a condição AF2 nos mostra que o número s de fatôres irredutíveis de a é independente da particular decomposição de a. O número de fatôres irredutíveis de qualquer decomposição de a é chamado *comprimento* de a e completaremos esta definição impondo que todo elemento inversível tenha comprimento nulo. Indicando-se por $\delta(a)$ o comprimento de $a \in A^*$, temos as seguintes propriedades, onde a e b são elementos quaisquer de A^*: 1) se $a|b$, então $\delta(a) \leq \delta(b)$; 2) se $a|b$ e se a não é associado a b, então $\delta(a) < \delta(b)$. Generalizaremos esta noção do seguinte modo: seja A um anel de integridade e suponhamos que exista uma aplicação $\delta: A^* \longrightarrow \boldsymbol{N}$ que satisfaça as condições:

AE1: quaisquer que sejam a e b em A^*, tem-se
$$\delta(ab) \geq \delta(a);$$

AE2: quaisquer que sejam a e b em A^*, se $b \notin U(A)$, tem-se
$$\delta(ab) > \delta(a).$$

Observemos, inicialmente, que o subconjunto $\delta(A^*)$, de $\boldsymbol{N}$, é não vazio, logo, existe $m = min\,\delta(A^*)$; por outro lado, para todo $a \in A^*$,

$$\delta(a) = \delta(1 \cdot a) \geq \delta(1),$$

portanto, $\delta(1) = m$. Outras propriedades desta aplicação δ estão dadas no seguinte

LEMA 4 - Quaisquer que sejam os elementos a e b de A^*, temos

a) se $a \sim b$, então $\delta(a) = \delta(b)$;

b) se $\delta(a) = \delta(b)$ e se $a|b$, então $a \sim b$;

c) $a \in U(A)$ se, e sòmente se, $\delta(a) = \delta(1) = m$.

DEMONSTRAÇÃO - a) De $a|b$ e $b|a$ resulta, em virtude da condição AE1, $\delta(a) \leq \delta(b)$ e $\delta(b) \leq \delta(a)$, logo, $\delta(a) = \delta(b)$.

b) Por hipótese, temos $a = bu$ com $u \in A$; se $u \notin U(A)$ teríamos, de acôrdo com a condição AE2, $\delta(b) = \delta(au) > \delta(a)$, contra o fato que $\delta(a) = \delta(b)$; portanto, $u \in U(A)$ e então $a \sim b$.

c) Se $a \in U(A)$, temos

$$m = \delta(1) = \delta(a \cdot a^{-1}) \geq \delta(a),$$

logo, $\delta(a) = m$, pois, m é o mínimo de $\delta(A^*)$. Recìprocamente, se $\delta(a) = m = \delta(1)$, temos, em virtude da parte b), $a \sim 1$, logo, $a \in U(A)$. ∎

O resultado principal sôbre esta aplicação δ é dado pelo seguinte

TEOREMA 13 - Seja A um anel de integridade e suponhamos que exista uma aplicação $\delta: A^* \longrightarrow N$ satisfazendo a condição AE2; neste caso, o anel A satisfaz a condição AF1.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto S de todos os elementos a de A tais que $a \notin U(A) \cup \{0\}$ e a não é produto de elementos irredutíveis em A e suponhamos, por absurdo, que S não seja vazio; neste caso, existe $m_0 = min\,\delta(S)$ e todo elemento de S é, necessàriamente, redutível. Temos $m_0 = \delta(a)$, com $a \in S$, logo, a é redutível, ou seja, existem elementos não inversíveis b e c em A tais que $a = bc$; portanto, de acôrdo com a condição AE2, temos

$$\delta(b) < \delta(a) = m_0 \quad \text{e} \quad \delta(c) < \delta(a) = m_0,$$

e então $b \notin S$ e $c \notin S$. Daqui resulta que b e c são produtos de elementos irredutíveis, portanto, $a = bc$ também é um produto de elementos irredutíveis, contra a definição do elemento a. ∎

DEFINIÇÃO 12 - Seja A um anel de integridade e suponhamos que exista uma aplicação $\delta: A^* \longrightarrow N$ que satisfaça as seguintes condições

AE1: quaisquer que sejam a e b em A^*, tem-se $\delta(ab) \geq \delta(a)$;

AE3: quaisquer que sejam a e b em A^*, se $b \nmid a$, então existe q em A tal que $\delta(a - bq) < \delta(b)$.

Diremos, neste caso, que A é um *anel δ-euclidiano* e a aplicação δ será denominada *algoritmo da divisão sôbre A*.

Se estiver fixado o algoritmo da divisão δ sôbre A diremos, simplesmente, que A é um anel euclidiano.

EXEMPLO 9 - A aplicação $\delta: \boldsymbol{Z}^* \longrightarrow \boldsymbol{N}$ definida por $\delta(n) = |n|$ satisfaz AE1, pois, $\delta(mn) = \delta(m)\delta(n)$ e $\delta(n) \geq 1$; por outro lado, em virtude do teorema 19, Capítulo III, δ também satisfaz a condição AE3, portanto, o anel $\dot{\boldsymbol{Z}}$ dos números inteiros é um anel euclidiano.

EXEMPLO 10 - Consideremos o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes num corpo K e ponhamos $\delta(f) = \partial f$ para todo polinômio não nulo $f \in K[X]$; temos $\delta(f) \geq 0$ e $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g)$ (corolário 1 do teorema 3, Capítulo VI), logo, δ satisfaz a condição AE1. Por outro lado, o corolário do teorema 4, Capítulo VI nos mostra que δ também satisfaz a condição AE3, portanto, $K[X]$ é um anel euclidiano.

A condição AE3 também pode ser enunciada sob a forma

AE3': quaisquer que sejam a e b em A, se $b \neq 0$, então existem elementos q e r em A tais que $a = bq + r$, onde $\delta(r) < \delta(b)$ se $r \neq 0$.

Os elementos q e r são denominados, respectivamente, quociente e resto da δ-divisão de a por b. Notemos que, em geral, êstes elementos não são determinados de modo único (ver o exercício 62).

LEMA 5 - Se A é um anel δ-euclidiano, então a aplicação δ satisfaz a condição AE2.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam a e b dois elementos quaisquer de A^* e suponhamos que $b \notin U(A)$; notando-se que $(ab) \nmid a$ resulta, em virtude de AE3, que existe q em A tal que $\delta(a - abq) < \delta(ab)$. Por outro lado, temos $\delta(a - abq) = \delta(a(1 - bq)) \geq \delta(a)$; portanto, $\delta(ab) > \delta(a)$. ∎

Do teorema 13 e do lema acima concluímos, imediatamente, o seguinte

COROLÁRIO - Todo anel euclidiano satisfaz a condição AF1.

TEOREMA 14 - Todo anel δ-euclidiano A é um anel com máximo divisor comum.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam a e b dois elementos não nulos de A e consideremos o conjunto S de todos os elementos de A^* que são da forma $xa + yb$, com x e y em A; é imediato que S é não vazio, logo, existe $m_0 = min\,\delta(S)$ e temos $m_0 = \delta(d)$, onde $d \in S$, portanto, existem elementos r e s em A tais que $d = ra + sb$. Afirmamos que d é um *mdc* de a e b e para isso precisamos verificar as condições D1 e D2 da definição 7.

D2. Para todo $d' \in A$, se $d' | a$ e se $d' | b$, temos (ver o exercício 2) $d' | (ra)$ e $d' | (sb)$, logo, $d' | (ra+sb)$, ou seja, $d' | d$.

D1. Suponhamos, por absurdo, que $d \nmid a$, logo, em virtude de AE3, existe q em A tal que $\delta(a-qd) < \delta(d) = m_0$, portanto, $a-qd \notin S$; mas, por outro lado, temos $a-qd = (1-qr)a+(-qs)b$ e então $a-qd \in S$ e obtemos assim uma contradição. Portanto, $d | a$ e anàlogamente demonstra-se que $d | b$. ∎

Da demonstração acima resultam, imediatamente, os seguintes corolários:

COROLÁRIO 1 - Se a e b são dois elementos quaisquer de um anel δ-euclidiano A e se $d \in A$ é um *mdc* de a e b, então existem r e s em A tais que $d = ra+sb$.

COROLÁRIO 2 - Dois elementos a e b, de um anel δ-euclidiano A, são relativamente primos se, e sòmente se, existem r e s em A tais que $ra+sb = 1$.

Os corolários acima podem ser estendidos para n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de um anel euclidiano A (ver os exercícios 38 e 39).

De acôrdo com os teoremas 9 e 14 e o corolário do lema 5, temos o seguinte

TEOREMA 15 - Todo anel euclidiano é um anel fatorial.

COROLÁRIO - O anel de polinômios $K[X]$, com coeficicientes num corpo K, é um anel fatorial.

Para a determinação de um *mdc* de dois elementos não nulos a e a_1, de um anel δ-euclidiano A, pode-se usar o *processo das divisões sucessivas* análogo ao que foi desenvolvido para o anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros (ver o §2.3 do Capítulo III). Temos $a = q_1 a_1 + a_2$, onde $\delta(a_2) < \delta(a_1)$ se $a_2 \neq 0$; supondo-se que $a_2 \neq 0$, teremos $a_1 = q_2 a_2 + a_3$, onde $\delta(a_3) < \delta(a_2)$ se $a_3 \neq 0$. Repetindo-se êste processo chegaremos, certamente, a uma divisão exata e teremos as relações

$$\begin{aligned} a &= q_1 a_1 + a_2, & 0 < \delta(a_2) < \delta(a_1), \\ a_1 &= q_2 a_2 + a_3, & 0 < \delta(a_3) < \delta(a_2), \\ &\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= q_n a_n + a_{n+1}, & 0 < \delta(a_{n+1}) < \delta(a_n), \\ a_n &= q_{n+1} a_{n+1} \end{aligned} \qquad (5).$$

Nestas condições, é fácil ver que a_{n+1} é um *mdc* de a e a_1 e, além disso, obtém-se das relações (5) um processo para determinar r e s, em A, tais que $a_{n+1} = ra+sa_1$ (ver o §2.3 do Capítulo III).

Conforme vimos acima todo anel δ-euclidiano A satisfaz a seguinte condição

AF6: quaisquer que sejam a e b em A, existe $d \in A$ que é um divisor comum de a e b e existem elementos r e s em A tais que

$$d = ra+sb.$$

Convém notar que existem anéis de integridade não euclidianos que satisfazem a condição AF6 (ver o §5.3).

É imediato que a condição AF6 implica a condição AF4, pois, o elemento d é um *mdc* de a e b, portanto, de acôrdo com o teorema 9, temos o seguinte

TEOREMA 16 - Todo anel de integridade que satisfaz as condições AF1 e AF6 é um anel fatorial.

EXERCÍCIOS

35. Dar uma outra demonstração do teorema 15 mostrando que todo elemento irredutível é primo.

36. A partir das relações (5) mostrar que a_{n+1} é um *mdc* de a e a_1 e dar um processo para determinar elementos r e s em A tais que $a_{n+1} = ra+sa_1$.

37. Dar uma outra demonstração do teorema 16 mostrando que a condição AF6 implica a condição AF3.

38. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 1)$ elementos de um anel δ-euclidiano A e seja d um *mdc* dêstes elementos (exercício 18); demonstrar que existem elementos $r_1, r_2, \cdots, r_n$ em A tais que

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n = d.$$

39. Demonstrar que os elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 1)$, de um anel δ-enclidiano A, são relativamente primos se, e sòmente se, existem $r_1, r_2, \cdots, r_n$ em A tais que

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n = 1.$$

2.2 - O ANEL FATORIAL $K[X]$

Vimos na secção anterior que o anel de polinômios $K[X]$, com coeficientes num corpo K, é um anel euclidiano, logo, $K[X]$ é fatorial (corolário do teorema 15) e como $U(K[X]) = U(K) = K^*$, resulta que para todo polinômio não constante f existem polinômios irredutíveis $p'_1, p'_2, \cdots, p'_s$, em $K[X]$, tais que

$$f = p'_1 p'_2 \cdots p'_s.$$

Indicando-se por a_i o coeficiente dominante de p_i' e pondo-se

$$p_i = a_i^{-1}p_i' \quad \text{e} \quad a = a_1a_2\cdots a_s,$$

temos

$$f = ap_1p_2\cdots p_s,$$

onde cada p_i é irredutível e unitário, logo, a é o coeficiente dominante de f. Em virtude da condição AF2 e do exemplo 5, esta decomposição de f é única a menos da ordem dos fatôres; precisamente, temos o seguinte

TEOREMA 17 - Todo polinômio não constante f, de $K[X]$, pode ser representado de modo único (a menos da ordem dos fatôres) sob a forma

$$f = ap_1p_2\cdots p_s \tag{6},$$

onde cada $p_i \in K[X]$ é irredutível e unitário e a é o coeficiente dominante de f.

Na decomposição (6) podem aparecer fatôres irredutíveis repetidos e, usando-se uma notação conveniente, suporemos que $p_1, p_2, \cdots, p_r$ $(r \leqslant s)$ sejam os têrmos distintos dois a dois da família $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$; neste caso, o polinômio f será representado sob a forma

$$f = ap_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},$$

onde cada α_i é um número natural não nulo, $p \neq p_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant r)$. Se

$$f = bq_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_t^{\beta_t}$$

é uma outra decomposição de f satisfazendo as mesmas condições anteriores, isto é, b é constante, cada β_j é um número natural não nulo, cada q_j é unitário e irredutível em $K[X]$ e $q_i \neq q_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant t)$, teremos $a = b$, $r = t$ e, usando-se uma notação conveniente, $p_i = q_i$ e $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, 2, \cdots, r$.

Já sabemos que $K[X]$ é um anel com *mdc* (teorema 14) e que um *mdc* de dois polinômios f e g, não nulos simultâneamente, está determinado a menos de uma constante não nula, portanto, existe um único polinômio unitário em $K[X]$ que é um *mdc* de f e g; indicaremos tal polinômio pela notação $mdc(f, g)$ que, por extensão, também será usada quando $f = g = 0$ caso êste em que se tem $mdc(f, g) = 0$. Valem observações análogas para o *mmc* unitário de dois polinômios não nulos f e g; usaremos a notação $mmc(f, g)$.

O corolário 1 do teorema 14 é agora enunciado sob a forma

TEOREMA 18 - Se f e g são dois polinômios quaisquer de $K[X]$, então existem polinômios r e s em $K[X]$ tais que

$$rf + sg = mdc(f, g).$$

Daqui resulta, imediatamente, o seguinte

COROLÁRIO 1 - Dois polinômios f e g, de $K[X]$, são primos entre si se, e sòmente se, existem polinômios r e s em $K[X]$ tais que

$$rf + sg = 1.$$

O teorema 18 e o corolário acima também valem para n polinômios $f_1, f_2, \cdots, f_n$ de $K[X]$ e as demonstrações são feitas por indução finita sôbre o número natural $n \geqslant 1$ (ver os exercícios 38 e 39):

COROLÁRIO 2 - Se $f_1, f_2, \cdots, f_n$ são polinômios quaisquer de $K[X]$, então existem polinômios $r_1, r_2, \cdots, r_n$ em $K[X]$ tais que

$$r_1f_1 + r_2f_2 + r_nf_n = mdc(f_1, f_2, \cdots, f_n).$$

COROLÁRIO 3 - Os polinômios $f_1, f_2, \cdots, f_n$, de $K[X]$, são relativamente primos se, e sòmente se, existem polinômios $r_1, r_2, \cdots, r_n$ em $K[X]$ tais que

$$r_1f_1 + r_2f_2 + \cdots + r_nf_n = 1.$$

Para determinar o *mdc* unitário de dois polinômios não nulos f e g, de $K[X]$, podemos utilizar o processo das divisões sucessivas (ver a secção 2.1), obtendo-se ao mesmo tempo um processo para determinar polinômios r e s tais que

$$rf + sg = mdc(f, g).$$

EXEMPLO 11 - Consideremos os polinômios

$$f = X^6 + 5X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2 \quad \text{e} \quad g = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$$

pertencentes a $F_7[X]$. Temos

$$f = (X^3 + 5X^2 + 6X + 2)g + (5X^2 + 6X + 5)$$
$$g = (3X + 1)(5X^2 + 6X + 5) + (3X + 4)$$
$$5X^2 + 6X + 5 = (4X + 6)(3X + 4) + 2,$$

logo, $mdc(f, g) = 1$. Além disso temos

$$2 = (5X^2 + 6X + 5) + (3X + 1)(3X + 4) =$$
$$= (5X^2 + 6X + 5) + (3X + 1)[(4X + 6)(5X^2 + 6X + 5) + g] =$$
$$= (3X + 1)g + (5X^2 + X)(5X^2 + 6X + 5) =$$
$$= (3X + 1)g + (5X^2 + X)[f + (6X^3 + 2X^2 + X + 5)] =$$
$$= (5X^2 + X)f + (2X^5 + 2X^4 + 5X^2 + X + 1)g,$$

logo,

$$r = 6X^2 + 4X \quad \text{e} \quad s = X^5 + X^4 + 6X^2 + 4X + 4.$$

O cálculo do *mdc* unitário, assim como do *mmc* unitário, de dois polinômios não constantes f e g também pode ser feito por intermédio das decomposições dêstes polinômios em fatôres irredutíveis e unitários:

$$f = ap_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r} \quad \text{e} \quad g = bp_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r} \tag{7},$$

onde a e b são constantes, cada α_i ou β_i é um número natural, cada $p_i \in K[X]$ é irredutível e unitário e $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant r)$; pondo-se

$$\delta_i = min\{\alpha_i, \beta_i\} \quad \text{e} \quad \mu_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}$$

teremos

$$mdc(f,g) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_r^{\delta_r} \quad \text{e} \quad mmc(f,g) = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_r^{\mu_r} \qquad (8).$$

O corolário 1 do teorema 11 nos mostra que

$$ab \cdot mdc(f,g) \cdot mmc(f,g) = fg \qquad (9)$$

igualdade esta que também pode ser obtida diretamente de (7) e (8) notando-se que $\delta_i + \mu_i = \alpha_i + \beta_i$ para $i = 1, 2, \cdots, r$.

A dificuldade em aplicar o processo acima consiste na determinação dos fatôres irredutíveis e unitários de f e g; por causa disso é preferível utilizar o processo das divisões sucessivas para determinar $mdc(f,g)$ e depois calcula-se $mmc(f,g)$ por meio da fórmula (9).

EXEMPLO 12 - Determinar $mdc(f,g)$ e $mmc(f,g)$ onde

$$f = X^6 + X^5 - X^4 - X^3 - X^2 - 2X - 2$$

e

$$g = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 2$$

são polinômios de $\mathbf{Q}[X]$. Pelo processo das divisões sucessivas temos

$$f = g + (2X^5 - 2X^3 - 4X)$$

$$g = (\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2})(2X^5 - 2X^3 - 4X) + (X^2 - 2)$$

$$2X^5 - 2X^3 - 4X = (2X^2 + 2)(X^2 - 2),$$

logo, $mdc(f,g) = X^2 - 2$. Por intermédio da fórmula (9) obtém-se

$$mmc(f,g) = X^{10} - X^8 - X^6 - X^4 - X^2 - 2.$$

Para completar o estudo do anel fatorial $K[X]$ temos que conhecer o conjunto de seus polinômios irredutíveis e unitários, o que depende, evidentemente, do corpo considerado K. Assim, conforme veremos no exemplo 16 do §3.3, se $K = \mathbf{Q}$, então para cada número natural $n \geqslant 1$ existe um polinômio irredutível, em $\mathbf{Q}[X]$, de grau n; o mesmo acontece no caso em que K é um corpo finito. No entanto, em virtude do teorema fundamental da Álgebra (ver o teorema 20), os únicos polinômios irredutíveis e unitários, de $\mathbf{C}[X]$, são os binômios $X - a$, com $a \in \mathbf{C}$. Tendo em vista uma generalização dêste último caso daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 13 - Diz-se que um corpo K é *algèbricamente fechado* se, e sòmente se, todo polinômio não constante, de $K[X]$, tem pelo menos uma raiz em K.

Observação - Um dos problemas que surge naturalmente é o da existência de corpos algèbricamente fechados. Os corpos $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$, assim como todo subcorpo de $\mathbf{R}$, não são algèbricamente fechados, pois, o polinômio $X^2 + 1 \in \mathbf{R}[X]$ não admite raiz real; o mesmo vale para todo corpo ordenado K (teorema 38, Capítulo IV). Conforme o teorema fundamental da Álgebra, enunciado no teorema 20 e demonstrado no Apêndice dêste Capítulo, o corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos é algèbricamente fechado.

TEOREMA 19 - As seguintes condições sôbre um mesmo corpo K são equivalentes entre si:

a) K é algèbricamente fechado;

b) todo polinômio irredutível e unitário de $K[X]$ é da forma $X - a$;

c) todo polinômio não constante g, de $K[X]$, decompõe-se num produto de fatôres lineares pertencentes a $K[X]$.

DEMONSTRAÇÃO - a) $\Longrightarrow$ b). Se $f \in K[X]$ é irredutível e unitário, então, conforme a definição 13, existe a em K tal que $f(a) = 0$; portanto, de acôrdo com o teorema 3, $X - a$ é um divisor de f e como $X - a$ é irredutível (teorema 4), teremos $f = X - a$.

b) $\Longrightarrow$ c). É uma conseqüência imediata do teorema 18.

c) $\Longrightarrow$ c). Por hipótese g admite um fator da forma $cX + d$, com c e d em X e $c \neq 0$, logo, $g = (cX + d)g_1$, onde $g_1 \in K[X]$; desta igualdade vem $g(-c^{-1}d) = 0$, com $-c^{-1}d \in K$. ∎

Como conseqüência do teorema acima e do teorema 18 temos o

COROLÁRIO - Se o corpo K é algèbricamente fechado, então todo polinômio não constante f, de $K[X]$, pode ser representado de modo único (a menos da ordem dos fatôres) sob a forma

$$f = a(X - x_1)^{\alpha_1}(X - x_2)^{\alpha_2} \cdots (X - x_r)^{\alpha_r},$$

onde cada α_i é um número natural não nulo, $x_i \in K$ e $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant r)$ e a é o coeficiente dominante de f.

O teorema fundamental da Álgebra foi enunciado, mas não demonstrado por D'Alembert (1717-1783); a primeira demonstração dêste teorema é devida a Gauss e no Apêndice dêste Capítulo apresentaremos uma demonstração do teorema de D'Alembert baseada no conceito de corpo de raízes de um polinômio e no fato que todo polinômio de grau ímpar e com coeficientes

reais tem pelo menos uma raiz real. O teorema fundamental da Álgebra é o seguinte

TEOREMA 20 - O corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos é algèbricamente fechado.

Em virtude do teorema 19 a proposição acima é equivalente à seguinte: os únicos polinômios irredutíveis e unitários do anel $\boldsymbol{C}[X]$ são os binômios $X-a$, com $a\in\boldsymbol{C}$. É, então, imediato que vale em $\boldsymbol{C}[X]$ o corolário do teorema 19.

Veremos, a seguir, de que forma são os polinômios irredutíveis e unitários do anel $\boldsymbol{R}[X]$. Observemos, inicialmente, que se $f\in\boldsymbol{R}[X]$ e se $x\in\boldsymbol{C}$ é uma raiz de f, então $f(\overline{x})=0$, onde $\overline{x}$ é o complexo conjugado de x.

Seja $f\in\boldsymbol{R}[X]$ um polinômio irredutível e unitário; de acôrdo com o teorema 20 existe um número complexo x tal que $f(x)=0$. Distinguiremos dois casos conforme x seja real ou não. Se $x\in\boldsymbol{R}$, então, conforme o teorema 3, $X-x$ é um divisor de f e como $X-x$ é irredutível (teorema 4), temos $f=X-x$. Suponhamos agora que x não seja real, logo, $x\neq\overline{x}$; de $f(x)=0$ resulta que existe $f_1\in\boldsymbol{C}[X]$ tal que $f=(X-x)f_1$ e como $f(\overline{x})=0$ e $x-\overline{x}\neq 0$, temos, $f_1(\overline{x})=0$, logo, existe $f_2\in\boldsymbol{C}[X]$ tal que $f_1=(X-\overline{x})f_2$, de onde vem,

$$f=(X-x)(X-\overline{x})f_2.$$

Ora, o polinômio

$$(X-x)(X-\overline{x})=X^2-(x+\overline{x})X+x\overline{x}$$

tem coeficientes reais, logo, $f_2\in\boldsymbol{R}[X]$ e como f é irredutível resulta que f_2 é constante, portanto, $f_2=1$ e então

$$f=X^2-(x+\overline{x})X+x\overline{x}.$$

Em resumo, se $f\in\boldsymbol{R}[X]$ é irredutível e unitário, então f é de uma das seguintes formas $X-a$ ou X^2+pX+q, onde a, p e q são números reais. Precisamos, então, determinar em que condições um polinômio real X^2+pX+q é irredutível, pois, já sabemos que todo binômio $X-a$ é irredutível, em $\boldsymbol{R}[X]$. A resolução dêste problema é dada pelo

LEMA 6 - O polinômio

$$f=X^2+pX+q\in\boldsymbol{R}[X]$$

é irredutível em $\boldsymbol{R}[X]$ se, e sòmente se,

$$\Delta=p^2-4q<0.$$

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que f seja irredutível em $\boldsymbol{R}[X]$ e suponhamos, por absurdo, que $\Delta\geq 0$; notando-se que

$$X^2+pX+q=\left(X+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}$$

resulta que o número real $x_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{\Delta})$ é raiz de f, logo, f é divisível, em $\boldsymbol{R}[X]$, por $X-x_1$ contra o fato que f é irredutível. Recìprocamente, suponhamos que f seja redutível em $\boldsymbol{R}[X]$, logo,

$$f=(X-x)(X-y),$$

com x e y reais; neste caso, temos

$$p=-(x+y) \quad \text{e} \quad q=xy;$$

portanto,

$$\Delta=p^2-4q=(x+y)^2-4xy=(xy)^2\geq 0,$$

contra a hipótese. ∎

Resumiremos os resultados obtidos acima no seguinte

TEOREMA 21 - Os únicos polinômios irredutíveis e unitários do anel $\boldsymbol{R}[X]$ são os binômios $X-a$ e os trinômios X^2+pX+q, com $p^2-4q<0$.

Como $\boldsymbol{R}[X]$ é um anel fatorial resulta do teorema acima o seguinte

COROLÁRIO - Todo polinômio não constante $f\in\boldsymbol{R}[X]$, de coeficiente dominante a, pode ser representado de modo único (a menos da ordem dos fatôres) sob uma das seguintes formas:

a) se tôdas as raízes de f são reais, então

$$f=(X-x_1)^{\alpha_1}(X-x_2)^{\alpha_2}\cdots(X-x_r)^{\alpha_r},$$

onde cada α_i é um número natural não nulo, cada x_i é real e $x_i\neq x_j$ se $i\neq j$ $(1\leq i,j\leq r)$;

b) se tôdas as raízes de f são números complexos não reais, então

$$f=a(X^2+p_1X+q_1)^{\beta_1}(X^2+p_2X+q_2)^{\beta_2}\cdots(X^2+p_sX+q_s)^{\beta_s},$$

onde cada β_j é um número natural não nulo, p_j e q_j são reais, $p_j^2-4q_j<0$ $(j=1,2,\cdots,s)$ e $(p_j,q_j)\neq(p_{j'},q_{j'})$ se $j\neq j'$ $(1\leq j,j'\leq s)$;

c) se f admite raízes reais e raízes complexas não reais, então

$$f=a(X-x_1)^{\alpha_1}\cdots(X-x_r)^{\alpha_r}(X^2+p_1X+q_1)^{\beta_1}\cdots(X^2+p_sX+q_s)^{\beta_s},$$

onde cada α_i ou β_j é um número natural não nulo, x_i, p_j e q_j são números reais, $x_i\neq x_{i'}$ se $i\neq i'$ $(1\leq i,i'\leq r)$, $p_j^2-4q_j<0$ $(j=1,2,\cdots,s)$ e $(p_j,q_j)\neq(p_{j'},q_{j'})$ se $j\neq j'$ $(1\leq j,j'\leq s)$.

EXERCÍCIOS

40. Demonstrar os corolários 1, 2 e 3 do teorema 18.

41. Determinar a decomposição em fatôres irredutíveis e unitários, sôbre $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{C}$, dos seguintes polinômios com coeficientes racionais:

a) X^2-2;

b) X^3+4X^2+5X+2;

c) X^3+2X^2-1;

d) X^3+X^2+X+1.

42. Determinar as decomposições em fatôres irredutíveis e unitários dos seguintes polinômios do anel $K[X]$:

a) X^3-1, $K=\mathbf{Q}$ ou $K=\mathbf{C}$;

b) X^2+1, $K=\mathbf{Q}[i\sqrt{2}]$ ou $K=\mathbf{Q}[i]$;

c) X^4+X^2+1, $K=\mathbf{R}$ ou $K=\mathbf{C}$;

d) X^5-X, $K=F_5$;

e) X^3+X+2, $K=F_{17}$;

f) $X^{13}-5$, $K=F_{13}$.

43. Utilizando os resultados sôbre raizes n-ésimas complexas da unidade (ver o exercício 95 do Capítulo V) determinar as decomposições em fatôres irredutíveis e unitários dos seguintes polinômios de $\mathbf{R}[X]$:

a) X^6-a^6;

b) $X^{2n}-a^{2n}$

c) $(X+1)^n+(X-1)^n$;

d) $(1-X^2)^3+8X^3$;

onde $a\in\mathbf{R}^*$ e $n\in\mathbf{N}^*$.

44. Demonstrar que existem infinitos polinômios unitários e irredutíveis em $K[X]$, onde K é um corpo. Sugestão: supor que $p_1,p_2,\cdots,p_s$ sejam os únicos polinômios irredutíveis e unitários de $K[X]$ e considerar o polinômio $p_1p_2\cdots p_s+1$ (ver também a demonstração do teorema de Euclides §2.1, Capítulo III).

45. Determinar $mdc(f,g)$, em $K[X]$, nos seguintes casos:

a) $f=X^2+2X-1$, $g=X^3-1$ e $K=\mathbf{Q}$;

b) $f=X^3+X^2-2X$, $g=X^7+2X^6-X-2$ e $K=F_7$;

c) $f=X^8+X^7-2X^6-3X^5+3X^3+2X^2-X+1$,
$g=8X^7+7X^6-12X^5-15X^4+9X^2+4X-1$ e $K=F_{17}$;

d) $f=X^{11}-5$, $g=X^2+X+1$ e $K=F_{11}$;

e) $f=X^4-X^2+1$, $g=X^3+X^2+X+1$ e $K=F_5$.

Em cada caso determinar polinômios r e s, em $K[X]$, tais que $rf+sg=mdc(f,g)$.

46. Determinar $mmc(f,g)$ nos casos a), b), d) e f) do exercício anterior.

47. A partir das decomposições em fatôres unitários e irredutíveis obtidas no exercício 42, determinar o mdc e o mmc unitários dos seguintes pares de polinômios a) e b), c) e d), b) e c).

48. Mostrar que o mdc (resp., mmc) unitário de dois polinômios não nulos f e g, de $K[X]$, é o polinômio de grau máximo (resp., mínimo) que é divisor comum (resp., múltiplo comum) de f e g.

49. Determinar o mdc e o mmc unitários dos seguintes polinômios $f=X^3-7X+6$, $g=X^3-3X+2$ e $h=X^3-4X^2+3X$ do anel $\mathbf{Q}[X]$. Determinar polinômios r, s e t, em $\mathbf{Q}[X]$, tais que $rf+sg+th=mdc(f,g,h)$.

50. Se f e g são dois polinômios não nulos de $K[X]$ e se $d=mdc(f,g)$, mostrar que $d^n=mdc(f^n,g^n)$, para todo número natural n.

51. Consideremos os polinômios X^m-a^m e X^n-a^n do anel $\mathbf{R}[X]$, onde $a\neq 0$ e m e n são números naturais não nulos; mostrar que

$$mdc(X^m-a^m,X^n-a^n)=X^h-a^h,$$

onde $h=mdc(m,n)$.

52. Seja K um subcorpo de um corpo E e consideremos dois polinômios f e g de $K[X]\subset E[X]$; mostrar que

$$mdc_K(f,g)=mdc_E(f,g)$$

e

$$mmc_K(f,g)=mmc_E(f,g).$$

Sugestão: utilizar a relação $rf+sg=mdc_K(f,g)$, onde r e s são elementos de $K[X]$.

53. Com as notações do exercício anterior, mostrar que se existe x em E tal que $f(x)=g(x)=0$, então os polinômios f e g não são relativamente primos em $K[X]$.

54. Sejam f e g dois polinômios não constantes do anel $K[X]$ e suponhamos que f e g sejam primos entre si. a) Mostrar que os polinômios r e s, de $K[X]$, tais que $rf+sg=1$ não são determinados de modo único. b) Mostrar que existem r e s satisfazendo a identidade anterior e tais que $\partial r<\partial g$ e $\partial s<\partial f$.

55. A partir do corolário do teorema 21 mostrar que todo polinômio real e de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real. Observação: No Apêndice dêste Capítulo daremos uma outra demonstração dêste resultado sem utilizar o teorema fundamental da Álgebra.

2.3 - DECOMPOSIÇÃO DE UMA FRAÇÃO RACIONAL

Consideremos o corpo de frações racionais $K(X)$ na indeterminada X e com coeficientes num corpo K; todo elemento, dêste corpo, é da forma f/g, com f e g em $K[X]$ e $g\neq 0$. Esta representação de f/g não é, evidentemente, única, pois, para todo $d\in K[X]$, $d\neq 0$, temos $f/g=(fd)/(gd)$. No entanto, se impuzermos que os polinômios f e g sejam primos entre si e que g seja unitário, resulta que a representação de f/g é única; precisamente, se $f/g=f_1/g_1$, onde g e g_1 são polinômios unitários e $mdc(f,g)=mdc(f_1,g_1)=1$, então $f=f_1$ e $g=g_1$. Diz-se, neste caso, que a fração racional f/g é irredutível e no que se segue só vão nos interessar as frações racionais irredutíveis cujos denominadores sejam não constantes.

LEMA 7 - Para tôda fração racional irredutível f/g, de $K(X)$, existe um único par (q,h), de polinômios de $K[X]$, tal que

$$\frac{f}{g}=q+\frac{h}{g} \qquad (10),$$

onde $h\neq 0$ e $\partial h<\partial g$.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam q e h o quociente e o resto da divisão euclidiana de f por g, logo,

$$f = qg + h \qquad (11);$$

notando-se que g é não constante e que f e g são primos entre si, resulta que $h \neq 0$; portanto, $\partial h < \partial g$. Da igualdade (11) concluímos imediatamente que vale a fórmula (10). Por outro lado, é evidente que q e h são determinados de modo único, pois, êstes polinômios são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de f por g. ∎

Observemos que, nas condições acima, os polinômios h e g são primos entre si, pois $mdc(g,h) = mdc(f,g) = 1$, logo a fração racional h/g também é irredutível. O polinômio q passa a ser denominado *parte inteira* da fração racional irredutível f/g.

TEOREMA 22 - Seja $f/g \in K(X)$ uma fração racional irredutível, onde $\partial f < \partial g$. Se $g = g_1 g_2 \cdots g_s$ $(s \geqslant 2)$, onde cada $g_i \in K[X]$ é não constante e unitário e $mdc(g_i, g_j) = 1$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant s)$, então existe uma única família de polinômios $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$, de $K[X]$, tal que

1) $h_i \neq 0$;
2) $\partial h_i < \partial g_i$;
3) $mdc(h_i, g_i) = 1$,
4) $f = \sum_{i=1}^{s}{}' h_i/g_i$.

Além disso, a família $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ é determinada de modo único pelas condições 1), 2) e 4).

DEMONSTRAÇÃO - Para cada índice i, com $1 \leqslant i \leqslant s$, ponhamos

$$G_i = \prod_{j \neq i} g_j;$$

é imediato que os polinômios $G_1, G_2, \cdots, G_s$ são primos entre si, logo, de acôrdo com o corolário 3 do teorema 13, existem polinômios $h_1', h_2', \cdots, h_s'$ em $K[X]$ tais que

$$h_1'G_1 + h_2'G_2 + \cdots + h_s'G_s = 1 \qquad (12).$$

Notando-se que $g_i | G_j$ para $i \neq j$, a relação (12) pode ser posta sob a forma

$$h_i'G_i + g_iG_i' = 1,$$

de onde vem, $mdc(g_i, h_i') = 1$ e como $mdc(g_i, f) = 1$ teremos $mdc(g_i, fh_i') = 1$ (ver o exercício 21). Conforme o algoritmo da divisão temos

$$fh_i' = q_ig_i + h_i \qquad (13),$$

onde $h_i \neq 0$, $\partial h_i < \partial g_i$ e $mdc(h_i, g_i) = 1$. Multiplicando-se ambos os membros de (12) por G_i e somando-se para $i = 1, 2, \cdots, s$, teremos, levando-se em conta a relação (12) e notando-se que $g_iG_i = G$:

$$f = \Big(\sum_{i=1}^{s} q_i\Big) g + \sum_{i=1}^{s} h_iG_i$$

e como

$$\partial\Big(\sum_{i=1}^{s} h_iG_i\Big) < \partial g,$$

temos $\sum_{i=1}^{s} q_i = 0$, pois, $\partial g < \partial f$; portanto, $f = \sum_{i=1}^{s} h_iG_i$, de onde vem

$$\frac{f}{g} = \sum_{i=1}^{s} \frac{h_i}{g_i}.$$

Fica assim demonstrado que a família $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ satisfaz as condições 1), 2), 3) e 4) acima; falta, então, mostrar que esta família é determinada de modo único pelas condições 1), 2) e 4). Ora, se

$$f/g = \sum_{i=1}^{s} H_i/g_i,$$

onde $H_i \neq 0$ e $\partial H_i < \partial g_i$, teremos

$$\sum_{i=1}^{s} (H_i - h_i)G_i = 0,$$

ou,

$$\sum_{j \neq i} (H_i - h_i)G_j + (H_i - h_i)G_i = 0.$$

Notando-se que $g_i | G_j$, para $i \neq j$, temos $g_i | (H_i - h_i)G_i$ e como g_i é primo com G_i teremos $g_i | (H_i - h_i)$, o que só é possível se $H_i = h_i$ em virtude da hipótese feita sôbre os graus de H_i e h_i. ∎

COROLÁRIO - Seja $f/g \in K(X)$ uma fração racional irredutível, onde $\partial f < \partial g$. Se

$$g = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}$$

é a decomposição de g em fatôres irredutíveis e unitários, $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ e cada s_i é um número natural não nulo, então existe uma família $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, de polinômios de $K[X]$, tal que

1) $h_i \neq 0$;
2) $\partial h_i < \partial(p_i^{s_i}) = s_i \partial p_i$;
3) $p_i \nmid h_i$;
4) $f = \sum_{i=1}^{n} h_i/p_i^{s_i}$.

Além disso, a família $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ é determinada de modo único pelas condições 1), 2) e 4).

Basta observar que a condição 3) do teorema acima é, no caso em questão, equivalente a $p_i \nmid h_i$.

Portanto, para completar o estudo da decomposição de uma fração racional basta considerar as frações racionais irredutíveis da forma h/p^s, onde p é irredutível e unitário, $s>1$ e $\partial h<\partial(p^s)=s\partial p$. Demonstraremos, inicialmente, o seguinte lema (ver o exercício 24 proposto no Capítulo VI):

LEMA 8 - Sejam h e p dois polinômios de $K[X]$, onde $h\neq 0$, p é irredutível e unitário e seja $r\in N$ tal que

$$r\partial p\leqslant\partial h<(r+1)\partial p;$$

nestas condições, existe uma única família $(h_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$, de polinômios de $K[X]$, tal que

$$f=\sum_{i=0}^{r}h_ip^i \tag{14}$$

onde $h_r\neq 0$ e $\partial h_i<\partial p$ se $h_i\neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Para $r=0$ basta escolher $h_0=h$; suponhamos, então, que $r>0$ e que a parte de existência do lema acima seja verdadeira para $r-1$ e seja $h\in K[X]$ tal que $h\neq 0$ e

$$r\partial p\leqslant\partial h<(r+1)\partial p.$$

Em virtude do algoritmo da divisão temos

$$h=qp+h_0 \tag{15},$$

onde $h_0\neq 0$ (pois, $p\nmid h$), $\partial h_0<\partial p$ e $\partial q=\partial h-\partial p$, logo,

$$(r-1)\partial p\leqslant\partial q<r\partial p;$$

portanto, de acôrdo com a hipótese de indução, existe uma família $(h_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$, de polinômios de $K[X]$, tal que

$$q=\sum_{i=1}^{r}h_ip^{i-1} \tag{16},$$

onde $\partial h_i<\partial p$ se $h_i\neq 0$ e $h_r\neq 0$. De (15) e (16) resulta que

$$h=\sum_{i=0}^{r}h_ip^i,$$

$h_r\neq 0$ e $\partial h_i<\partial p$ se $h_i\neq 0$; portanto, só falta demonstrar que a família $(h_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$ é única. Ora, suponhamos que

$$h=\sum_{i=0}^{r}h'_ip^i,$$

onde $\partial h'_i<\partial p$ se $h'_i\neq 0$ e suponhamos, por absurdo, que exista um índice i tal que $h_i\neq h'_i$; neste caso, existe um menor índice t, com $0\leqslant t\leqslant r$, tal que $h_t\neq h'_t$ e temos

$$(h_t-h'_t)p^t+\sum_{j=t+1}^{r}(h_j-h'_j)p^j=0,$$

de onde vem, $p|(h_t-h'_t)$ e chega-se assim a uma contradição, pois, $\partial(h_t-h'_t)\leqslant max\{\partial h_t,\partial h'_t\}<\partial p$. ∎

TEOREMA 23 - Seja $h/p^s\in K(X)$ uma fração racional irredutível, onde $s\in N^*$, $p\in K[X]$ é irredutível e unitário e $\partial h<s\partial p$ e seja r um número natural tal que $r\partial p\leqslant\partial h<(r+1)\partial p$; nestas condições, temos:

1) $r\leqslant s$;

2) existe uma única família $(h_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$, de polinômios de $K[X]$, tal que

$$h/p^s=\sum_{i=0}^{r}h_i/p^{s-i} \tag{17},$$

onde $h_r\neq 0$ e $\partial h_i<\partial p$ se $h_i\neq 0$.

É uma conseqüência imediata do lema acima, pois, da fórmula (14) resulta, imediatamente, a fórmula (17).

Tôda fração racional da forma h/p^s, onde $h\in K[X]$ é não nulo, $p\in K[X]$ é irredutível e unitário, $s\in N^*$ e $\partial h<\partial p$, é denominada fração racional simples. O corolário do teorema 22 e o teorema 23 nos mostram que tôda *fração racional irredutível* $f/g\in K(X)$ pode ser representada, de modo único, como uma soma de frações racionais simples.

Casos particulares importantes

I. $K=C$. Sabemos que o corpo C dos números complexos é algèbricamente fechado, logo, de acôrdo com o corolário do teorema 19, todo polinômio não constante e unitário g, de $C[X]$, pode ser representado sob a forma

$$g=(X-x_1)^{a_1}(X-x_2)^{a_2}\cdots(X-x_r)^{a_r} \tag{18},$$

onde $x_i\in C$, $x_i\neq x_j$ se $i\neq j$ $(1\leqslant i,j\leqslant r)$ e cada a_i é um número natural não nulo. A decomposição de uma fração racional irredutível f/g, de $C(X)$, onde g está representado em (18), é da forma

$$\frac{f}{g}=\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{a_i}\frac{A_{ij}}{(X-x_i)^j}\Big) \tag{19},$$

onde cada A_{ij} é constante. Para calcular as constantes A_{ij} podemos eliminar os denominadores de ambos os membros de (18) e depois igualar os coeficientes correspondentes dos polinômios assim obtidos; teremos, assim, certas relações que nos permitirão calcular todos os A_{ij}. Um outro método consiste em seguir exatamente a demonstração que vimos acima no estudo da decomposição de uma fração racional como soma de frações racionais simples.

EXEMPLO 13 - Decompor a fração racional

$$\frac{X^5+4X^3+4}{(X^2+1)}\in C(X)$$

numa soma de frações racionais simples.

Efetua-se, inicialmente, a divisão euclidiana do numerador pelo denominador e obtém-se

$$X^5+4X^3+4=(2X^3-X+4)+X(X^2+1)^2,$$

logo, basta decompor a fração racional

$$\frac{2X^3-X+4}{(X^2+1)^2}.$$

As raizes do denominador são i e $-i$ e temos

$$(X^2+1)^2=(X-i)^2(X+i)^2,$$

logo,

$$\frac{2X^3-X+4}{(X-i)^2(X+i)^2}=\frac{a}{X-i}+\frac{b}{X+i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{d}{(X+i)^2},$$

de onde vem, pela eliminação dos denominadores

$$2X^3-X+4=a(X-i)(X+i)^2+b(X+i)(X-i)^2+c(X+i)^2+d(X-i)^2 \quad (20).$$

Calculando-se o valor de ambos os membros desta igualdade em i e $-i$, obtém-se

$$c=\frac{1}{4}(-4+3i) \quad \text{e} \quad d=\frac{1}{4}(-4-3i);$$

portanto, (20) se reduz a

$$2X^3+2X^2+2X+2=a(X-i)(X+i)^2+b(X+i)(X-i)^2 \qquad (21).$$

Calculando-se os restos das divisões euclidianas dos polinômios do primeiro e do segundo membros de (21) por $(X-i)^2$ e por $(X+i)^2$ obteremos

$$(-4+4i)X+(4+4i)=-4aX+4ia$$

e

$$(-4-4i)X+(4-4i)=-4bX-4ib,$$

de onde vem,

$$a=1-i \quad \text{e} \quad b=1+i;$$

portanto,

$$\frac{X^5+4X^3+4}{(X^2+1)^2}=X+\frac{1-i}{X-i}+\frac{1+i}{X+i}+\frac{-1+\frac{3}{4}i}{(X-i)^2}+\frac{-1-\frac{3}{4}i}{(X+i)^2},$$

que é a decomposição da fração racional dada numa soma de frações racionais simples.

II. $K=\boldsymbol{R}$. Conforme o corolário do teorema 21, todo polinômio não constante $g\in\boldsymbol{R}[X]$ pode ser representado sob a forma

$$g=(X-x_1)^{a_1}\cdots(X-x_r)^{a_r}(X^2+p_1X+q_1)^{b_1}\cdots(X^2+p_sX+q_s)^{b_s} \quad (22),$$

onde cada a_i ou b_j é um número natural não nulo, x_i, p_j e q_j são reais e $p_j^2-4q_j<0$ (nesta representação estamos admitindo que se possa ter $r=0$ ou $s=0$); além disso, temos $x_i\neq x_i$, se $i\neq i'$ $(1\leqslant i,i'\leqslant r)$ e $(p_j,q_j)\neq(p_{j'},q_{j'})$ se $j\neq j'$ $(1\leqslant j,j'\leqslant s)$. A decomposição de uma fração racional irredutível $f/g\in\boldsymbol{R}(X)$, onde g é determinado por (22), é da forma

$$\frac{f}{g}=\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{a_i}\frac{A_{ij}}{(X-x_i)^j}\Big)+\sum_{i=1}^{s}\Big(\sum_{j=1}^{b_i}\frac{M_{ij}X+P_{ij}}{(X^2+p_jX+q_j)^i}\Big),$$

onde A_{ij}, M_{ij} e P_{ij} são números reais.

Exemplo 14 - Consideremos a fração racional irredutível

$$\frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)^2}\in\boldsymbol{R}(X);$$

em virtude do que vimos acima temos

$$\frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)^2}=\frac{a}{X^2}+\frac{b}{X}+\frac{cX+d}{(X^2+1)^2}+\frac{eX+f}{X^2+1},$$

onde a, b, c, d, e e f são números reais. Eliminando-se os denominadores teremos

$$X^2+X+1=a(X^2+1)^2+bX(X^2+1)^2+(cX+d)X^2+(eX+f)(X^2+1)X^2$$

ou

$$X^2+X+1=(b+e)X^5+(a+f)X^4+(2b+c+e)X^3+(2a+d+f)X^2+bX+a,$$

de onde vem,

$$\begin{aligned} b+e&=0\\ a+f&=0\\ 2b+c+e&=0\\ 2a+d+f&=1\\ b&=1\\ a&=1. \end{aligned}$$

Resolvendo-se o sistema acima obtém-se $a=1$, $b=1$, $c=-1$, $d=0$, $e=-1$ e $f=-1$; portanto,

$$\frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)^2}=\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+\frac{-X}{(X^2+1)^2}+\frac{-X-1}{X^2+1},$$

que é a decomposição da fração racional dada numa soma de frações racionais simples.

EXERCÍCIOS

56. Decompor as seguintes frações racionais, de $K(X)$, numa soma de frações racionais simples:

a) $\dfrac{X+2}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$, $K=\boldsymbol{R}$;

b) $\dfrac{X+2}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$, $K=\boldsymbol{Q}[i]$;

c) $\dfrac{4X+2}{X^3+2X^2+4X+3}$, $K=F_5$;

d) $\dfrac{2X^2-1}{(X^2+X+1)(X^2+1)^2}$, $K=\boldsymbol{Q}$, $K=\boldsymbol{Q}[w]$, onde $w=\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$;

e) $\dfrac{2X^5+3X^3+6X^2+3}{(X^2+1)^3}$, $K=F_7$.

57. Decompor as frações racionais

$$\frac{1}{X^{2n}+1} \quad \text{e} \quad \frac{X^{n-1}}{X^n-1},$$

onde m e n são números naturais não nulos, numa soma de frações racionais simples, em $\mathbf{C}(X)$ e em $\mathbf{R}(X)$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

58. Seja $A \neq \{0\}$ um anel comutativo sem divisores próprios do zero e suponhamos que exista uma aplicação $\delta: A^* \to \mathbf{N}$ que satisfaz as condições AE1 e AE3; demonstrar que A é um anel de integridade.

59. Seja A um anel δ-euclidiano e seja $h: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ uma aplicação crescente; mostrar que A é um anel $(h \circ \delta)$-euclidiano.

60. Mostrar que as seguintes condições sôbre um mesmo anel δ-euclidiano A são equivalentes

AE4: quaisquer que sejam a e b em A^*, com $b \neq 0$, se

$$a = bq + r = bq' + r',$$

onde $\delta(r) < \delta(b)$ se $r \neq 0$ e $\delta(r') < \delta(b)$ se $r' \neq 0$, então $q = q'$ (e, portanto, $r = r'$);

AE4': quaisquer que sejam a e b em A^*, se $a+b \neq 0$, então

$$\delta(a+b) \leqslant max\{\delta(a), \delta(b)\}.$$

61. Demonstrar que se um anel δ-euclidiano A satisfaz uma das condições do exercício anterior, então A é um corpo ou $A = K[x]$, onde K é um subcorpo de A e x é transcendente sôbre K.

62. Seja p um elemento irredutível de um anel fatorial A e observemos que para todo $a \in A^*$ existe um único número natural s tal que $p^s \mid a$ e $p^{s+1} \nmid a$; o número natural s será indicado pela notação $v_p(a)$ e será denominado *multiplicidade de p como fator de a* ou, simplesmente, *multiplicidade de p em a* (também diremos que p é um fator de multiplicidade s do elemento a). Quando $v_p(a) = 1$ (resp., $v_p(a) > 1$) diremos que p é um *fator simples* (resp., *múltiplo*) do elemento a. Obtém-se assim uma aplicação $v_p: A^* \to \mathbf{N}$, que é denominada *valorização p-ádica de A*, que satisfaz as seguintes condições

V1: quaisquer que sejam a e b em A^*, tem-se

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

V2: quaisquer que sejam a e b em A^*, se $a+b \neq 0$, então

$$v_p(a+b) \geqslant min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

Mostrar que valem as seguintes propriedades:

a) se $u \in U(A)$, então $v_p(u) = 0$;

b) quaisquer que sejam a e b em A^*, se $a+b \neq 0$ e se $v_p(a) \neq v_p(b)$, então

$$v_p(a+b) = min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

63. Consideremos o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes num corpo K e seja $f \in K[X]$ um polinômio não constante; demonstrar que se $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ é uma família de polinômios unitários e irredutíveis em $K[X]$, com $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant r)$ e se m_i é a multiplicidade de p_i em f, então existe um único polinômio g em $K[X]$ tal que

$$f = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} g,$$

onde $p_i \nmid g$ para $i = 1, 2, \cdots, r$.

Observação: Se $p = X - x \in K[X]$ é um fator de multiplicidade $m \geqslant 1$ do polinômio não constante $f \in K[X]$ tem-se, necessàriamente, $f(x) = 0$; diz-se, neste caso, que x é uma *raiz de multiplicidade m* do polinômio f. Quando $m = 1$ (resp., $m > 1$) diremos que x é uma *raiz simples* (resp., *múltipla*) de f.

64. Com as notações do exercício anterior, mostrar que se $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, com $x_i \in K$, é uma família de raizes distintas de f e se m_i é a multiplicidade de x_i em f, então existe um único polinômio g em $K[X]$ tal que

$$f = (X - x_1)^{m_1} (X - x_2)^{m_2} \cdots (X - x_r)^{m_r} g,$$

onde $g(x_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, r$.

65. Se f é um polinômio não constante do anel $\mathbf{R}[X]$ e se x é uma raiz complexa de multiplicidade $m \geqslant 1$ de f, então o complexo conjugado $\bar{x}$, de x, também é raiz de multiplicidade m do polinômio f.

66. Com as notações do exercício anterior, mostrar que existe um único polinômio g em $\mathbf{R}[X]$ tal que

$$f = [(X - x)(X - \bar{x})]^m g,$$

onde $g(x) \neq 0$ (e, portanto, $g(\bar{x}) \neq 0$),

67. Seja f um polinômio não constante do anel $\mathbf{R}[X]$ e indiquemos por

$$x_1, x_2, \cdots, x_r, z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_s, \bar{z}_s$$

as raízes complexas de f, onde cada x_i é real e $x_i \neq x_{i'}$ se $i \neq i'$ $(1 \leqslant i, i' \leqslant r)$, cada z_k é um número complexo não real e $z_k \neq z_{k'}$ se $k \neq k'$ $(1 \leqslant k, k' \leqslant s)$. Demonstrar que se a_i é a multiplicidade de x_i e se b_k é a multiplicidade de z_k, então f pode ser representado de modo único (a menos da ordem dos fatôres) sob a forma

$$f = a(X - x_1)^{a_1} \cdots (X - x_r)^{a_r} (X^2 + p_1 X + q_1)^{b_1} \cdots (X^2 + p_s X + q_s)^{b_s},$$

onde a é o coeficiente dominante de f, os números p_k e q_k são reais e z_k é raiz de $X^2 + p_k X + q_k$ (logo, $p_k^2 - 4q_k < 0$).

Observação: Obtém-se assim um enunciado mais preciso do corolário do teorema 21.

68. Demonstrar que todo corpo finito K não é algèbricamente fechado. Sugestão: Se $a_1, a_2, \cdots, a_q$ são os elementos de K considerar o polinômio $(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_q) + 1$.

Nos exercícios seguintes utilizaremos o conceito de derivada de um polinômio, introduzida no exercício 98 do Capítulo VI.

69. Consideremos o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes num corpo K de característica zero, seja $p \in K[X]$ um polinômio irredutível e unitário e seja f um polinômio não constante. Verificar as seguintes propriedades:

a) p é um fator simples de f se, e sòmente se, $p \mid f$ e $p \nmid Df$.

b) p é fator de multiplicidade $s \geqslant 1$, de f, se, e sòmente se, $p \mid D^i f$ para $i = 0, 1, \cdots, s-1$ e $p \nmid D^s f$, onde $D^0 f = f$ e $D^i f = D(D^{i-1} f)$ para $i \geqslant 1$.

c) p é fator de multiplicidade $s \geq 1$ de f se, e sòmente se, p é fator de multiplicidade $s-1$ de Df.

d) Seja E um corpo que contém K como subcorpo e suponhamos que exista x em E tal que $f(x)=0$; demonstrar que x é raiz de multiplicidade $s \geq 1$ de f se, e sòmente se, $(D^i f)(x)=0$ para $i=0,s,\cdots,s-1$ e $(D^s f)(x) \neq 0$.

As propriedades acima são verdadeiras quando o corpo K tem característica diferente de zero?

70. Seja E um corpo de característica zero e seja K um subcorpo de E; consideremos o anel de polinômios $E[X]$ e seja $f \in K[X]$ um polinômio não constante. Verificar as seguintes propriedades:

a) Se $f = ap_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ é a decomposição de f em fatôres irredutíveis e unitários, então

$$mdc(f, Df) = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_s^{\alpha_s - 1}.$$

b) f admite um fator múltiplo em $K[X]$ se, e sòmente se, $mdc(f, Df) \neq 1$.

c) Se $x \in E$ é raiz do polinômio f e se f é irredutível em $K[X]$, então x é raiz simples de f.

d) Se $x \in E$ é raiz de f, então x é raiz múltipla de f se, e sòmente se, $mdc(f, Df) \neq 1$.

e) Se f é irredutível em $K[X]$, então $mdc(f, Df) = 1$.

71. Aplicar o exercício anterior para mostrar que os seguintes polinômios de $\mathbf{Q}[X]$ não são irredutíveis:

a) $X^4 + X^3 + X + 1$;

b) $X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 8X^2 + 4X - 8$;

c) $X^6 - 2X^5 + X^4 + 2X^3 - 5X^2 + 4X - 2$.

72. Determinar condições sôbre a e b para que o polinômio $X^4 + aX^3 + bX^2 + 4 \in \mathbf{Q}[X]$ tenha pelo menos uma raiz complexa múltipla.

73. Determinar a de modo que o polinômio $X^5 - 5X - a \in \mathbf{Q}[X]$ tenha uma raiz múltipla em K nos seguintes casos: $K = \mathbf{Q}$ e $K = \mathbf{Q}[i]$.

§3 - ANEL DE POLINÔMIOS SÔBRE UM ANEL FATORIAL

3.1 - POLINÔMIOS IRREDUTÍVEIS EM $A[X]$

Seja A um anel fatorial e seja K o corpo de frações de A; consideremos o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes em K, notemos que $A[X] \subset K[X]$ e, além disso, $A[X]$ é um anel de polinômios em X e com coeficientes em A. No que se segue manteremos sempre os significados acima para estas notações. Introduziremos, inicialmente, o conceito de polinômio primitivo pela

DEFINIÇÃO 14 - Diz-se que um polinômio não nulo

$$f^* = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \in A[X]$$

é *primitivo* se, e sòmente se, seus coeficientes $b_0, b_1, \cdots, b_n$ são relativamente primos.

Observemos que um polinômio constante f^* é primitivo se, e sòmente se, f^* é inversível em A, isto é, $f^* \in U(A) = U(A[X])$. É imediato que se pelo menos um dos coeficientes b_i é inversível, então f^* é primitivo e que se $f^* \neq 0$ não é primitivo, então existe um elemento irredutível $p \in A$ que é divisor de todos os coeficientes de f^*.

LEMA 9 - Um elemento $d \in A$ é um *mdc* dos coeficientes de um polinômio não nulo

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$$

se, e sòmente se, existe um polinômio primitivo $f^* \in A[X]$ tal que $f = fd^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que d seja um *mdc* dos coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ de f e ponhamos $a_i = db_i$ para $i = 0, 1, \cdots, n$; conforme o exercício 20, os elementos $b_0, b_1, \cdots, b_n$ são relativamente primos, logo, o polinômio $f^* = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ é primitivo e é imediato que $f = df^*$. Recìprocamente, suponhamos que exista um polinômio primitivo f^* tal que $f = df^*$ e seja d_1 um *mdc* dos coeficientes de f; como d é um divisor comum dos coeficientes de f, temos $d \mid d_1$, logo, $d_1 = ud$ com $u \in A$. Por outro lado, conforme vimos acima, existe um polinômio primitivo $f_1^* \in A[X]$ tal que $f = d_1 f_1^*$, de onde vem, $uf_1^* = f^*$, logo, u é um divisor comum dos coeficientes de f^*, portanto, $u \in U(A)$; daqui se conclui que d e d_1 são associados e então d é um *mdc* dos coeficientes de f. ∎

COROLÁRIO - Se f é um polinômio não nulo de $A[X]$ e se $f = df^* = d_1 f_1^*$, onde d e d_1 são constantes e f^* e f_1^* são polinômios primitivos, então $d \sim d_1$ e, portanto, $f^* \sim f_1^*$.

LEMA 10 (Gauss) - O produto de dois polinômios primitivos é primitivo.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos dois polinômios primitivos

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \text{e} \quad g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

do anel $A[X]$ e suponhamos, por absurdo, que o polinômio produto

$$fg = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k,$$

onde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

não seja primitivo (nesta última fórmula colocamos $a_i = 0$ se $i > n$ e $b_j = 0$ se $j > m$); existe, então, um elemento irredutível $p \in A$ tal que $p | c_k$ para $k = 0, 1, \cdots, m+n$. Por outro lado, como f e g são primitivos, resulta que p não divide todos os coeficientes de f e também não divide todos os coeficientes de g, logo, existem números naturais r e s, com $0 \leqslant r \leqslant n$ e $0 \leqslant s \leqslant m$, tais que $p \nmid a_r$, $p \nmid b_s$, $p | a_i$ para $i < r$ e $p | b_j$ para $j < s$; considerando-se o coeficiente c_{r+s} de fg, temos

$$c_{r+s} = (a_0 b_{r+s} + \cdots + a_{r-1} b_{s+1}) + a_r b_s + (a_{r+1} b_{s-1} + \cdots + a_{r+s} b_0),$$

de onde vem, $p | (a_r b_s)$, portanto, $p | a_r$ ou $p | b_s$, pois, p é primo e A é fatorial, contra a definição dos elementos a_r e b_s. ∎

LEMA 11 - Todo polinômio não nulo φ, de $K[X]$, pode ser representado sob a forma $\varphi = \frac{a}{b} f^*$, onde a e b são elementos de A^* e $f^* \in A[X]$ é primitivo; além disso, se $\varphi = \frac{c}{d} f_1^*$ onde c e d são elementos de A^* e $f_1^* \in A[X]$ é primitivo, então $ad \sim bc$ e $f^* \sim f_1^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$, onde $\alpha_i \in K$ e ponhamos $\alpha_i = a_i / b_i$, com a_i e b_i em A e $b_i \neq 0$; se $b = b_0 b_1 \cdots b_n$, temos $\varphi = \frac{1}{b} f$, com $f \in A[X]$. Ora, de acôrdo com o lema 9, existe um polinômio primitivo $f^* \in A[X]$ e existe $a \in A$ tais que $f = a f^*$, portanto, $\varphi = \frac{a}{b} f^*$, onde a e b são elementos de A^* e f^* é primitivo em $A[X]$. Por outro lado, de $\varphi = \frac{c}{d} f_1^*$ resulta $a d f^* = b c f_1^*$, logo, em virtude do corolário do lema 9, temos $ad \sim bc$ e $f^* \sim f_1^*$. ∎

LEMA 12 - Seja f um polinômio não constante do anel $A[X]$; se f é primitivo e se f é redutível em $K[X]$, então f também é redutível em $A[X]$.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese existem polinômios não constantes φ_1 e φ_2, de $K[X]$, tais que $f = \varphi_1 \varphi_2$; de acôrdo com o lema anterior, temos $\varphi_i = (a_i / b_i) f_i^*$, onde a_i e b_i são elementos de A^*, $f_i^* \in A[X]$ é primitivo e é imediato que f_i^* é não constante, pois, $\partial f_i^* = \partial \varphi_i$. Daqui resulta que

$$(b_1 b_2) f = (a_1 a_2)(f_1^* f_2^*),$$

de onde vem, conforme o lema de Gauss e o corolário do lema 9, $a_1 a_2 = b_1 b_2 u$ com $u \in U(A)$, logo, $f = (u f_1^*) f_2^*$, onde $u f_1^*$ e f_2^* são polinômios não constantes de $A[X]$; portanto, f é redutível em $A[X]$.

TEOREMA 24 - Um polinômio não constante f, de $A[X]$, é irredutível em $A[X]$ se, e sòmente se, f é primitivo em $A[X]$ e f é irredutível em $K[X]$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que f seja irredutível em $A[X]$; se f não fôsse primitivo, existiria um elemento irredutível $p \in A$ que seria divisor comum de todos os coeficientes de f, logo, $f = p f_0$, com $f_0 \in A[X]$ e f_0 não constante, portanto, f seria redutível em $A[X]$, contra a hipótese. Fica assim demonstrado que f é primitivo em $A[X]$ e como f é irredutível em $A[X]$, resulta do lema anterior que f também é irredutível em $K[X]$. Recìprocamente, suponhamos que f seja primitivo em $A[X]$ e irredutível em $K[X]$ e consideremos dois polinômios f_1 e f_2, de $A[X]$, tais que $f = f_1 f_2$. Ora, esta última igualdade também é verdadeira em $K[X]$ e como f é irredutível em $K[X]$ resulta, imediatamente, que f_1 ou f_2 é constante; supondo-se, por exemplo, que $f_1 = u \in A$, tem-se $f = u f_2$, logo, u é um divisor comum de todos os coeficientes de f e como êste polinômio é primitivo em $A[X]$ concluímos que $u \in U(A)$, portanto, f é irredutível em $A[X]$. ∎

Os teoremas 5 e 24 determinam o conjunto de todos os polinômios irredutíveis de $A[X]$: um elemento $p \in A[X]$, com $p \notin U(A) \cup \{0\}$, é irredutível em $A[X]$ se, e sòmente se, p satisfaz uma das seguintes condições:

a) p é constante e p é irredutível em A;

b) p não é constante, mas p é irredutível em $K[X]$ e p é primitivo em $A[X]$.

TEOREMA 25 - Sejam f, φ_1 e φ_2 polinômios não nulos e unitários do anel $K[X]$ tais que $f = \varphi_1 \varphi_2$; nestas condições, se $f \in A[X]$, então $\varphi_i \in A[X]$ para $i = 1, 2$.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme o lema 11, temos

$$\varphi_i = (a_i / b_i) f_i^* \qquad (23),$$

onde a_i e b_i são elementos de A^* e $f_i^* \in A[X]$ é primitivo, logo,

$$(b_1 b_2) f = (a_1 a_2)(f_2^* f_2^*);$$

como f e $f_1^* f_2^*$ são primitivos, resulta da igualdade acima e do corolário do lema 9 que existe $u \in U(A)$ tal que $b_1 b_2 = a_1 a_2 u$.

Por outro lado, indicando-se por a_i^* o coeficiente dominante de f_i^*, temos $b_1b_2 = a_1a_2a_1^*a_2^*$, logo, $a_1^*a_2^* = u$, de onde vem, $a_i \in U(A)$; mas de (23) concluímos que $b_i = a_ia_i^*$; portanto, b_i é um divisor de a_i em A e então $\varphi_i \in A[X]$. ∎

COROLÁRIO - Se f é um polinômio não constante e unitário do anel $A[X]$ e se $x \in K$ é raiz de f, então $x \in A$.

Com efeito, de acôrdo com o teorema 3, temos $f = (X-x)f_1$, onde $f_1 \in K[X]$ é unitário; portanto, em virtude do teorema anterior, teremos $X-x \in A[X]$, logo, $x \in A$. ∎

LEMA 13 - Sejam f, g e b elementos de $A[X]$; se $g|(bf)$, se $b \in A^*$ e se g é primitivo, então $g|f$.

DEMONSTRAÇÃO - Temos $bf = gh$, com $h \in A[X]$; mas $f = af^*$ e $h = ch^*$, onde a e c são constantes, f^* e h^* são primitivos, logo,

$$(ab)f^* = c(gh^*);$$

portanto, de acôrdo com os lemas 9 e 10, temos $abu = c$ com $u \in U(A)$, de onde vem, $f^* = g(uh^*)$, ou, $g|f^*$, logo, $g|(af^*)$, isto é, $g|f$. ∎

COROLÁRIO - Sejam f e g elementos de $A[X]$ e suponhamos que g seja primitivo; se g é um divisor de f em $K[X]$, então g também é um divisor de f em $A[X]$.

Com efeito, temos $f = gh$, com $h \in K[X]$; mas $h = (a/b)h^*$, onde a e b são elementos de A^* e $h^* \in A[X]$ é primitivo, logo, $bf = g(ch^*)$. Desta igualdade resulta que g é um divisor de bf em $A[X]$; portanto, de acôrdo com o lema acima, g é um divisor de f em $A[X]$. ∎

EXERCÍCIOS

74. Determinar todos os divisores do polinômio $10X^2+5X-15 \in \mathbf{Z}[X]$.

75. Representar cada um dos seguintes polinômios de $A[X]$ como o produto de uma constante por um polinômio primitivo:

a) $144X^3+36X^2+136X+90$, $A = \mathbf{Z}$;

b) $(1-t^2)X^2+(1-2t+t^2)X+(1-t^3)$, $A = \mathbf{Q}[t]$ e t é transcendente sôbre $\mathbf{Q}$;

c) $(t^3-7t+6)X^3+(t^2-3t+2)X+(t^3-4t^2+3t)$, onde $A = \mathbf{Q}[t]$ e t é transcendente sôbre $\mathbf{Q}$. (Ver o exercício 49).

76. Representar cada um dos seguintes polinômios de $K[X]$ como o produto de um elemento de K (corpo de frações de A) por um polinômio primitivo de $A[X]$:

a) $\frac{1}{12}X^2+\frac{5}{42}X+9$, $A = \mathbf{Z}$;

b) $X^3-\frac{2}{3}X^2+\frac{4}{9}X-\frac{9}{27}$, $A = \mathbf{Z}$;

c) $\frac{2t}{1-t^2}X^2+\frac{1+t}{(1-t)^2}X+\frac{1-t}{(1+t)^2}$, $A = \mathbf{Q}[t]$ e t é transcendente sôbre $\mathbf{Q}$.

77. Sejam a e n dois números naturais não nulos; se a não é potência n-ésima de um número natural, então o número real $\sqrt[n]{a}$ é irracional. Sugestão: aplicar o corolário do teorema 25 ao polinômio X^n-a

78. Mostrar que o anel $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ não é fatorial. Sugestão: considerar o elemento $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ do corpo de frações dêste anel e aplicar o corolário do teorema 25.

79. Em que condições sôbre b o polinômio $3X^2+bX+5 \in \mathbf{Z}[X]$ é irredutível em $\mathbf{Z}[X]$? Sugestão: teorema 24.

80. Consideremos o anel de polinômios $K[X_1, X_2]$ nas indeterminadas X_1 e X_2 e com coeficientes num corpo K; mostrar que se f e g são dois polinômios primos entre si de $K[X_1]$, então o polinômio X_2f+g é irredutível em $K[X_1, X_2]$. Sugestão: teorema 24.

3.2 - TEOREMA DE GAUSS

O teorema principal desta secção é devido a Gauss e é o seguinte

TEOREMA 26 - Se A é um anel fatorial, então o anel de polinômios $A[X]$ é fatorial.

DEMONSTRAÇÃO - Mostraremos que $A[X]$ satisfaz as condições AF1 e AF3.

AF1. Conforme o lema 9 basta demonstrar que todo polinômio primitivo e não constante, de $A[X]$, é um produto de elementos irredutíveis em $A[X]$; notemos que êstes fatôres irredutíveis serão, necessàriamente, polinômios não constantes e primitivos em virtude do teorema 24. Consideremos, então, o conjunto S de todos os polinômios não constantes e primitivos, de $A[X]$, que não são produtos de elementos irredutíveis em $A[X]$ e suponhamos, por absurdo, que S não seja vazio; portanto, existe em S um polinômio f_0 de grau mínimo e temos $\partial f_0 > 0$. O polinômio f_0 é redutível, logo, existem polinômios f_1 e f_2 em $A[X]$, com $f_i \notin U(A) \cup \{0\}$, tais que $f_0 = f_1f_2$; como f_0 é primitivo resulta que cada f_i é não constante e primitivo e é imediato que $0 < \partial f_i < \partial f$ $(i = 1, 2)$, portanto, $f_i \notin S$. Daqui concluimos que f_1 e f_2 são produtos de elementos irredutíveis em $A[X]$, logo, $f_0 = f_1f_2$ também é um produto de elementos irredutíveis em $A[X]$, contra a definição de f_0.

AF3. Seja p um elemento irredutível do anel $A[X]$ e suponhamos que $p|(fg)$, com f e g em $A[X]$, $g\neq 0$ e $p\nmid f$. Precisamos demonstrar que $p|g$ e para isso distinguiremos dois casos conforme p seja constante ou não.

a) $p\in A$. Temos $fg=ph$, com $h\in A[X]$; mas $f=af^*$, $g=bg^*$ e $h=ch^*$, onde a, b e c são constantes, f^*, g^* e h^* são primitivos, logo, $abf^*g^*=pch^*$, de onde vem, conforme os lemas 9 e 10, $ab\sim pc$ e então $p|(ab)$. Notando-se que $p\nmid a$, pois, por hipótese, $p\nmid f$ e que A é um anel fatorial, teremos $p|b$, logo, $p|(bg^*)$, ou seja, $p|g$.

b) p não é constante. Consideremos o anel de polinômios $K[X]$ com coeficientes no corpo de frações K do anel A; conforme o corolário do teorema 15, $K[X]$ é um anel fatorial. Como p é não constante e irredutível em $A[X]$ resulta, em virtude do teorema 24, que p é primitivo em $A[X]$ e é irredutível em $K[X]$; por outro lado, p não é divisor de f em $A[X]$, logo, de acôrdo com o corolário do lema 13, p também não é divisor de f em $K[X]$ e como p é um divisor de fg em $K[X]$ concluímos que p é um divisor de g em $K[X]$ e, portanto, conforme o mesmo corolário, p é um divisor de g em $A[X]$. ∎

Do teorema acima resultam, imediatamente, os seguintes corolários:

COROLÁRIO 1 - Se A é um anel fatorial, então o anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ e com coeficientes em A, também é um anel fatorial.

COROLÁRIO 2 - Todo anel de polinômios $K[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ e com coeficientes num corpo K, é um anel fatorial.

Podemos agora dar um exemplo de anel fatorial que não satisfaz a condição AF6, logo, êste anel não é, evidentemente, um anel principal (ver a secção 2.1):

EXEMPLO 15 - O anel de polinômios $K[X_1,X_2]$, nas indeterminadas X_1 e X_2 e com coeficientes num corpo K, é um anel fatorial (corolário 2 do teorema 26); os elementos X_1 e X_2 são primos entre si e é imediato que não existem polinômios r e s, em $K[X]$, tais que $rX_1+sX_2=1$.

Daremos, a seguir, uma outra verificação da parte b) da demonstração do teorema de Gauss que não utilizará as propriedades dos anéis euclidianos e será baseada no teorema 5 do Capítulo VI. Consideremos o conjunto S de todos os polinômios não nulos, de $A[X]$, que são da forma $rf+sp$, com r e s em $A[X]$; é imediato que S é não vazio, logo, existe um polinômio h em S de grau mínimo e existem polinômios r e s em $A[X]$ tais que $h=rf+sp$. Indicando-se por a o coeficiente dominante de h e aplicando-se o teorema 5 do Capítulo VI aos polinômios f e h resulta que existem polinômios q e t em $A[X]$ e existe um número natural k tais que

$$a^kf=qh+t,$$

onde $\partial t<\partial h$ se $t\neq 0$. Ora, temos

$$t=a^kf-qh=(a^k-qr)f+(-qs)p,$$

logo, se $t\neq 0$ teríamos $t\in S$, contra a definição do polinômio h; portanto, $t=0$ e então $a^kf=qh$. Mas $h=bh^*$, onde $b\in A$ e h^* é primitivo, logo, $a^kf=bh^*q$, de onde resulta, em virtude do lema 13, $h^*|f$. De modo completamente análogo demonstra-se que $h^*|p$ e como, por hipótese, $p\nmid f$ teremos $h^*\in U(A)$ e então, $h\in A$; finalmente, de $h=rf+sp$ vem $hg=r(fg)+s(gp)$, logo, $p|(hg)$, de onde vem, de acôrdo com o lema 13, $p|g$. ∎

EXERCÍCIOS

81. Determinar uma decomposição em fatôres irredutíveis e unitários dos seguintes polinômios de $A[X]$:

a) $6X^2-12X+6$, $A=\mathbf{Z}$;

b) $5X^3-5$, $A=\mathbf{Z}$;

c) $12(X^2+1)(X^2-X-2)$, $A=\mathbf{Z}$;

d) $6(1-t^2)X^2+30(1-t)^2X+42(1-t)$, $A=\mathbf{Q}[t]$ e t é transcendente sôbre $\mathbf{Q}$.

82. Determinar um *mdc* e um *mmc* dos polinômios f e g, de $A[X]$, nos seguintes casos:

a) $f=2X^2+4X+2$, $g=18(X^2-1)$, $A=\mathbf{Z}$;

b) $f=12(X^3-1)$, $g=8(X^2-1)$, $A=\mathbf{Z}$;

c) $f=6(1+t)X^2-(12t+12t^3)X+(-6t^2+6t^3+6t^4-6t^5)$,
$g=8(1-t)X^2-16(1-t)X+8(t^3-2t^4+t^5)$,
$A=\mathbf{Q}[t]$ e t é transcendente sôbre $\mathbf{Q}$.

83. Decompor em fatôres irredutíveis os seguintes polinômios de $\mathbf{Z}[X_1,X_2]$:

a) $X_1^2+X_1+X_1X_2+X_2$;

b) $12X_1^2-3X_2^2$;

c) $(X_1^2-4)X_1^2+(X_1-2)X_2+(X_1-2)$;

d) $X_1^5+3X_1^3X_2+3X_1^2+9X_2$.

84. Determinar um *mdc* e um *mmc* dos polinômios dados nas partes a) e b), a) e c) do exercício anterior.

85. Determinar todos os polinômios irredutíveis de graus 1, 2 e 3 do anel $F_2[X_1, X_2]$.

86. Demonstrar que os polinômios $X_1^2 \pm X_2$ e $aX_1 + bX_2$, de $K[X_1, X_2]$, onde a e b não são nulos simultâneamente, são irredutíveis.

87. Se $f \in K[X_1, X_2]$ é tal que $f(X_1, X_1) = 0$, então f é divisível por $X_1 - X_2$. Generalizar para polinômios com maior número de indeterminadas.

88. Demonstrar que se $f \in K[X_1, X_2, X_3]$ é divisível por $X_2 - X_3$, $X_3 - X_1$ e $X_1 - X_2$, então f é divisível pelo produto $(X_2 - X_3)(X_3 - X_1)(X_1 - X_2)$. Aplicar êste resultado ao polinômio

$$f = X_1X_2^n + X_2X_3^n + X_3X_1^n - X_1^nX_2 - X_2^nX_3 - X_3^nX_1,$$

onde $n \in \boldsymbol{N}^*$.

89. Decompor em fatôres do primeiro grau os seguintes polinômios de $\boldsymbol{Q}[X_1, X_2, X_3]$:

a) $(X_2 - X_3)^3 + (X_3 - X_1)^3 + (X_1 - X_2)^3$;

b) $X_1^3(X_2 - X_3) + X_2^3(X_3 - X_1) + X_3^3(X_1 - X_2)$.

90. Simplificar a fração racional pertencente a $\boldsymbol{Q}(X_1, X_2, X_3)$:

$$\frac{X_1^3(X_2 - X_3) + X_2^3(X_3 - X_1) + X_3^3(X_1 - X_2)}{X_1^2(X_2 - X_3) + X_2^2(X_3 - X_1) + X_3^2(X_1 - X_2)}.$$

91. Calcular

$$\frac{X_1^3}{(X_1 - X_2)(X_1 - X_3)} + \frac{X_2^3}{(X_2 - X_3)(X_2 - X_1)} + \frac{X_3^3}{(X_3 - X_1)(X_3 - X_2)}$$

em $\boldsymbol{Q}(X_1, X_2, X_3)$.

3.3 - CRITÉRIO DE IRREDUTIBILIDADE DE EISENSTEIN

Nem sempre é fácil verificar se um dado polinômio não constante é irredutível ou não; um dos critérios mais simples é devido a Eisenstein (1823-1852):

TEOREMA 27 - Se $f = \sum_{k=0}^{r} c_k X^k$ é um polinômio de grau $r > 0$, com coeficientes num anel fatorial A e se existe um elemento irredutível p em A tal que

$$p^2 \nmid c_0,\ p \nmid c_r \text{ e } p \mid c_k \text{ para } k = 0, 1, \cdots, r-1,$$

então o polinômio f é irredutível em $K[X]$, onde K é o corpo de frações de A.

DEMONSTRAÇÃO - Mostraremos, inicialmente, que não existem polinômios não constantes

$$g = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \quad \text{e} \quad h = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j,$$

em $A[X]$, tais que $f = gh$. Com efeito, suponhamos por absurdo que existam g e h satisfazendo as condições acima; como $a_0b_0 = c_0$ teremos $p \mid (a_0b_0)$, logo, $p \mid a_0$ ou $p \mid b_0$ e como $p^2 \nmid c_0$ resulta que p é divisor de um, e sòmente um, dos elementos a_0 ou b_0 e podemos, então, supor que $p \mid a_0$. Por outro lado, $p \nmid (a_mb_n)$, logo, $p \nmid a_m$ e então existe um menor índice i, com $0 < i \leqslant m < r$ tal que $p \nmid a_i$; mas $p \mid c_i$ e

$$c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$$

(onde colocamos $b_j = 0$ se $j > m$), portanto, $p \mid (a_ib_0)$, o que é absurdo, pois, $p \nmid a_i$ e $p \nmid b_0$.

Finalmente, temos $f = af^*$, onde $a \in A$ e $f^* \in A[X]$ é primitivo; em virtude da proposição acima, f^* é irredutível em $A[X]$, logo, conforme o teorema 24, f^* também é irredutível em $K[X]$ e como f é associado a f^*, em $K[X]$, concluímos que f é irredutível em $K[X]$. ∎

EXEMPLO 16 - Seja a um número inteiro composto que só admite fatôres primos simples, isto é, $a = \pm p_1p_2 \cdots p_s$, onde cada p_i é um número primo positivo e $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant s)$; de acôrdo com o critério de irredutibilidade de Eisenstein, o polinômio $a + X^n$ é irredutível em $\boldsymbol{Q}[X]$, para todo número natural $n \geqslant 1$.

No exemplo acima pudemos aplicar diretamente o critério de Eisenstein; às vêzes precisamos efetuar certas transformações no polinômio considerado para que êle satisfaça as hipóteses do teorema 27 e convém, então, observar o seguinte: se σ é um automorfismo de $A[X]$ e se p é um elemento dêste anel, então p é irredutível se, e sòmente se, $\sigma(p)$ é irredutível. Na maioria dos casos escolhe-se σ como o A-automorfismo de $A[X]$ tal que $\sigma(X) = X + a$, onde $a \in A$ (ver o teorema 18 do Capítulo VI).

EXEMPLO 17 - Consideremos o *polinômio ciclotômico*

$$\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$$

com coeficientes em $\boldsymbol{Z}$, onde p é um número natural primo. Neste caso, não podemos aplicar diretamente o teorema 27. Ora, seja σ o $\boldsymbol{Z}$-automorfismo do anel $\boldsymbol{Z}[X]$ tal que $\sigma(X) = X + 1$ e notemos que $\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$, logo,

$$\sigma(\Phi_p(X)) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \binom{p}{p-1} + \binom{p}{p-2}X + \cdots + \binom{p}{1}X^{p-2} + X^{p-1};$$

êste polinômio satisfaz as condições do teorema 27 para o número primo p, portanto, $\sigma(\Phi_p(X))$ é irredutível em $\boldsymbol{Q}[X]$ e daqui resulta que o polinômio $\Phi_p(X)$ também é irredutível em $\boldsymbol{Q}[X]$.

EXERCÍCIOS

92. Aplicar o critério de irredutibilidade de Eisenstein aos seguintes polinômios de $\mathbf{Z}[X]$:

a) X^3+2X^2+4X+2;

b) X^4+4X^2+10;

c) X^6-6X^4+12;

d) X^7-47;

e) $X^{10}-21X^8+98X^6-14X^4+7X^2-14$;

f) $12X^6-60X^4+120X^2-10$.

93. Utilizando-se o processo dado no exemplo 17 mostrar que os seguintes polinômios são irredutíveis em $\mathbf{Q}[X]$:

a) X^6+X^3+1;

b) X^3+3X+2;

c) X^3+6X^2+1;

d) $X^3-13X^2+51X-61$.

94. Mostrar que o polinômio $f=X^5+X^3+1\in\mathbf{Z}[X]$ é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$. Observação: Notar que não é possível aplicar o processo dado no exemplo 17, isto é, não existe $n\in\mathbf{Z}$ tal que $f(X+n)$ satisfaça as hipóteses do teorema 27 (ver também o exercício 103).

95. Aplicar o critério de Eisenstein ao polinômio

$$X_1^3+3X_1^2X_2^2+2X_1X_2+X_1^4X_2+7X_1$$

pertencente ao anel $\mathbf{Q}[X_1,X_2]$. Sugestão: $\mathbf{Q}[X_1,X_2]=(\mathbf{Q}[X_1])[X_2]$ e $p=X_1$.

96. Aplicar o teorema 27 e o processo dado no exemplo 17 aos seguintes polinômios de $A[X]$:

a) X^3-2X+3, $A=\mathbf{Z}$;

b) $X^4+12X^3+50X^2+84X+47$, $A=\mathbf{Z}$;

c) $X^3+(2t+2)X+(t+1)$, $A=\mathbf{Z}[t]$ e t é transcendente sôbre $\mathbf{Z}$;

d) $X^3+3(t+1)X^2+3(t+1)^2X+(t^3+3t^2+4t)$, $A=\mathbf{Z}[t]$ e t é transcendente sôbre $\mathbf{Z}$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §3

97. Seja f um polinômio não constante do anel $A[X]$, onde A é um anel com *mdc*; demonstrar que f é irredutível em $A[X]$ se, e sòmente se, os coeficientes de f são relativamente primos e o grau de todo divisor de f, em $A[X]$, é zero ou ∂f.

98. Seja f um polinômio não constante do anel $A[X]$, onde A é um anel com *mdc* e seja K o corpo de frações de A; demonstrar que se f é irredutível em $K[X]$ e se os coeficientes de f são relativamente primos em A, então f é irredutível em $A[X]$.

99. Demonstrar que o lema 9 e o corolário dêste lema ainda são verdadeiros quando se supõe que A seja um anel com *mdc*.

100. Consideremos os anéis de polinômios $\mathbf{Z}[X]$ e $F_p[X]$, onde p é um número natural primo e para todo $a\in\mathbf{Z}$ indiquemos por $\bar{a}$ o resto da divisão euclidiana de a por p. a) Mostrar que a aplicação $\varphi:\mathbf{Z}[X]\to F_p[X]$, definida por $\varphi(\sum_{i=0}^{n}a_iX^i)=\sum_{i=0}^{n}\bar{a}_iX^i$ é um epimorfismo. b) Demonstrar que se f é um polinômio não constante e unitário, de $\mathbf{Z}[X]$, e se $\varphi(f)$ é irredutível em $F_p[X]$, então f é irredutível em $\mathbf{Z}[X]$.

101. Aplicar o exercício anterior aos seguintes polinômios de $\mathbf{Z}[X]$:

a) $X^3+6X^2+5X+25$;

b) $X^3+6X^2+11X+8$;

c) $X^4+8X^3+X^2+2X+3$;

d) X^4+8X^3+15.

102. Demonstrar que se o anel fatorial A não é um corpo, então $A[X]$ não satisfaz a condição AF6; portanto, $A[X]$ não é um anel euclidiano.

103. Seja $f=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$ um polinômio não constante do anel $\mathbf{Z}[X]$, onde $\partial f=n$ é ímpar, $b_n=b_{n-2}=1$ e $b_{n-1}=0$; demonstrar que para todo a em $\mathbf{Z}$ o polinômio $f(X+a)$ não satisfaz as hipóteses do critério de irredutibilidade de Eisenstein.

104. Seja A um anel fatorial, seja K o corpo de frações de A e consideremos o anel de polinômios $K[X]$; seja $f=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in A[X]$, onde $a_n\neq 0$ e $n>0$. Demonstrar que se p é um elemento irredutível em A e se

$$p\nmid a_n,\ p\mid a_m,\ p^2\nmid a_0 \text{ e } p\mid a_k \text{ para } k=0,1,\cdots,m-1,$$

onde $0<m\leq n$, então existe $g\in K[X]$, g irredutível tal que $g\mid f$ e $\partial g\geq m$.

§4 - IDEAIS

4.1 - DEFINIÇÕES; ANEL QUOCIENTE

Neste parágrafo só consideraremos anéis comutativos com elementos unidades e em geral abreviaremos a frase «seja A um anel comutativo com elemento unidade» dizendo, simplesmente, «seja A um anel comutativo».

Consideremos um elemento b de um anel comutativo A e indiquemos por Ab o conjunto de todos os elementos de A que são múltiplos de b; temos

$$xb-yb=(x-y)b \quad \text{e} \quad z(xb)=(zx)b,$$

quaisquer que sejam os elementos x, y e z de A, logo, o conjunto Ab é fechado em relação à subtração e é estável em relacão à multiplicação. Um subconjunto do anel A que satisfaz estas propriedades é denominado ideal de A; êste conceito será introduzido de modo preciso pela

DEFINIÇÃO 15 - Diz-se que um subconjunto M, de um anel comutativo A, é um *ideal* de A se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

I1: $M \neq \emptyset$;

I2: quaisquer que sejam a e b em A, se $a \in M$ e se $b \in M$, então $a-b \in M$;

I3: quaisquer que sejam a e c em A, se $a \in M$, então $ac \in M$.

EXEMPLO 18 - Os subconjuntos $\{0\}$ e A são ideais do anel A que são, respectivamente, denominados *ideal nulo* e *ideal unitário.*

EXEMPLO 19 - Sejam A e A' dois anéis comutativos e seja f um homomorfismo de A em A'; é fácil verificar que o subconjunto (ver o §1.7 do Capítulo IV)

$$Ker(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$$

é um ideal do anel A.

As seguintes propriedades de um ideal M, de um anel comutativo A, são de verificação imediata e serão deixadas a cargo do leitor:

a) $0 \in M$;

b) para todo a em M, tem-se $-a \in M$;

c) M é fechado em relação à adição;

d) se $M \cap U(A) \neq \emptyset$, então $M = A$.

Como conseqüência imediata da última propriedade acima resulta que os únicos ideais de um corpo K são $\{0\}$ e K.

Seja M um ideal de um anel comutativo A e consideremos a relação R definida do seguinte modo: quaisquer que sejam x e y em A, temos xRy se, e sòmente se, $x-y \in M$. Verifica-se, fàcilmente, que a relação R é reflexiva (pois, $0 \in M$), é simétrica (pois, $a \in M$ implica $-a \in M$) e é transitiva (pois, M é fechado em relação à adição). Portanto, R é uma relação de equivalência sôbre o conjunto A, que será denominada *relação de equivalência determinada pelo ideal* M. No que se segue substituiremos a notação xRy por $x \equiv y$ (mod. M) (leia-se: x é equivalente a y módulo M).

TEOREMA 28 - Seja A um anel comutativo e seja M um ideal de A; valem as seguintes propriedades:

a) a relação de equivalência determinada pelo ideal M é compatível com a adição e com a multiplicação;

b) a classe de equivalência $\overline{x}$, determinada por um elemento x de A, é o conjunto $x+M$ de tôdas as somas $x+t$ com t em M.

DEMONSTRAÇÃO - a) Sejam x e y dois elementos quaisquer de A e suponhamos que $x \equiv y$ (mod. M), logo, $x-y \in M$; notando-se que

$$(x+z)-(y+z) = x-y \in M \quad \text{e} \quad xz-yz = (x-y)z \in M$$

resulta

$$x+z \equiv y+z \text{ (mod. } M) \quad \text{e} \quad xz \equiv yz \text{ (mod. } M).$$

b) Se $y \in \overline{x}$, temos $y \equiv x$ (mod. M), ou seja, $y-x \in M$ e como $y = x+(y-x)$ concluímos que $y \in x+M$; portanto, $\overline{x} \subset x+M$. Por outro lado, se $y \in x+M$, temos $y = x+t$, com t em M, logo, $y-x = t \in M$, de onde vem, $y \equiv x$ (mod. M), ou seja, $y \in \overline{x}$ e então $x+M \subset \overline{x}$. ∎

COROLÁRIO - Quaisquer que sejam x, y, x' e y' em A, se $x \equiv x'$ (mod. M) e se $y \equiv y'$ (mod. M), então $x+x' \equiv y+y'$ (mod. M) e $xx' \equiv yy'$ (mod. M).

Indicaremos por A/M o conjunto quociente de A pela relação de equivalência determinada pelo ideal M, logo, A/M é o conjunto de tôdas as classes de equivalência $x+M$ com x em A. Se $x+M$ e $y+M$ são dois elementos quaisquer de A/M colocaremos, por definição,

$$(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$$

e

$$(x+M)\cdot(y+M) = xy+M.$$

O corolário do teorema 28 nos mostra que estas definições, de soma e de produto de duas classes de equivalência módulo M, não dependem dos representantes destas classes; portanto, ficam assim definidas operações de adição e de multiplicação sôbre o conjunto quociente A/M e temos o seguinte

TEOREMA 29 - Seja M um ideal de um anel comutativo A e consideremos o conjunto quociente A/M; as operações de adição e de multiplicação

$$(x+M, y+M) \mapsto (x+y)+M \quad \text{e} \quad (x+M, y+M) \mapsto xy+M$$

definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sôbre o conjunto A/M,

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos verificar que estas operações satisfazem os axiomas A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3 e D da definição de anel comutativo com elemento unidade (ver §1.1 do Capítulo IV); só faremos as verificações de A3, A4 e M3 e deixaremos as outras a cargo do leitor.

A3. De $(x+M)+(0+M)=(x+0)+M=x+M$ concluímos que a classe de equivalência $0+M=M$ é o elemento neutro para a operação de adição.

A4. Para tôda classe de equivalência $x+M\in A/M$, temos

$$(x+M)+[(-x)+M]=[x+(-x)]+M=0+M=M,$$

logo, $-(x+M)=(-x)+M$.

M3. Para todo elemento $x+M$ de A/M, temos

$$(x+M)(1+M)=(x\cdot 1)+M=x+M,$$

logo, $1+M$ é o elemento neutro para a operação de multiplicação. ∎

O anel $(A/M,+,\cdot)$ passa a ser denominado *anel quociente* do anel comutativo A pelo ideal M. Observemos que a aplicação $q: A\to A/M$, definida por $q(x)=x+M$, é um homomorfismo; diremos que q é o *homomorfismo canônico de A em A/M*. Notemos ainda que

$$Im(q)=A/M \quad \text{e} \quad Ker(q)=M.$$

TEOREMA 30 - Seja f um homomorfismo de um anel comutativo A num anel comutativo A', seja $M=Ker(f)$ e indiquemos que q o homomorfismo canônico de A em A/M; nestas condições, temos:

a) existe uma única aplicação $f^*: A/M\to A'$ tal que $f^*\circ q=f$;

b) f^* é um monomorfismo e $Im(f^*)=Im(f)$;

c) $A/M\cong Im(f)$.

DEMONSTRAÇÃO - a) É imediato que se $x+M=x_1+M$, com x e x_1 em A, então $f(x)=f(x_1)$; portanto, $x+M\mapsto f(x)$ é uma aplicação f^*, de A/M em A', e é evidente que $f^*\circ q=f$. Se $g: A/M\to A'$ é tal que $g\circ q=f$ e se $x+M$ é um elemento qualquer de A/M, então

$$g(x+M)=g(q(x))=(g\circ q)(x)=(f^*\circ q)(x)=f^*(q(x))=f^*(x+M),$$

logo, $g=f^*$.

b) Quaisquer que sejam $x+M$ e $y+M$ em A/M, temos

$$f^*((x+M)+(y+M))=f^*((x+y)+M)=$$
$$=f(x+y)=f(x)+f(y)=f^*(x+M)+f^*(y+M)$$

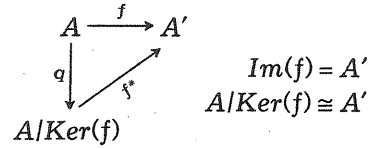
e

$$f^*((x+M)(y+M))=f^*(xy+M)=f(xy)=f(x)f(y)=f^*(x+M)f^*(x+M),$$

logo, f^* é um homomorfismo. Por outro lado, de $f^*(x+M)=0$ resulta $f(x)=0$, logo, $x\in M$ e então $x+M=M$ é o elemento neutro do anel quociente A/M; portanto, $Ker(f^*)=\{0\}$, ou seja, f^* é um monomorfismo. Finalmente, é imediato que $Im(f^*)=Im(f)$.

c) É uma conseqüência imediata da parte anterior. ∎

COROLÁRIO - Se f é um epimorfismo de um anel comutativo A num anel comutativo A', então existe um único isomorfismo f^*, de $A/Ker(f)$ em A', tal que $f^*\circ q=f$, onde q é o homomorfismo canônico de A em $A/Ker(f)$.



TEOREMA 31 - A intersecção de uma família não vazia $(M_i)_{i\in I}$, de ideais de um anel comutativo A, é um ideal de A.

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $M=\bigcap_{i\in I} M_i$ e notemos que $M\neq\emptyset$, pois, $0\in M_i$ para todo $i\in I$. Se a e b são dois elementos quaisquer de M e se c é um elemento qualquer de A, temos $a\in M_i$ e $b\in M_i$, logo, $a-b\in M_i$, e $ac\in M_i$, para todo $i\in I$; portanto, $a-b\in M$ e $ac\in M$. ∎

Êste teorema nos mostra, em particular, que a intersecção de dois ideais de A é um ideal, ou seja, o conjunto $\mathcal{J}(A)$, de todos os ideais de A, é fechado em relação à intersecção. Fica assim definida uma operação $\cap$ sôbre $\mathcal{J}(A)$ e é fácil verificar que $(\mathcal{J}(A),\cap)$ é um monóide comutativo. Notemos ainda que sôbre o conjunto $\mathcal{J}(A)$ está definida, de modo natural, uma relação de ordem parcial: a inclusão. O conjunto $\mathcal{J}(A)$ tem mínimo e máximo que são, respectivamente, o ideal nulo e o ideal unitário. Sempre que mencionarmos algum conceito de ordem para ideais estará subentendido que êste conceito se referirá à ordem estabelecida acima sôbre o conjunto $\mathcal{J}(A)$.

DEFINIÇÃO 16 - Chama-se *soma* de dois ideais M_1 e M_2, de um anel comutativo A, ao conjunto

$$M_1+M_2=\{a_1+a_2\in A \mid a_1\in M_1 \quad \text{e} \quad a_2\in M_2\}.$$

Pode-se verificar, fàcilmente, que a soma M_1+M_2 é um ideal de A e, além disso, que a operação $(M_1,M_2)\mapsto M_1+M_2$ define uma estrutura de monóide comutativo sôbre $\mathcal{J}(A)$. Notemos que M_1+M_2 é o menor ideal de A que contém os ideais M_1 e M_2 e, por outro lado, $M_1\cap M_2$ é o maior ideal de A que está contido em M_1 e em M_2.

Seja S um subconjunto de um anel comutativo A e consideremos a família $(M_i)_{i\in I}$ de todos os ideais de A que contêm S; é imediato que esta família é não vazia, logo, em vir-

tude do teorema 31, a intersecção $M=\bigcap_{i\in I}M_i$ é um ideal de A que contém S e, além disso, é o menor ideal de A que satisfaz esta condição. O ideal M passa a ser denominado *ideal gerado pelo conjunto* S e S, por sua vez, é chamado *sistema de geradores* do ideal M. Observemos que se $S=\emptyset$ ou $S=\{0\}$, então $M=\{0\}$. No caso particular em que $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ $(n\geq 1)$ indica-se o ideal M pela notação $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ ou $Aa_1+Aa_2+\cdots+Aa_n$ (esta última será justificada abaixo).

TEOREMA 32 - Se $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ $(n\geq 1)$ é um subconjunto de um anel comutativo A, então o ideal $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, gerado por S, é o conjunto de tôdas as somas $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n$, com $x_i\in A$ para $i=1,2,\cdots,n$.

DEMONSTRAÇÃO - Indiquemos por M o ideal $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, por M_0 o conjunto de tôdas as somas acima e notemos que $S\subset M_0$, pois, basta escolher $x_i=1$ e $x_j=0$ se $j\neq i$. As fórmulas

$$\sum_{i=1}^{n}x_ia_i-\sum_{i=1}^{n}y_ia_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)a_i$$

e

$$z\sum_{i=1}^{n}x_ia_i=\sum_{i=1}^{n}(zx_i)a_i$$

nos mostram que M_0 é um ideal, logo, $M\subset M_0$. Por outro lado, se $x=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\in M_0$, temos $a_i\in M$ (pois, $S\subset M$), logo, $x_ia_i\in M$ para $i=1,2,\cdots,n$, de onde vem, $x\in M$; portanto, $M_0\subset M$. ∎

No caso particular em que $S=\{b\}$, o ideal $A(b)$, gerado por S, é o conjunto de todos os múltiplos em A do elemento b e êste ideal será indicado por Ab; portanto,

$$Ab=\{xb\in A \mid x\in A\}.$$

DEFINIÇÃO 17 - Diz-se que um ideal M, de um anel comutativo A, é *principal* se, e sòmente se, existe b em A tal que $M=Ab$.

Por exemplo, o ideal nulo e o ideal unitário são principais, pois, $\{0\}=A\cdot 0$ e $A=A\cdot 1$, ou de modo mais geral, $A=Au$, onde u é um elemento qualquer de $U(A)$.

DEFINIÇÃO 18 - Diz-se que um ideal M, de um anel comutativo A, é de *tipo finito* se, e sòmente se, existem elementos $a_1,a_2,\cdots a_n$ em A tais que $M=A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

Observemos que, em virtude do teorema 32, o ideal de tipo finito $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ é a soma dos ideais principais $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_n$, o que justifica a notação $Aa_1+Aa_2+\cdots+Aa_n$, para indicar êste ideal.

DEFINIÇÃO 19 - Chama-se *produto* de dois ideais M_1 e M_2, de um anel comutativo A, ao ideal gerado pelo conjunto de todos os produtos ab, com a em M_1 e b em M_2.

Usaremos a notação M_1M_2 para indicar o produto dos ideais M_1 e M_2; notemos, explicitamente, que M_1M_2 não indica (como no caso da soma M_1+M_2) o conjunto de todos os produtos ab com a em M_1 e b em M_2, pois, M_1M_2 é o ideal gerado por êstes produtos.

TEOREMA 33 - O produto M_1M_2 de dois ideais M_1 e M_2, de um anel comutativo A, é o conjunto de tôdas as somas $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, onde $a_i\in M_1$, $b_i\in M_2$ e $n\in N^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Indiquemos por S o conjunto de todos os produtos ab com a em M_1 e b em M_2 e ponhamos

$$M_0=\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\in A \mid a_i\in M_1, b_i\in M_2 \text{ e } n\in N^*\}$$

Como $S\subset M_1M_2$ e M_1M_2 é um ideal resulta que $M_0\subset M_1M_2$. Por outro lado, é imediato que M_0 é não vazio e que M_0 é fechado em relação à subtração; além disso, se $x=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\in M_0$ e se $c\in A$, temos $cx=\sum_{i=1}^{n}(ca_i)b_i$, onde $ca_i\in M_1$ e $b_i\in M_2$, logo, $cx\in M_0$; portanto, M_0 é um ideal de A. Notando-se agora que $S\subset M_0$, teremos $M_1M_2\subset M_0$, pois M_1M_2 é o menor ideal de A que contém S. ∎

Fica assim definida por uma operação de multiplicação

$$(M_1,M_2)\mapsto M_1M_2$$

sôbre o conjunto $\mathcal{J}(A)$ e é fácil verificar que $(\mathcal{J}(A),\cdot)$ é um monóide comutativo. Notemos ainda que se M_1 e M_2 são dois ideais quaisquer do anel A, então

$$M_1M_2\subset M_1\cap M_2\subset M_1+M_2$$

e, em geral, estas inclusões são estritas.

EXERCÍCIOS

105. Verificar as propriedades a), b), c) e d) enunciadas logo após o exemplo 19.

106. Demonstrar que se A é um anel comutativo com elemento unidade $1\neq 0$ e se os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A, então o anel A é um corpo. Sugestão: considerar o ideal Ab, onde $b\in A^*$.

107. Demonstrar o corolário do teorema 28.

108. Verificar os axiomas A1, A2, M1, M2 e D para as operações de adição e de multiplicação definidas sôbre o conjunto quociente A/M (teorema 29).

109. Determinar os anéis quocientes A/A e $A/\{0\}$, onde A é um anel comutativo com elemento unidade.

110. Verificar que $(\mathcal{J}(A),\cap,\subset)$, $(\mathcal{J}(A),+,\subset)$ e $(\mathcal{J}(A),\cdot,\subset)$ são monóides parcialmente ordenados.

111. Demonstrar que a soma M_1+M_2 de dois ideais M_1 e M_2, de um anel comutativo A, é um ideal de A e que M_1+M_2 é o menor ideal de A que contém M_1 e M_2.

112. Mostrar, por meio de um exemplo, que, em geral, não é verdadeira a lei distributiva da intersecção de ideais em relação à adição de ideais.

113. Mostrar que a reunião de dois ideais não é, necessàriamente, um ideal.

114. Demonstrar que todo ideal do anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é principal. Sugestão: Se $M \neq \{0\}$ é um ideal de $\mathbf{Z}$, então existe um menor número natural não nulo m tal que $m \in M$; deduzir daí, por meio do algoritmo da divisão, que $M = \mathbf{Z}m$. Observação: veremos mais adiante (teorema 43) que esta propriedade é verdadeira para todo anel euclidiano.

115. Demonstrar que se b e c são dois elementos quaisquer de um anel comutativo A, então $Ab \cdot Ac = A(bc)$.

116. Consideremos os ideais $\mathbf{Z}a$ e $\mathbf{Z}b$, onde a e b são dois números inteiros estritamente positivos. Qual é o significado dos ideais $\mathbf{Z}a \cap \mathbf{Z}b$ e $\mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b$? Demonstrar que se a e b são primos entre si, então $\mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b = \mathbf{Z}$.

117. Determinar todos os ideais do anel $\mathbf{Z}_m$ dos inteiros módulo $m>1$.

118. Determinar todos os ideais do anel produto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

119. Utilizando o corolário do teorema 30, demonstrar que os anéis $\mathbf{Z}_m$ e F_m são isomorfos. Observação: esta propriedade já foi demonstrada no Capítulo III, teorema 19.

4.2 - COMPLEMENTOS SÔBRE CONJUNTOS ORDENADOS

Na secção 2.4 do Capítulo I vimos algumas propriedades dos conjuntos ordenados; completaremos aqui êste estudo introduzindo as importantes noções de elemento maximal e de elemento minimal, a condição das cadeias crescentes e o axioma da escolha, que será utilizado para demonstrar que a condição maximal é equivalente à condição das cadeias crescentes.

DEFINIÇÃO 20 - Seja E um conjunto não vazio parcialmente ordenado pela ordem $\leqslant$ e seja a um elemento de E;

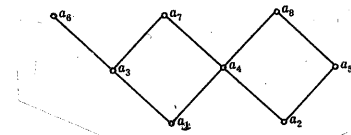
diz-se que a é um *elemento maximal* (resp., *minimal*) de E se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: para todo x em E, se $a \leqslant x$ (resp., $x \leqslant a$), então $x = a$ (resp., $x = a$).

É imediato que se a é o máximo (resp., mínimo) de E, então a é o único elemento maximal (resp., minimal) de E. Além disso, notemos que se a ordem $\leqslant$ é total, então um elemento $a \in E$ é maximal (resp., minimal) se, e sòmente se, a é o máximo (resp., mínimo) de E.

EXEMPLO 20 - Consideremos o conjunto

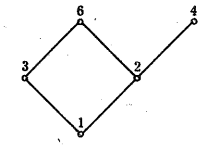
$$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

com 8 elementos e seja $\leqslant$ a ordem parcial descrita pelo diagrama (ver o §2.4 do Capítulo I)



É imediato que a_1 e a_2 são elementos minimais de E e que a_6, a_7 e a_8 são elementos maximais de E.

EXEMPLO 21 - Consideremos o conjunto E de todos os números naturais que são divisores de 12, excluído 12 e ordenemos E pela relação de divisibilidade; temos o seguinte diagrama para descrever esta relação de ordem



Portanto, 1 é o mínimo de E, logo, 1 é o único elemento minimal de E; 4 e 6 são elementos maximais de E.

EXEMPLO 22 - Seja E um conjunto finito e não vazio, ordenado pela ordem parcial $\leqslant$; pode-se demonstrar, por indução finita sôbre o número de elementos de E, que E tem pelo menos um elemento maximal e pelo menos um elemento minimal.

DEFINIÇÃO 21 - Seja E um conjunto não vazio, ordenado pela ordem parcial $\leqslant$; diz-se que uma sucessão $(a_i)_{i \in N}$, de elementos de E, é uma *cadeia crescente* (resp., *decrescente*), se e sòmente se, para todo i em N tem-se $a_i \leqslant a_{i+1}$ (resp., $a_{i+1} \leqslant a_i$).

Diz-se que uma cadeia crescente (resp., decrescente) é *estacionária* se, e sòmente se, existe n em N tal que $a_i = a_n$ (resp., $a_i = a_n$) para todo $i \geq n$.

EXEMPLO 23 - Se E é um conjunto finito e não vazio, ordenado pela ordem $\leq$, então é imediato que tôda cadeia crescente ou decrescente é estacionária.

DEFINIÇÃO 22 - Diz-se que um conjunto não vazio E, ordenado pela ordem parcial $\leq$, satisfaz a *condição das cadeias crescentes* (resp., *decrescentes*) se, e sòmente se, é válido o seguinte axioma: CCC (resp., CCD) - tôda cadeia crescente (resp., decrescente) de elementos de E é estacionária (resp., estacionária).

DEFINIÇÃO 23 - Diz-se que um conjunto não vazio E, ordenado pela ordem parcial $\leq$, satisfaz a *condição maximal* (resp., *minimal*) se, e sòmente se, é válido o seguinte axioma: MAX (resp., MIN) - todo subconjunto não vazio, de E, possui pelo menos um elemento maximal (resp., minimal).

Podemos demonstrar, fàcilmente, que o axioma MAX implica o axioma CCC:

LEMA 14 - Seja E um conjunto não vazio, ordenado pela ordem parcial $\leq$; se E satisfaz a condição maximal, então E também satisfaz a condição das cadeias crescentes.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $(a_i)_{i \in N}$ uma cadeia crescente de elementos de E e consideremos a imagem $X = \{a_i, i \in N\}$ desta sucessão; de acôrdo com a condição maximal o subconjunto X, de E, admite pelo menos um elemento maximal a_n. Como a sucessão (a_i) é crescente, temos $a_n \leq a_i$ para todo $i \geq n$ e como a_n é elemento maximal de X resulta que $a_i = a_n$ para todo $i \geq n$; portanto, a cadeia crescente (a_i) é estacionária. ∎

Precisamos demonstrar que, recìprocamente, o axioma CCC implica o axioma MAX. Uma demonstração intuitiva, mas não correta, é a seguinte: suponhamos que $(E, \leq)$ satisfaça o axioma CCC e suponhamos, por absurdo, que MAX não seja verdadeiro em E; portanto, existe uma parte não vazia X, de E, que não admite elemento maximal. Seja a_0 um elemento de X e consideremos o subconjunto $X_1 = \{x \in X \mid a_0 < a\}$; como a_0 não é elemento maximal de X resulta que X_1 é não vazio, logo, existe $a_1 \in X_1$ e temos $a_0 < a_1$. Como a_1 não é elemento

maximal de X resulta que o subconjunto $X_2 = \{x \in X \mid a_1 < x\}$ é não vazio, logo, existe $a_2 \in X_2$ tal que $a_0 < a_1 < a_2$. «Supondo-se que a_i esteja definido» e notando-se que a_i não é elemento maximal de X concluímos que o conjunto $X_{i+1} = \{x \in X \mid a_i < x\}$ é não vazio, logo, existe $a_{i+1} \in X_{i+1}$ e temos $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_i < a_{i+1}$. «Continuando-se com êste processo» obteremos uma cadeia crescente (a_i) que não é estacionária.

As falhas desta demonstração estão assinaladas acima, e além disso, observemos que não está colocado de modo preciso como deve ser feita a escolha simultânea dos elementos a_i de modo que $a_i \in X_i$ para todo $i \in N$. Para dar uma demonstração rigorosa do fato que MAX implica CCC necessitamos de um axioma da teoria dos conjuntos que foi posto em evidência por Zermelo (1871-1956):

AXIOMA DA ESCOLHA - Para todo conjunto não vazio E, existe uma aplicação

$$\varphi : \mathcal{P}(E)^* \to E,$$

onde $\mathcal{P}(E)^*$ indica o conjunto das partes não vazias de E, tal que

$$\varphi(X) \in X$$

para todo $X \in \mathcal{P}(E)^*$.

Diz-se, neste caso, que φ é uma *aplicação de escolha para* E.

O axioma acima nos mostra, em têrmos não rigorosos, que é sempre possível fixarmos em cada parte não vazia X, de E, um elemento distinguido de X. Em alguns casos isto pode ser feito sem utilizar êste axioma:

EXEMPLO 24 - Consideremos o conjunto $\mathcal{P}(N)^*$ das partes não vazias do conjunto N dos números naturais; de acôrdo com o princípio do menor número natural, tôda parte não vazia X, de N, tem mínimo e colocando-se $\varphi(X) = \min X$ obtém-se uma aplicação de escolha φ para o conjunto N.

EXEMPLO 25 - O mesmo pode ser feito para todo conjunto não vazio E bem ordenado pela ordem $\leq$.

TEOREMA 34 - Um conjunto não vazio E, ordenado pela ordem parcial $\leq$, satisfaz a condição das cadeias crescentes se, e sòmente se, E satisfaz a condição maximal.

DEMONSTRAÇÃO - O lema 14 nos mostra que MAX implica CCC. Recìprocamente, suponhamos que o axioma CCC seja verdadeiro em E e suponhamos, por absurdo, que o axioma MAX não seja verdadeiro em E; existe, então, uma parte não

vazia X, de E, que não possui elemento maximal. Portanto, para todo $a \in X$ o conjunto

$$Y_a = \{x \in X \mid a < x\}$$

é não vazio. Seja φ uma aplicação de escolha para o conjunto X e consideremos a aplicação $g: X \to X$ definida por $g(a) = \varphi(Y_a)$; de acôrdo com a definição de Y_a, temos $a < g(a)$. Seja a_0 um elemento de X; em virtude do princípio de definição por recorrência (teorema 18, Capítulo II) existe uma aplicação $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ tal que

$$f(0) = a_0$$

e

$$f(n+1) = g(f(n))$$

para todo $n \in \boldsymbol{N}$. Pondo-se $a_n = f(n)$ para $n \geqslant 1$ e notando-se que

$$a_n = f(n) < g(f(n)) = f(n+1) = a_{n+1},$$

resulta que $(a_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ é uma cadeia crescente não estacionária, de elementos de E, contra o fato que o axioma CCC é verdadeiro em E. ∎

EXERCÍCIOS

120. Demonstrar, por indução finita, que se E é um conjunto não vazio e finito, então existe uma aplicação de escolha para E. Sugestão: mostrar que E pode ser totalmente ordenado e usar o exemplo 25.

121. Demonstrar que o axioma MIN é equivalente ao axioma CCD.

122. Seja E um conjunto não vazio e seja $\mathcal{A}$ uma parte não vazia de $\mathcal{P}(E)^*$ tal que $X \cap Y = \emptyset$ quaisquer que sejam X e Y em $\mathcal{A}$, com $X \neq Y$. Demonstrar que existe uma aplicação $\varphi: \mathcal{A} \to E$ tal que $\varphi(X) \in X$ para todo $X \in \mathcal{A}$. Observação: a família $(\varphi(X))_{X \in \mathcal{A}}$, de elementos de E, é denominada *família de representantes de* $\mathcal{A}$.

123. Seja E um conjunto não vazio, seja R uma relação de equivalência sôbre E e consideremos o conjunto quociente E/R. Demonstrar que existe uma família de representantes de E/R (diz-se, neste caso, que esta família é um *sistema de representantes das classes de equivalência módulo* R).

4.3 - IDEAIS E RELAÇÃO DE DIVISIBILIDADE

Procuraremos, nesta secção, exprimir os diversos conceitos da divisibilidade em têrmos de ideais principais.

LEMA 15 - Sejam a e b dois elementos de um anel de integridade A e consideremos os ideais principais Aa e Ab determinados por êstes elementos; valem as seguintes propriedades:

a) $b \in U(A)$ se, e sòmente se, $Ab = A$;

b) $a \mid b$ se, e sòmente se, $Ab \subset Aa$;

c) $a \sim b$ se, e sòmente se, $Aa = Ab$;

d) se $a \notin U(A) \cup \{0\}$, então b é divisor próprio de a se, e sòmente se, $Aa \subset Ab$, $Aa \neq Ab$ e $Ab \neq A$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Se $b \in U(A)$, temos $Ab \cap U(A) \neq \emptyset$, logo, $Ab = A$; recìprocamente, de $Ab = A$ e $1 \in A$ resulta que existe x em A tal que $xb = 1$, logo, $b \in U(A)$.

b) É imediata, pois, $a \mid b$ se, e sòmente se, $b \in Aa$.

c) É uma conseqüência imediata da definição de $a \sim b$ e da parte anterior.

d) Se b é um divisor próprio de a, temos $b \mid a$, $b \notin U(A) \cup \{0\}$ e b não é associado ao elemento a, logo, de acôrdo com b), c) e a), teremos $Aa \subset Ab$, $Aa \neq Ab$ e $Ab \neq A$. Recìprocamente, suponhamos que estas três condições estejam verificadas. De $Aa \subset Ab$ resulta que $b \mid a$ e como $Ab \neq A$ e $Aa \neq \{0\}$, temos $b \notin U(A) \cup \{0\}$; finalmente, b não é associado ao elemento a, pois, $Aa \neq Ab$. ∎

Seja p um elemento primo de um anel de integridade A, logo, $p \notin U(A) \cup \{0\}$ e então $Ap \neq \{0\}$ e $Ap \neq A$; por outro lado, se a e b são dois elementos quaisquer de A e se $p \mid (ab)$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$, ou seja, se $ab \in Ap$, então $a \in Ap$ ou $b \in Ap$. Um ideal que goza desta propriedade é denominado ideal primo; êste conceito será introduzido de modo geral pela

DEFINIÇÃO 24 - Diz-se que um ideal M, de um anel comutativo A com elemento unidade, é *primo* se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: quaisquer que sejam a e b em A, se $ab \in M$, então $a \in M$ ou $b \in M$.

É imediato que o ideal unitário A é primo e notemos que o ideal nulo é primo se, e sòmente se, A é um anel de integridade. Um ideal primo não nulo e não unitário é chamado *ideal primo próprio*. De acôrdo com o que vimos acima, temos

LEMA 16 - Um elemento p, de um anel de integridade A, é primo se, e sòmente se, Ap é um ideal primo próprio de A.

TEOREMA 35 - Seja A um anel comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$ e seja M um ideal de A; nestas condições, M é primo não unitário se, e sòmente se, o anel quociente A/M é um anel de integridade.

DEMONSTRAÇÃO - Indiquemos por q o homomorfismo canônico de A em A/M. Suponhamos que M seja um ideal primo

não unitário do anel A; de $M \neq A$ resulta que $1 \notin M$, logo, $q(1) \neq 0$ e então o anel quociente A/M tem elemento unidade não nulo. Por outro lado, se $q(x)$ e $q(y)$ são dois elementos quaisquer de A/M e se $q(x)q(y) = 0$, temos $q(xy) = 0$, logo, $xy \in M$ e como M é primo concluímos que $x \in M$ ou $y \in M$; portanto, $q(x) = 0$ ou $q(y) = 0$ e fica assim demonstrado que vale em A/M a lei do anulamento do produto. Reciprocamente, suponhamos que A/M seja um anel de integridade, logo, $A/M \neq \{0\}$ e então $M \neq A$. Se x e y são dois elementos quaisquer de A e se $xy \in M$, temos $q(xy) = 0$, ou, $q(x)q(y) = 0$, de onde vem, $q(x) = 0$ ou $q(y) = 0$, isto é, $x \in M$ ou $y \in M$; portanto, M é primo. ∎

Indicaremos por $P(A)$ o conjunto de todos os ideais principais do anel de integridade A; notemos que $P(A) \subset \mathcal{J}(A)$ e que $P(A)$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão.

LEMA 17 - Um elemento p, de um anel de integridade A, é irredutível se, e sòmente se, $Ap \neq \{0\}$ e Ap é um elemento maximal do conjunto $P(A)^*$ dos ideais principais não unitários de A.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que p seja irredutível, logo, $p \notin U(A) \cup \{0\}$ e então $Ap \neq \{0\}$ e $Ap \in P(A)^*$; além disso, se Ab é um elemento qualquer de $P(A)^*$ e se $Ap \subset Ab$, teremos $b \notin U(A)$ e $b|p$, logo, $b \sim p$, de onde vem, $Ab = Ap$ e fica assim demonstrado que Ap é um elemento maximal de $A(P)^*$. Reciprocamente, suponhamos que $Ap \neq \{0\}$, que Ap seja um elemento maximal de $P(A)^*$ e seja b um divisor de A, com $b \notin U(A)$; com estas hipóteses, temos $Ap \subset Ab$ e $Ab \in P(A)^*$, logo, $Ap = Ab$, de onde vem, $b \sim p$, portanto, p é irredutível. ∎

Estenderemos a noção de ideal principal maximal em A, introduzindo o conceito geral de ideal maximal. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e consideremos o conjunto $\mathcal{J}(A)^*$, ordenado por inclusão, de todos os ideais não unitários de A; todo elemento maximal dêste conjunto é denominado ideal maximal do anel A. Isto equivale a dar a seguinte

DEFINIÇÃO 25 - Diz-se que um ideal M, de um anel comutativo A com elemento unidade, é um *ideal maximal* de A se, e sòmente se,

a) $M \neq A$;

b) para todo ideal M' de A, se $M \subset M'$, então $M' = M$ ou $M' = A$.

TEOREMA 36 - Um ideal M, de um anel comutativo A com elemento unidade, é um ideal maximal de A se, e sòmente se, o anel quociente A/M é um corpo.

DEMONSTRAÇÃO - Indicaremos por q o homomorfismo canônico de A em A/M. Suponhamos que M seja um ideal maximal de A e seja $q(x)$ um elemento não nulo de A/M, logo, $x \in M$; como o ideal $M + Ax$ contém M pròpriamente resulta que $M + Ax = A$, portanto, existem m em M e a em A tais que $1 = m + ax$, de onde vem, $q(1) = q(a)q(x)$ e então $q(x)$ é inversível em A/M. Reciprocamente, suponhamos que o anel quociente A/M seja um corpo e seja M' um ideal de A tal que $M \subset M'$ e $M \neq M'$; daqui concluímos que existe $x \in M'$ tal que $x \notin M$, logo, $q(x) \neq 0$ e então existe $q(a) \in A/M$ tal que $q(a)q(x) = q(1)$, de onde vem, $1 - ax \in M \subset M'$, portanto, $1 \in M'$, ou seja, $M' = A$. ∎

COROLÁRIO - Num anel comutativo com elemento unidade, todo ideal maximal é primo.

Veremos mais adiante que, em geral, não é verdadeira a recíproca do corolário acima (ver também o exercício 126).

DEFINIÇÃO 26 - Diz-se que um anel de integridade A satisfaz a *condição das cadeias crescentes para ideais principais* se, e sòmente se, é válido o seguinte axioma:

AF7: o conjunto $P(A)$ satisfaz a condição das cadeias crescentes.

LEMA 18 - Todo anel fatorial satisfaz o axioma AF7.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $(M_i)_{i \in N}$ uma cadeia crescente de ideais principais $M_i = Ab_i$ do anel A; podemos, evidentemente, supor que exista $p \in N$ tal que $M_p \neq M_{p+1}$ e daqui resulta $M_{p+i} \neq \{0\}$ para todo $i \in N$. Usando-se uma notação conveniente podemos supor que $p = 0$; neste caso, temos $M_i \neq \{0\}$ para todo $i \geq 1$. De

$$Ab_1 \subset Ab_2 \subset \cdots \subset Ab_i \subset Ab_{i+1} \subset \cdots$$

resulta

$$\delta(b_1) \geq \delta(b_2) \geq \cdots \geq \delta(b_i) \geq (b_{i+1}) \geq \cdots,$$

onde δ é a função comprimento; portanto, existe um índice n tal que $\delta(b_i) = \delta(b_n)$ para todo $i \geq n$. Ora, de $Ab_n \subset Ab_i$ vem $b_i | b_n$ e como $\delta(b_n) = \delta(b_i)$ concluímos que $b_i \sim b_n$, logo, $Ab_i = Ab_n$ para todo $i \geq n$; portanto, a cadeia (M_i) é estacionária. ∎

TEOREMA 37 - Todo anel de integridade A que satisfaz o axioma AF7 também satisfaz a condição AF1.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto S de todos os elementos b, de A, tais que $b \notin U(A) \cup \{0\}$ e b não é produto de elementos irredutíveis em A e suponhamos, por absurdo, que $S \neq \emptyset$; portanto, o conjunto $\bar{S} = \{A \cdot b \in P(A) \mid a \in S\}$ também não é vazio. Ora, por hipótese, $P(A)$ satisfaz a condição das cadeias crescentes, logo, em virtude do teorema 34, $P(A)$ também satisfaz a condição maximal; portanto, existe $b_0 \in S$ tal que Ab_0 seja um elemento maximal de $\bar{S}$. O elemento b_0 é, necessàriamente, redutível, logo, existem b_1 e b_2 em A tais que $b_0 = b_1 b_2$ e $b_i \notin U(A) \cup \{0\}$ $(i = 1,2)$; daqui resulta que $Ab_0 \subset Ab_i$ e $Ab_0 \neq Ab_i$ $(i = 1,2)$ e como Ab_0 é elemento maximal de $\bar{S}$, temos $Ab_i \notin \bar{S}$, de onde vem, $b_i \notin S$ $(i = 1,2)$. Portanto, b_1 e b_2 são produtos de elementos irredutíveis em A, logo, $b_0 = b_1 b_2$ também é um produto de elementos irredutíveis em A, contra a definição do elemento b_0. ∎

Em virtude do teorema acima, do lema 16 e do teorema 6, temos o seguinte

TEOREMA 38 - Um anel de integridade A é fatorial se, e sòmente se, A satisfaz a condição AF7 e a seguinte condição

AF3′: para todo elemento $p \in A$, se p é irredutível, então o ideal principal Ap é primo.

Procuraremos, a seguir, exprimir os axiomas AF4, AF5 e AF6 por meio de condições sôbre ideais principais.

LEMA 19 - As seguintes condições, sôbre um mesmo anel de integridade A, são equivalentes

AF4: A é um anel com *mdc*;

AF4′: dois ideais principais quaisquer de A admitem supremo em $P(A)$.

DEMONSTRAÇÃO - AF4 $\Longrightarrow$ AF4′. Sejam Aa e Ab dois ideais principais de A; por hipótese, existe $d \in A$ que é um *mdc* de a e b e para êste elemento d temos $Aa \subset Ad$ e $Ab \subset Ad$. Por outro lado, se Ad' é um elemento qualquer de $P(A)$ e se $Aa \subset Ad'$ e $Ab \subset Ad'$, temos $d' | a$ e $d' | b$, logo $d' | d$, de onde vem, $Ad \subset Ad'$; portanto, Ad é o mínimo, em $P(A)$, dos majorantes de $\{Aa, Ab\}$, ou seja, $Ad = sup\{Aa, Ab\}$ (ver a definição 1, Capítulo V).

AF4′ $\Longrightarrow$ AF′. Sejam a e b dois elementos quaisquer de A; por hipótese, existe $Ad = sup\{Aa, Ab\}$ e, neste caso, temos

$Aa \subset Ad$ e $Ab \subset Ad$, logo $d | a$ e $d | b$. Por outro lado, se $d' \in A$ é um divisor comum de a e b, temos $Aa \subset Ad'$ e $Ab \subset Ad'$, logo, $Ad = sup\{Aa, Ab\} \subset Ad'$, de onde vem, $d' | d$; portanto, d é um *mdc* de a e b. ∎

LEMA 20 - As seguintes condições, sôbre um mesmo anel de integridade A, são equivalentes:

AF5: A é um anel com *mmc*;

AF5′: a intersecção de dois ideais principais quaisquer de A é um ideal principal.

DEMONSTRAÇÃO - AF5 $\Longrightarrow$ AF5′. Sejam Aa e Ab dois ideais principais quaisquer de A; por hipótese, existe $m \in A$ que é um *mmc* de a e b e para êste elemento m temos $Am \subset Aa$ e $Am \subset Ab$, logo, $Am \subset Aa \cap Ab$. Por outro lado, se $m' \in Aa \cap Ab$, temos $m' \in Aa$ e $m' \in Ab$, logo, $a | m'$ e $b | m'$, de onde vem, $m | m'$ e então $m' \in Am$; portanto, $Aa \cap Ab = Am$.

AF5′ $\Longrightarrow$ AF5. Sejam a e b dois elementos quaisquer de A e consideremos os ideais principais Aa e Ab; por hipótese, $Aa \cap Ab$ é principal, logo, existe m em A tal que $Aa \cap Ab = Am$. Neste caso, temos $Am \subset Aa$ e $Am \subset Ab$, logo, $a | m$ e $b | m$; por outro lado, se $m' \in A$ é tal que $a | m'$ e $b | m'$, teremos $Am' \subset Aa$ e $Am' \subset Ab$, logo, $Am' \subset Aa \cap Ab = Am$, de onde vem, $m | m'$. Portanto, m é um *mmc* de a e b. ∎

De acôrdo com os lemas 18, 19 e 20 e os teoremas 8, 11 e 37, temos o seguinte

TEOREMA 39 - Um anel de integridade A é fatorial se, e sòmente se, A satisfaz os axiomas AF7 e AF4′ ou AF7 e AF5′.

LEMA 21 - Um anel de integridade A satisfaz a condição AF6 se, e sòmente se, é válida a seguinte condição

AF6′: a soma de dois ideais principais quaisquer de A é um ideal principal.

DEMONSTRAÇÃO - AF6 $\Longrightarrow$ AF6′. Sejam Aa e Ab dois ideais principais de A; por hipótese, existe um elemento d em A que é um divisor comum de a e b, de onde vem, $Aa \subset Ad$ e $Ab \subset Ad$, logo, $Aa + Ab \subset Ad$. Além disso, para êste elemento d existem r e s em A tais que $d = ra + sb$, logo, $d \in Aa + Ab$ e então $Ad \subset Aa + Ab$.

AF6′ $\Longrightarrow$ AF6. Sejam a e b dois elementos quaisquer de A e consideremos os ideais principais Aa e Ab; por hipótese,

existe d em A tal que $Aa+Ab=Ad$, logo, $Aa\subset Ad$ e $Ab\subset Ad$, de onde vem, $d|a$ e $d|b$. Finalmente, de $Aa+Ab=Ad$ resulta que existem r e s em A tais que $d=ra+sb$. ∎

O teorema 16 pode então ser enunciado sob a forma

TEOREMA 40 - Se um anel de integridade A satisfaz as condições AF7 e AF6', então A é fatorial.

EXERCÍCIOS

124. Mostrar que todo ideal primo próprio do anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um ideal maximal. Sugestão: exercício 114 e lema 16.

125. Mostrar que todo ideal maximal do anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um ideal primo próprio. Sugestão: exercício 114 e corolário do teorema 36.

126. Quais dos seguintes ideais M, do anel de polinômios $A=\mathbb{Q}[X_1,X_2]$, são primos ou maximais?

a) $M=AX_1$;
b) $M=AX_1+AX_2$;
c) $M=A(X_1^2-4)$;
d) $M=A(X_1^2-2)$;
c) $M=A(X_1^2+1)+A(X_2+2)$.

4.4 - ANÉIS PRINCIPAIS

DEFINIÇÃO 27 - Diz-se que um anel de integridade A é um *anel principal* se, e sòmente se, todo ideal de A é principal.

TEOREMA 41 - Todo anel principal é fatorial.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que o anel principal A satisfaz a condição AF6' e mostraremos abaixo que AF7 também é verdadeira em A, logo, em virtude do teorema 40, A é fatorial. Seja $(M_i)_{i\in N}$ uma cadeia crescente de ideais de A e consideremos o conjunto $M=\bigcup_{i\in N} M_i$; é fácil verificar que M é um ideal de A, logo, existe b em A tal que $M=Ab$. Como $b\in M$ resulta que existe um índice n tal que $b\in M_n$ e, neste caso, temos $M\subset M_n$, logo, $M=M_n$; finalmente, para todo índice $i\geqslant n$, temos $M_n\subset M_i$, logo, $M_i=M_n$, ou seja, a cadeia (M_i) é estacionária. ∎

COROLÁRIO - Se a e b são elementos quaisquer de um anel principal A, então $Aa+Ab=Ad$ e $Aa\cap Ab=Am$, onde d é um *mdc* de a e b e m é um *mmc* de a e b.

TEOREMA 42 - Um ideal próprio M, de um anel principal A, é primo se, e sòmente se, M é um ideal maximal de A.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese, existe p em A tal que $M=Ap$ e temos, necessàriamente, $p\notin U(A)\cup\{0\}$. Se M é um ideal primo, então, em virtude dos lemas 16 e 17, Ap é um elemento maximal do conjunto $P(A)^*=\mathcal{J}(A)^*$; portanto, M é um ideal maximal de A. Recìprocamente, se M é um ideal maximal de A, então, em virtude do corolário do teorema 36, M é um ideal primo. ∎

Portanto, num anel principal não há distinção entre ideal primo próprio e ideal maximal.

TEOREMA 43 - Todo anel euclidiano é principal.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A um anel δ-euclidiano e seja $M\neq\{0\}$ um ideal de A; o conjunto $\{\delta(a)\in N \mid a\in M \text{ e } a\neq 0\}$ é não vazio, logo, êste conjunto tem mínimo $\delta(d)$, com $d\in M$ e temos $Ad\subset M$. Se x é um elemento qualquer de M, então existem elementos q e r em A tais que $x=qd+r$, onde $\delta(r)<\delta(d)$ se $r\neq 0$; notando-se que $r=x-qd\in M$ resulta que $r=0$ e então $x\in Ad$, ou seja, $M\subset Ad$. ∎

COROLÁRIO - Os anéis $\mathbb{Z}$ e $K[X]$, onde K é um corpo, são principais.

OBSERVAÇÃO - Obtém-se, assim, uma outra demonstração do fato que $\mathbb{Z}$ e $K[X]$ são fatoriais; notemos, no entanto, que esta demonstração utiliza o axioma da escolha para estabelecer que AF7 $\Longrightarrow$ AF1.

TEOREMA 44 - Um anel de integridade A é principal se, e sòmente se, existe uma aplicação $\delta: A^*\longrightarrow N$ que satisfaz as condições AE1, AE2 e a seguinte condição:

(*) quaisquer que sejam a e b em A^*, se $a\nmid b$ e se $b\nmid a$, então existe r em A^* tal que $\delta(r)<min\{\delta(a),\delta(b)\}$ e para êste elemento r existem p e q em A tais que $r=pa+qb$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que A seja um anel principal, logo, A é fatorial (teorema 43); neste caso, podemos considerar a função comprimento δ (ver o §2.1) e já sabemos que δ satisfaz as condições AE1 e AE2. Finalmente, sejam a e b dois elementos de A^* tais que $a\nmid b$ e $b\nmid a$ e indiquemos por r um *mdc* de a e b; existem, então, elementos p e q em A tais que $r=pa+qb$ e, por outro lado, é imediato que r é divisor

próprio de a e de b, logo, $\delta(r)<min\{\delta(a),\delta(b)\}$. Reciprocamente, suponhamos que exista uma aplicação $\delta: A^* \to N$ que satisfaz as condições AE1, AE2 e (*) e seja $M \neq \{0\}$ um ideal qualquer de A; neste caso, existe

$$\delta(a) = min\{\delta(x) \in M \mid x \in M \text{ e } x \neq 0\},$$

onde $a \in M$, logo, $Aa \subset M$. Se $Aa \neq M$, então existe $b \in M$, com $b \notin Aa$, logo, $a \nmid b$; temos $b \nmid a$, pois, se $b \mid a$ teríamos $\delta(b) \leqslant \delta(a)$, logo, $\delta(a) = \delta(b)$ e então, conforme o lema 4, $a \mid b$, contra a hipótese feita sôbre b. Portanto, de acôrdo com a condição (*), existe r em A^* tal que $\delta(r) < min\{\delta(a),\delta(b)\} = \delta(a)$ e existem p e q em A tais que $r = pa + qb$; mas, neste caso, temos $r \in M$ e $\delta(r) < \delta(a)$, contra a definição do elemento a. ∎

EXERCÍCIOS

127. Consideremos o anel de polinômios $A = \mathbf{Z}[X]$.

a) Mostrar que o ideal $A \cdot 2 + A \cdot X$ é maximal e não é principal.

b) Os elementos 2 e X são primos entre si e, no entanto, não existem polinômios r e s em A tais que $2r + Xs = 1$.

c) O elemento X é irredutível em A e AX não é um ideal maximal.

128. Seja A um anel de integridade e consideremos o anel de polinômios $A[X]$; mostrar que $A[X]$ é um anel principal se, e sòmente se, A é um corpo.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §4

129. Seja R uma relação de equivalência sôbre um anel comutativo A com elemento unidade e suponhamos que R seja compatível com a adição e com a multiplicação. Demonstrar que existe um único ideal M de A tal que R seja a relação de equivalência determinada pelo ideal M.

130. Seja A um anel de integridade e indiquemos por $\mathcal{P}$ o conjunto de seus elementos irredutíveis. a) Mostrar que a relação $\sim$ induz uma relação de equivalência sôbre $\mathcal{P}$. b) Demonstrar que existe um sistema de representantes P do conjunto quociente $\mathcal{P}/\sim$. - Diz-se, neste caso, que P é um *sistema de representantes dos elementos irredutíveis de* A. c) Fazer o mesmo para o conjunto dos elementos primos de A. Observação: Conforme observamos nos exemplos 4 e 5, a construção de um sistema de representantes dos elementos irredutíveis dos anéis $\mathbf{Z}$ e $K[X]$ (K é um corpo) não depende do axioma da escolha.

131. Seja $(E,\cdot)$ um monóide comutativo e seja $(x_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de E tal que $x_i \neq 1$ sòmente para um número finito de índices $i \in I$. Pondo-se $J = \{i \in I \mid x_i \neq 1\}$, colocaremos, por definição,

$$\prod_{i\in I} x_i = \prod_{i\in J} x_i.$$

a) Mostrar que se I é finito, então a definição de $\prod_{i\in I} x_i$ coincide com a definição de produto de uma família finita de elementos de E (ver o §2.6 do Capítulo II).

b) Mostrar que se $J \subset J_1 \subset I$, J_1 finito, então $\prod_{i\in I} x_i = \prod_{i\in J_1} x_i$.

c) Se $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ são duas famílias de elementos de E que satisfazem a condição acima, então

$$\prod_{i\in I} x_i \cdot \prod_{i\in I} y_i = \prod_{i\in I} (x_i y_i).$$

d) Estabelecer resultados análogos para um monóide aditivo $(E,+)$.

132. Seja A um anel de integridade e seja P um sistema de representantes dos elementos irredutíveis de A (ver o exercício 130). Demonstrar que A é um anel fatorial se, e sòmente se, para todo $a \in A^*$ existe um único elemento inversível u e uma única família quase-nula $(n_p)_{p\in P}$, de números naturais, tais que $a = u \prod_{p\in P} p^{n_p}$.

133. Seja A um anel fatorial, seja P um sistema de representantes dos elementos irredutíveis de A e sejam

$$a = u \prod_{p\in P} p^{m_p} \quad \text{e} \quad b = v \prod_{p\in P} p^{n_p}$$

dois elementos quaisquer de A^* (ver o exercício anterior).

a) Demonstrar que $a \mid b$ se, e sòmente se, $m_p \leqslant n_p$ para todo $p \in P$.

b) Pondo-se $\delta_p = min\{m_p, n_p\}$ e $\mu_p = max\{m_p, n_p\}$, demonstrar que os elementos

$$\prod_{p\in P} p^{\delta_p} \quad \text{e} \quad \prod_{p\in P} p^{\mu_p}$$

são, respectivamente, um *mdc* e um *mmc* de a e b.

134. Seja M um ideal próprio de um anel fatorial A; demonstrar que existe um elemento irredutível p em A tal que $M = Ap$ se, e sòmente se, M é um elemento minimal do conjunto, ordenado por inclusão, de todos os ideais primos não nulos do anel A.

135. Diz-se que um anel comutativo A com elemento unidade é *noetheriano* (em homenagem a Emmy Noether) se, e sòmente se, o conjunto $\mathcal{I}(A)$, ordenado por inclusão, satisfaz a condição das cadeias crescentes. Verificar as seguintes propriedades:

a) Um anel comutativo A com elemento unidade é noetheriano se, e sòmente se, todo ideal de A é de tipo finito. Sugestão: utilizar o axioma MAX.

b) Se I é um ideal não unitário de um anel noetheriano A, então existe um ideal maximal M, de A, tal que $I \subset M$. Sugestão: axioma MAX.

c) Se A é um anel de integridade, então A é um anel principal se, e sòmente se, A é noetheriano e A satisfaz a condição AF6'.

d) Todo anel de integridade noetheriano satisfaz a condição AF1.

136. Seja A um anel comutativo com elemento unidade e consideremos o anel de polinômios $A[X]$. Seja M um ideal de $A[X]$ e para cada $i \in N$ indiquemos por $L_i(M)$ o subconjunto de A formado por 0 e por todos os elementos $b \in A^*$ tais que exista $f_i \in M$, $f_i \neq 0$, $\partial f_i = i$ e o coeficiente dominante de f_i seja igual a b. Verificar as seguintes propriedades:

a) $L_i(M)$ é um ideal de A.

b) $L_i(M) \subset L_{i+1}(M)$ para todo $i \in N$.

c) Se M_0 é um ideal de $A[X]$ tal que $M_0 \subset M$ e se $L_i(M_0) = L_i(M)$ para todo $i \in N$, então $M_0 = M$.

137. Demonstrar que se A é um anel noetheriano, então $A[X]$ também é noetheriano. Sugestão: Se $(M_i)_{i\in N}$ é uma cadeia crescente de ideais de $A[X]$, considerar o conjunto $\{L_i(M_j);\ i\in N,\ j\in N\}$; utilizar o exercício anterior e a condição maximal de A. Observação: Daqui resulta que se A é um anel noetheriano, então o anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ também é noetheriano; em particular, se K é um corpo, então $K[X_1,X_2\cdots,X_n]$ é noetheriano.

§5 - ANÉIS QUADRÁTICOS

5.1 - CORPOS QUADRÁTICOS

Um corpo quadrático K é construído a partir do corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais pela adjunção das raízes complexas x_1 e x_2 de um polinômio quadrático f com coeficientes racionais e irredutível em $\mathbf{Q}[X]$. Procuraremos, então, determinar em que condições f é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ e de que forma são os elementos de $K=\mathbf{Q}(x_1,x_2)$.

LEMA 22 - Um polinômio quadrático

$$f=aX^2+bX+c\in\mathbf{Q}[X] \qquad (24),$$

onde $a\neq 0$, é redutível em $\mathbf{Q}[X]$ se, e sòmente se, seu discriminante $D=b^2-4ac$ é um quadrado perfeito em $\mathbf{Q}$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que f seja redutível em $\mathbf{Q}[X]$, logo, existem números racionais x_1 e x_2 tais que

$$f=a(X-x_1)(X-x_2),$$

de onde vem,

$$b=-a(x_1+x_2) \quad \text{e} \quad c=ax_1x_2;$$

portanto,

$$D=a^2(x_1-x_2)^2$$

é um quadrado perfeito em $\mathbf{Q}$. Reciprocamente, suponhamos que exista um número racional D_0 tal que $D=D_0^2$; ora, temos

$$f=a\left[(X+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}\right] \qquad (25),$$

logo,

$$f=a(X+\frac{b+D_0}{2a})(X+\frac{b-D_0}{2a}),$$

ou seja, f é redutível em $\mathbf{Q}[X]$. ∎

Um outro modo de enunciar o teorema acima é o seguinte

COROLÁRIO 1 - O polinômio quadrático $f=aX^2+bX+c\in\mathbf{Q}[X]$, onde $a\neq 0$, é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ se, e sòmente se seu discriminante $D=b^2-4ac$ não é quadrado perfeito em $\mathbf{Q}$.

No caso particular em que os coeficientes de f são números inteiros, o corolário acima nos mostra que f é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ se, e sòmente se, o número inteiro $D=b^2-4ac$ não é quadrado de um número racional; portanto, em virtude do corolário do teorema 25, temos o seguinte

COROLÁRIO 2 - Um polinômio quadrático $f=aX^2+bX+c\in\mathbf{Z}[X]$, onde $a\neq 0$, é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ se, e sòmente se, seu discriminante $D=b^2-4ac$ não é quadrado perfeito em $\mathbf{Z}$.

A fórmula (25) nos mostra que os números complexos

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \qquad (26)$$

são as únicas raízes complexas de f; notemos que, em virtude da convenção feita no §3.2 do Capítulo V, o símbolo $\sqrt{D}$ tem um único significado

$$\sqrt{D}=\begin{cases}+\sqrt{D} & \text{se} \quad D=b^2-4ac\geq 0\\ i(+\sqrt{|D|}) & \text{se} \quad D=b^2-4ac<0.\end{cases}$$

DEFINIÇÃO 28 - Seja

$$f=aX^2+bX+c\in\mathbf{Q}[X],$$

onde $a\neq 0$, um polinômio quadrático irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ e sejam x_1 e x_2 as raízes complexas de f; nestas condições, o subcorpo

$$K_f=\mathbf{Q}(x_1,x_2),$$

do corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos, é denominado *corpo quadrático associado ao polinômio* f.

Observemos que dois polinômios quadráticos distintos podem determinar o mesmo corpo quadrático:

EXEMPLO 26 - As raízes complexas dos polinômios $f=X^2+1$ e $g=2X^2+2X+1$ são $x_1=i$, $x_2=-i$ e $y_1=-1+i$, $y_2=-1-i$ e é imediato que $\mathbf{Q}(i,-i)=\mathbf{Q}(-1+i,-1-i)$, ou seja, $K_f=K_g$.

EXEMPLO 27 - Se $f=aX^2+bX+c\in\mathbf{Q}[X]$, onde $a\neq 0$, é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$, então, para todo $d\in\mathbf{Z}^*$, o polinômio quadrático df também é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ e é imediato que $K_f=K_{df}$.

O exemplo acima nos mostra, em particular, que basta considerar os corpos quadráticos associados a polinômios quadráticos com coeficientes inteiros e irredutíveis em $\mathbf{Q}[X]$. Consideremos, então, um polinômio quadrático $f=aX^2+bX+c$ $(a\neq 0)$, com coeficientes inteiros e irredutível em $\mathbf{Q}[X]$, logo, seu discriminante $D=b^2-4ac$ pode ser representado sob a forma $D=D_0^2m$, onde D_0 e m são números inteiros, $D_0>0$, $m\neq 1$ e m não admite fatôres quadráticos próprios, ou seja, $p^2\nmid m$ para todo número primo p; diz-se, neste caso, que m *é livre de fa-*

tôres quadráticos ou, simplesmente, que m *é livre de quadrados.* Conforme o corolário 2 do lema 22, o polinômio $g = X^2 - m \in \mathbf{Z}[X]$ é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ e notemos que $\omega = \sqrt{m}$ e $-\omega$ são as suas raizes complexas. Com estas notações, temos o seguinte

LEMA 23 - $K_f = K_g$.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme as fórmulas (26), as raízes de f são

$$x_1 = \frac{-b + D_0\omega}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - D_0\omega}{2a}$$

e daqui resulta, imediatamente, que x_1 e x_2 são elementos do corpo quadrático $K_g = \mathbf{Q}(\omega, -\omega) = \mathbf{Q}(\omega)$, logo, $K_f \subset K_g$. Por outro lado, temos $\omega = D_0^{-1}(b + 2ax_1) \in \mathbf{Q}(x_1)$, logo, $\omega \in K_f$ e então $K_g \subset K_f$. ∎

TEOREMA 45 - Seja

$$f = aX^2 + bX + c \in \mathbf{Z}[X],$$

onde $a \neq 0$, um polinômio quadrático irredutível em $\mathbf{Q}[X]$ e ponhamos

$$D = b^2 - 4ac = D_0^2 m \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{m},$$

onde D_0 e m são números inteiros, $D_0 > 0$ e $m \neq 1$ é livre de quadrados; nestas condições, o corpo quadrático K_f, associado ao polinômio f, é o conjunto S de todos os números complexos da forma $x + y\omega$, com x e y racionais.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o sub-anel $\mathbf{Q}[\omega]$, do corpo K_f, gerado pelo conjunto $\mathbf{Q} \cup \{\omega\}$. É imediato que $S \subset \mathbf{Q}[\omega]$; por outro lado, para todo $z \in \mathbf{Q}[\omega]$ existe um polinômio $h \in \mathbf{Q}[X]$ tal que $z = h(\omega)$ (teorema 9, Capítulo VI) e como $h = (X^2 - m)q + (x + yX)$, com x e y racionais e $q \in \mathbf{Q}[X]$, teremos $z = h(\omega) = x + y\omega$ e então $\mathbf{Q}[\omega] \subset S$. Fica assim demonstrado que $S = \mathbf{Q}[\omega]$. Observemos agora que $x + y\omega = 0$ se, e sòmente se, $x = y = 0$ (pois, $\omega \notin \mathbf{Q}$), logo, $x + y\omega \neq 0$ se, e sòmente se, $x - y\omega \neq 0$; portanto, se $x + y\omega \neq 0$, temos

$$(x + y\omega)(x - y\omega) = x^2 - my^2 \neq 0$$

e daqui concluímos que o número complexo

$$\frac{x}{x^2 - my^2} + \frac{-y}{x^2 - my^2}\omega$$

é o inverso em $\mathbf{Q}[\omega]$ de $x + y\omega$. Portanto, $S = \mathbf{Q}[\omega]$ é um corpo e então $S = \mathbf{Q}[\omega] = \mathbf{Q}(\omega)$. ∎

COROLÁRIO - Sejam $m \neq 1$ e $m_1 \neq 1$ dois números inteiros distintos e livres de quadrados e ponhamos $\omega = \sqrt{m}$ e $\omega_1 = \sqrt{m_1}$; nestas condições, temos $\mathbf{Q}(\omega) \neq \mathbf{Q}(\omega_1)$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, por absurdo, que $\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{Q}(\omega_1)$ logo, $\omega \in \mathbf{Q}(\omega_1)$ e então, em virtude do teorema 45, existem números racionais x e y tais que $\omega = x + y\omega_1$, de onde vem, $m = (x^2 + m_1y^2) + 2xy\omega_1$, logo, $xy = 0$ e $x^2 + m_1y^2 = m$. Notando-se que $y \neq 0$, pois, $m \neq x^2$, resulta das igualdades acima que $x = 0$ e então $m_1y^2 = m$. Ora, o número racional y pode ser representado sob a forma r/s, onde r e s são números inteiros primos entre si e $s \neq 0$; portanto, temos $m_1r^2 = ms^2$, de onde vem, $r^2 = s^2 = 1$, pois, m e m_1 são livres de quadrados, logo, $m_1 = m$, contra a hipótese feita sôbre m e m_1. ∎

Os resultados acima nos mostram que a aplicação $m \mapsto \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ é uma bijeção do conjunto dos inteiros livres de quadrados no conjunto dos corpos quadráticos; portanto, a todo corpo quadrático K_f está associado um único número inteiro $m \neq 1$ livre de quadrados tal que $K_f = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$. Diremos, neste caso, que $K_m = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ é o *corpo quadrático associado ao número inteiro* m. No que se segue quando considerarmos um corpo quadrático $\mathbf{Q}(\omega) = K_m$ estará subentendido que $m \neq 1$ é livre de quadrados e que $\omega = \sqrt{m}$.

Consideremos um elemento $x = a + b\omega$ de um corpo quadrático $K_m = \mathbf{Q}(\omega)$, onde a e b são números racionais; o número complexo $\overline{x} = a - b\omega$ é denominado *conjugado de* x e também diremos que x e $\overline{x}$ são *conjugados*. O seguinte teorema, cuja demonstração ficará a cargo do leitor, nos dá as propriedades mais importantes dos conjugados em K_m:

TEOREMA 46 - Se x e y são dois elementos quaisquer do corpo quadrático K_m, então valem as seguintes propriedades:

a) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
b) $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}$;
c) $\overline{\overline{x}} = x$;
d) se $x = a + b\omega$, então $x + \overline{x} = 2a$ e $x\overline{x} = a^2 - mb^2$;
e) $x = \overline{x}$ se, e sòmente se, $x \in \mathbf{Q}$.

As partes a) e b) do teorema acima nos mostram que a aplicação $\sigma: K_m \to K_m$, definida por $\sigma(x) = \overline{x}$, é um automorfismo de K_m e, de acôrdo com c), temos $\sigma \circ \sigma = 1_{K_m}$ e por causa disso diremos que σ é um *automorfismo involutório* de K_m.

A demonstração do teorema abaixo é completamente análoga à demonstração do teorema 24 do Capítulo V e ficará a cargo do leitor.

TEOREMA 47 - Os únicos automorfismos do corpo quadrático K_m são o automorfismo idêntico e o automorfismo σ definido por $\sigma(x) = \overline{x}$ para todo x em K_m.

DEFINIÇÃO 29 - Seja x um elemento qualquer de um corpo quadrático $K_m = \mathbf{Q}(\omega)$; os números racionais

$$T(x) = x + \overline{x} \quad \text{e} \quad N(x) = x\overline{x}$$

são, respectivamente, denominados *traço* e *norma* de x.

Notemos que, de fato, $N(x)$ e $T(x)$ são números racionais, pois, se $x = a + b\omega$, com a e b em $\mathbf{Q}$, temos

$$T(x) = 2a \quad \text{e} \quad N(x) = a^2 - mb^2.$$

TEOREMA 48 - Se x e y são dois elementos quaisquer do corpo quadrático K_m, então valem as seguintes propriedades:

a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$;

b) $T(rx) = rT(x)$ para todo número racional r;

c) $N(xy) = N(x)N(y)$;

d) $N(x) = 0$ se, e sòmente se, $x = 0$.

Deixaremos a verificação das propriedades acima a cargo do leitor.

EXERCÍCIOS

138. Para que valores do número inteiro a, com a limitação $-8 \leq a \leq 10$, o polinômio $f = X^2 + aX - 5$ é irredutível em $\mathbf{Q}[X]$? Em cada caso determinar o corpo quadrático associado ao polinômio f.

139. Demonstrar que se A é um sub-anel de um corpo quadrático K_m e se $\mathbf{Q} \subset A$, então $A = \mathbf{Q}$ ou $A = K_m$. Deduzir daí que os únicos subcorpos de K_m são $\mathbf{Q}$ e K_m.

140. Demonstrar os teoremas 46, 47 e 48.

141. Mostrar que os corpos $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ e $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$ não são quadráticos.

142. A partir de c) do teorema 48 mostrar que vale a seguinte igualdade no anel $\mathbf{Z}$ dos números inteiros:

$$(ac + bdm)^2 - m(ad + bc)^2 = (a^2 - mb^2)(c^2 - md^2).$$

143. Mostrar que o inverso de um elemento não nulo x, de K_m, é $\overline{x}/N(x)$.

5.2 - ANÉIS QUADRÁTICOS

Consideremos um corpo quadrático $K_m = \mathbf{Q}(\omega)$, onde $m \neq 1$ é um inteiro livre de quadrados e $\omega = \sqrt{m}$. Procuraremos distinguir um sub-anel unitário A_m, de K_m, que seja o análogo do sub-anel $\mathbf{Z}$ do corpo $\mathbf{Q}$, ou seja, procuraremos destacar aquêles elementos de K_m que deverão ser considerados como «inteiros». Como todo elemento de K_m é da forma $a + b\omega$, com

a e b racionais, parece natural dizer que êste elemento é um «inteiro» de K_m se a e b são números inteiros, ou seja, parece natural colocar-se $A_m = \mathbf{Z}[\omega] = \{a + b\omega \in K_m \mid a \in \mathbf{Z} \text{ e } b \in \mathbf{Z}\}$. Se adotássemos êste ponto de vista estaríamos excluindo, no caso em que $m \equiv 1 \pmod 4$, certos sub-anéis de K_m para os quais a teoria dos anéis quadráticos pode ser desenvolvida (ver o teorema 50 e o exercício 154).

Observemos, por outro lado, que todo número racional $x = a/b$, onde a e b são números inteiros primos entre si e $b > 0$, é raiz do polinômio $bX - a \in \mathbf{Q}[X]$ e que $x \in \mathbf{Z}$ se, e sòmente se, êste polinômio é unitário. Ora, todo elemento x de K_m é raiz do polinômio quadrático

$$X^2 - T(x)X + N(x)$$

com coeficientes racionais; portanto, procedendo-se de modo análogo ao anterior, devemos dizer que x é um «inteiro quadrático» se, e sòmente se, êste polinômio tem coeficientes inteiros. Uma vez estabelecidas estas considerações daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 30 - Diz-se que um elemento x, de um corpo quadrático K_m, é um *inteiro quadrático* se, e sòmente se, $T(x)$ e $N(x)$ são números inteiros.

Indicaremos por A_m o conjunto de todos os inteiros quadráticos do corpo quadrático K_m, logo,

$$A_m = \{x \in K_m \mid T(x) \in \mathbf{Z} \text{ e } N(x) \in \mathbf{Z}\}.$$

Notemos que $\mathbf{Z} \subset A_m$, logo, $\mathbf{Z} \subset A_m \cap \mathbf{Q}$; por outro lado, se um número racional r é um inteiro quadrático, então temos $N(r) = r^2 \in \mathbf{Z}$ e, neste caso, o corolário do teorema 25 nos mostra que $r \in \mathbf{Z}$. Portanto,

$$A_m \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}.$$

TEOREMA 49 - O conjunto A_m de todos os inteiros quadráticos do corpo quadrático $K_m = \mathbf{Q}(\omega)$ é um sub-anel unitário de K_m.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que se $x \in A_m$, então $-x \in A_m$; falta, então, demonstrar que A_m é fechado em relação às operações de adição e de multiplicação. Sejam x e y dois elementos quaisquer de A_m, logo, $T(x)$, $N(x)$, $T(y)$, $N(y)$ são números inteiros, de onde resulta, em particular, que os números

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad N(xy) = N(x)N(y)$$

também são inteiros. Notando-se agora que

$$N(x+y) = N(x) + N(y) + (x\overline{y} + \overline{x}y)$$

e

$$T(xy) = xy + \overline{x}\,\overline{y}$$

e pondo-se $u = x\overline{y}+\overline{x}y$ e $v = xy+\overline{x}\overline{y}$,

temos $u+v = T(x)T(y)$

e $uv = 4N(x)N(y)+T(x)^2N(y)+T(y)^2N(x)$,

logo, $u+v\in\mathbf{Z}$ e $uv\in\mathbf{Z}$. Ora, os números racionais u e v são raízes de polinômio $X^2-(u+v)X+uv\in\mathbf{Z}[X]$, logo, u e v são inteiros quadráticos e como $A_m\cap\mathbf{Q}=\mathbf{Z}$ concluímos que u e v são números inteiros e daqui resulta, imediatamente, que $N(x+y)$ e $T(xy)$ também são números inteiros. ∎

O sub-anel A_m é denominado *anel dos inteiros quadráticos do corpo* K_m ou, simplesmente, *anel quadrático*; diremos ainda que A_m é um *anel quadrático real* ou *imaginário* conforme tivermos $m>0$ ou $m<0$.

Examinaremos, a seguir, de que forma são os elementos do anel quadrático A_m. Teremos necessidade de distinguir os valores de m segundo o módulo 4 e como m é livre de quadrados só poderemos ter três casos: $m\equiv 1$, 2, 3 (mod. 4); assim, a afirmação $m\not\equiv 1$ (mod. 4) significa que $m\equiv 2$ ou $m\equiv 3$ (mod. 4).

Consideremos, inicialmente, um inteiro quadrático x de K_m e seja $\mathbf{Z}[x]$ o sub-anel, de A_m, gerado por x; é imediato que se $x\in\mathbf{Z}$, então $\mathbf{Z}[x]=\mathbf{Z}$. Com estas notações, demonstraremos o seguinte

LEMA 24 - Se $x\notin\mathbf{Z}$, então todo elemento de $\mathbf{Z}[x]$ pode ser representado, de modo único, sob a forma $a+bx$, onde a e b são números inteiros; em particular, temos

$$\mathbf{Z}[x]=\{a+bx\in A_m \mid a\in\mathbf{Z} \text{ e } b\in\mathbf{Z}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Para todo $y\in\mathbf{Z}[x]$ existe um polinômio $h\in\mathbf{Z}[X]$ tal que $y=h(x)$ (teorema 9, Capítulo VI); por outro lado, o elemento x é raiz do polinômio unitário $f=X^2-T(x)X+N(x)\in\mathbf{Z}[X]$ e, de acôrdo com o algoritmo da divisão, temos $h=qf+(a+bX)$, onde a e b são números racionais e $q\in\mathbf{Z}[X]$, de onde vem, $y=a+bx$. Finalmente, de $a+bx=c+dx$, com a, b, c e d inteiros e $b\neq d$, vem $x=(b-d)^{-1}(c-a)\in\mathbf{Q}$ e como $x\in A_m$, teremos $x\in\mathbf{Z}$, contra a hipótese; portanto, de $a+bx=c+dx$ conclui-se que $a=c$ e $b=d$. ∎

O lema acima nos mostra, em particular, que

$$\mathbf{Z}[\omega]=\{a+b\omega\in A_m \mid a\in\mathbf{Z} \text{ e } b\in\mathbf{Z}\} \qquad (27).$$

Para $m\equiv 1$ (mod. 4), o elemento $x=\frac{1}{2}(1+\omega)$ é um inteiro quadrático, pois, $T(x)=1$ e $N(x)=\frac{1}{4}(1-m)$, logo,

$$\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}(1+\omega)]=\{a+\tfrac{1}{2}b(1+\omega)\in A_m \mid a\in\mathbf{Z} \text{ e } b\in\mathbf{Z}\} \qquad (28)$$

e notemos que $$\mathbf{Z}[\omega]\subset\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}(1+\omega)]\subset A_m \qquad (29).$$

TEOREMA 50 - Para todo número inteiro $m\neq 1$ livre de quadrados, temos:

$$A_m=\mathbf{Z}[\omega] \quad \text{se} \quad m\not\equiv 1 \text{ (mod. 4)}$$

e

$$A_m=\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}(1+\omega)] \quad \text{se} \quad m\equiv 1 \text{ (mod. 4)}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Já sabemos que $\mathbf{Z}[\omega]\subset A_m$ para todo m; se demonstrarmos que a relação $\mathbf{Z}[\omega]\neq A_m$ implica que $m\equiv 1$ (mod. 4) concluiremos, em virtude de (29), que $A_m=\mathbf{Z}[\omega]$ se, e sòmente se, $m\not\equiv 1$ (mod. 4). Suponhamos, então, que exista $x\in A_m$ tal que $x\notin\mathbf{Z}[\omega]$; ora, x é um elemento de $K_m=\mathbf{Q}[\omega]$, logo, x pode ser representado sob a forma

$$x=\frac{a+b\omega}{c},$$

onde podemos supor que a, b e c sejam números inteiros primos entre si, $c>0$ e onde temos, necessàriamente, $b\neq 0$ e $c>1$. De acôrdo com a definição de inteiro quadrático, temos

$$T(x)=\frac{2a}{c}\in\mathbf{Z} \quad \text{e} \quad N(x)=\frac{a^2-mb^2}{c^2}\in\mathbf{Z}.$$

Mostraremos, inicialmente, que $mdc(a,c)=1$. Com efeito, no caso contrário existe um número primo p tal que $p|a$ e $p|c$, logo, $p^2|(a^2-mb^2)$, de onde vem, $p^2|(mb^2)$ e como m é livre de quadrados resulta que $p|b$ e então $mdc(a,b,c)\neq 1$, contra a hipótese.

De $2a/c\in\mathbf{Z}$ e $mdc(a,c)=1$ concluímos que $c=2$, logo,

$$a^2\equiv mb^2 \text{ (mod. 4)}.$$

Se $m\not\equiv 1$ (mod. 4) resulta, fàcilmente, da congruência acima que a e b são pares, logo, $x\in\mathbf{Z}[\omega]$, contra a hipótese; portanto, $m\equiv 1$ (mod. 4).

Finalmente, suponhamos que $m\equiv 1$ (mod. 4), logo, de acôrdo com (29), temos $A_m\neq\mathbf{Z}[\omega]$; portanto, em virtude da discussão feita acima, todo elemento x de A_m tal que $x\notin\mathbf{Z}[\omega]$ é da forma $x=\frac{1}{2}(a+b\omega)$, onde a e b são inteiros ímpares e, neste caso, temos

$$x=\frac{a-b}{2}+b\left[\frac{1}{2}(1+\omega)\right],$$

com $(a-b)/2\in\mathbf{Z}$, logo, $x\in\mathbf{Z}[\frac{1}{2}(1+\omega)]$ e então $A_m=\mathbf{Z}[\frac{1}{2}(1+\omega)]$. ∎

TEOREMA 51 - $U(A_m)=\{x\in A_m \mid N(x)=\pm 1\}$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $N(x)=\pm 1$, temos $x\bar{x}=\pm 1$ ou $x(\pm\bar{x})=1$, logo, x é inversível. Reciprocamente, se $x\in U(A_m)$, então existe y em A_m tal que $xy=1$, de onde vem, $N(x)N(y)=1$ e como $N(x)$ e $N(y)$ são números inteiros concluímos que $N(x)=\pm 1$. ∎

Utilizando-se o teorema acima determinam-se, fàcilmente, os elementos inversíveis de um anel quadrático imaginário A_m e temos

$$U(A_{-1})=\{-1,1,-i,i\},$$
$$U(A_{-3})=\{-1,1,-\varrho,\varrho,-\varrho^2,\varrho^2\},$$

onde $\varrho=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ e

$$U(A_m)=\{-1,1\}$$

para todo $m<0$, $m\neq -1$ e $m\neq -3$.

Para um anel quadrático real A_m, o problema da determinação do grupo $U(A_m)$ não é tão simples como no caso anterior e não será desenvolvido nestas notas; demonstra-se (ver [9], pp.96-99) que existe um elemento inversível $\eta>1$ em A_m tal que

$$U(A_m)=\{\pm\eta^s\in A_m \mid s\in \mathbf{Z}\}.$$

Consideremos agora a aplicação $\delta: A_m^*\to \mathbf{N}$ definida por $\delta(x)=|N(x)|$. De acôrdo com o teorema 48, temos $\delta(x)\geqslant 1$ e $\delta(xy)=\delta(x)\delta(y)$, quaisquer que sejam x e y em A_m^*; além disso, se $y\notin U(A_m)\cup\{0\}$, então $\delta(y)>1$ (teorema 51), logo, a aplicação δ satisfaz as condições AE1 e AE2 (ver o §2.1) e, neste caso, o teorema 13 nos mostra que é válido o seguinte

TEOREMA 52 - Todo anel quadrático satisfaz a condição AF1.

Observemos que nem todo anel quadrático é fatorial:

EXEMPLO 28 - No anel A_{-5} temos

$$3\cdot 3=(2+i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5})$$

e é fácil verificar que todo elemento $x\in A$ tal que $N(x)=9$ é irredutível; em particular 3, $2+i\sqrt{5}$ e $2-i\sqrt{5}$ são irredutíveis e é imediato que 3 não é associado a $2+i\sqrt{5}$ e nem a $2-i\sqrt{5}$, pois, $U(A_{-5})=\{-1,1\}$. Portanto, a condição AF2 não é verdadeira em A_{-5}.

Podemos, então, propor o seguinte problema:

A) para que valores de m o anel quadrático A_m é fatorial?

Esta questão ainda não está resolvida em Matemática; conhecem-se, simplesmente, condições necessárias sôbre m para que A_m seja fatorial (algumas informações estão dadas nos exercícios 186-9). Para resolver o problema A) pode-se tentar a introdução de um algoritmo da divisão sôbre A_m e a aplicação $x\mapsto|N(x)|$, que já satisfaz as condições AE1 e AE2, aparece naturalmente como uma possível escolha; se esta aplicação satisfazer a condição AE3 diremos que A_m é *N-euclidiano*. Coloca-se, então, o seguinte problema:

B) para que valores de m o anel quadrático A_m é N-euclidiano?

Esta questão está completamente resolvida e demonstra-se que os únicos valores de m que satisfazem B) são os seguintes: -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57 e 73.

Existem outros valores de m que satisfazem A) e não satisfazem B); os dois primeiros são os seguintes: 14 e 19. Pode-se, então, propor o seguinte problema:

C) se A_m é fatorial e se A_m não é N-euclidiano, então existe um algoritmo da divisão δ sôbre A_m de modo que A_m seja δ-euclidiano?

Esta questão só está resolvida para anéis quadráticos imaginários (ver o teorema 54).

Demonstraremos abaixo que o anel quadrático A_m é N-euclidiano para $m=-11,-7,-5,-3,-2,-1,2,3,5$ e 13 e para isso necessitamos do seguinte

LEMA 25 - O anel quadrático A_m é N-euclidiano se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: para todo α em K_m, existe $q\in A_m$ tal que $|N(\alpha-q)|<1$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que a aplicação $x\mapsto|N(x)|$ satisfaça a condição AE3 e seja α um elemento qualquer de K_m; podemos, evidentemente, supor que $\alpha\notin A_m$, logo, êste elemento é da forma $\alpha=\beta/\gamma$, com β e γ em $A_m, \gamma\neq 0$ e $\gamma\nmid\beta$. Em virtude de AE3 resulta que existe $q\in A_m$ tal que $|N(\beta-q\gamma)|<|N(\beta)|$, de onde vem, $|N(\alpha-q)|<1$. Reciprocamente, suponhamos que a condição acima seja verdadeira em K_m e consideremos dois elementos β e γ, de A_m, tais que $\gamma\neq 0$ e $\gamma\nmid\beta$; existe, então, $q\in A_m$ tal que $|N(\beta/\gamma-q)|<1$, de onde vem, $|N(\beta-q\gamma)|<|N(\beta)|$. ∎

TEOREMA 53 - O anel quadrático imaginário A_m é N-euclidiano para $m=-1,-2,-3,-7,-11$.

DEMONSTRAÇÃO - Distinguiremos dois casos conforme tivermos $m\not\equiv 1$ (mod. 4) ou $m\equiv 1$ (mod. 4).

1.º) Seja α um elemento qualquer de K_m, logo, $\alpha=A+B\omega$,

onde A e B são números racionais; existem, então, números inteiros x e y tais que

$$|A-x|\leqslant 1/2 \quad \text{e} \quad |B-y|\leqslant 1/2.$$

Pondo-se $q=x+y\omega\in A_m$ e notando-se que $|m|\leqslant 2$, teremos

$$N(\alpha-q)=(A-x)^2+|m|(B-y)^2\leqslant(A-x)^2+2(B-y)^2\leqslant\tfrac{3}{4}<1;$$

portanto, A_m é N-euclidiano para $m=-1$ e $m=-2$.

2.º Representemos o elemento α sob a forma $\alpha=A+\frac{1}{2}B(1+\omega)$, onde A e B são números racionais; dado o número racional B existe um número inteiro y tal que $|B-y|\leqslant 1/2$ e considerando-se agora o número racional $A+\frac{B}{2}+\frac{y}{2}$ existe um número inteiro x tal que

$$|A+\frac{B}{2}+\frac{y}{2}-x|\leqslant 1.$$

Pondo-se $q=x+\frac{1}{2}y(1+\omega)$ e notando-se que $|m|\leqslant 11$, teremos

$$N(\alpha-q)=(A+\frac{B}{2}+\frac{y}{2}-x)^2+|m|(B-y)^2\leqslant\frac{15}{16}<1;$$

portanto, A_m é N-euclidiano para $m=-3, -7$ e -11. ∎

É fácil verificar que os anéis quadráticos A_{-6} e A_{-10} não são fatoriais (ver o exercício 146), logo, êstes anéis também não são N-euclidianos; portanto, para m tal que $-13<m<0$ só temos cinco anéis euclidianos correspondentes aos valores citados no teorema acima. Vamos demonstrar que êstes são os únicos anéis quadráticos imaginários euclidianos:

TEOREMA 54 - O anel quadrático A_m, onde $m<-11$, não é euclidiano.

DEMONSTRAÇÃO - Verifica-se, inicialmente, que a hipótese $m<-11$ implica que 2 e 3 são irredutíveis em A_m e é imediato que 2 e 3 não são divisores, em A_m, de ω e nem de $\omega_0=\frac{1}{2}(1+\omega)$ quando $m\equiv 1$ (mod. 4). Suponhamos, por absurdo, que exista uma aplicação $\delta: A_m^*\to N$ que satisfaça as condições AE1 e AE3 e ponhamos

$$\delta(p)=min\,\delta(B_m),$$

onde

$$B_m=A_m-U(A_m)\cup\{0\}=A_m-\{-1,1,0\};$$

é fácil mostrar que p é irredutível em A_m. Se $p|2$, temos, $p=\pm 2$; se $p\nmid 2$, então existem q e $r\neq 0$ em A_m tais que $2=qp+r$, onde $\delta(r)<\delta(p)$, logo, $r\in U(A_m)$ e como $r\neq 1$ teremos $r=-1$ e então $p=\pm 3$. Em resumo, p só pode assumir quatro valores: ± 2 e ± 3. Distinguiremos agora dois casos conforme tivermos $m\not\equiv 1$ (mod. 4) ou $m\equiv 1$ (mod. 4).

1.º) Como $p\nmid\omega$ resulta que existem q_1 e $r_1\neq 0$ em A_m tais que $\omega=q_1p+r_1$, onde $\delta(r_1)<\delta(p)$, logo, $r_1=\pm 1$; ora, $q_1+a_1+b_1\omega$, com a_1 e b_1 inteiros, de onde vem, $b_1p=1$, o que é absurdo.

2.º) Como $p\nmid\omega_0$ resulta que existem q_2 e $r_2\neq 0$ em A_m tais que $\omega_0=q_2p+r_2$, onde $\delta(r_2)<\delta(p)$, logo, $r_2=\pm 1$ e então $\omega_0=q_2p\pm 1$; ora, $q_2=a_2+b_2\omega_0$, com a_2 e b_2 inteiros, de onde vem, $b_2p=1$, o que é absurdo. ∎

O problema da determinação dos anéis quadráticos reais A_m que são N-euclidianos é bastante complexo e só demonstraremos o seguinte

TEOREMA 55 - Para $m=2, 3, 5$ e 13 o anel quadrático A_m é N-euclidiano.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos distinguir dois casos conforme tivermos $m\not\equiv 1$ (mod. 4) ou $m\equiv 1$ (mod. 4).

1.º) Seja $\alpha=A+B\omega$, com A e B racionais, um elemento qualquer de K_m e consideremos números inteiros x e y tais que

$$|A-x|\leqslant 1/2 \quad \text{e} \quad |B-y|\leqslant 1/2$$

e ponhamos $q=x+y\omega$, logo,

$$|N(\alpha-q)|=|(A-x)^2-m(B-y)^2|.$$

Ora, temos

$$(A-x)^2-m(B-y)^2\leqslant(A-x)^2\leqslant\tfrac{1}{4}$$

e

$$(A-x)^2-m(B-y)^2\geqslant -m(B-y)^2\geqslant -\frac{m}{4};$$

portanto, se $m=2$ ou $m=3$, teremos $|N(\alpha-q)|<1$.

2.º) Seja $\alpha=A+\frac{1}{2}B(1+\omega)$, com A e B racionais, um elemento qualquer de K_m, consideremos um número inteiro y tal que $|B-y|\leqslant\frac{1}{2}$ e para êste inteiro y seja $x\in\mathbf{Z}$ tal que $|(A+\frac{B}{2}-\frac{y}{2})-x|\leqslant\frac{1}{2}$. Pondo-se $q=x+\frac{1}{2}y(1+\omega)$ temos

$$|N(\alpha-q)|=|A+(\frac{B}{2}-x-\frac{y}{2})^2-\frac{m}{4}(B-y)^2|.$$

Ora,

$$(A+\frac{B}{2}-x-\frac{y}{2})^2-\frac{m}{4}(B-y)^2\leqslant(A+\frac{B}{2}-x-\frac{y}{2})^2\leqslant\frac{1}{4}$$

e

$$(A+\frac{B}{2}-x-\frac{y}{2})^2-\frac{m}{4}(B-y)^2\geqslant-\frac{m}{4}(B-y)^2\geqslant-\frac{m}{16};$$

portanto, se $m=5$ ou $m=13$, teremos $|N(\alpha-q)|<1$. ∎

EXERCÍCIOS

144. Mostrar, diretamente, que o anel quadrático A_{-5} não é principal. Sugestão: considerar o ideal gerado pelo conjunto $\{3, 2+i\sqrt{5}\}$. Observação: êste resultado é conseqüência imediata do teorema 41 e do exemplo 28.

145. Conforme o exemplo 28, o anel quadrático A_{-5} não satisfaz a condição AF2; portanto, êste anel também não satisfaz as condições AF3, AF4, AF5 e AF6. Escolher, em cada caso abaixo, elementos α e β em A_{-5}, de modo que cada uma das seguintes propriedades seja verdadeira:

a) α é irredutível e não é primo;

b) α e β não admitem um *mdc* em A_{-5};

c) α e β não admitem um *mmc* em A_{-5},

d) α e β são relativamente primos e não existem elementos r e s em A_{-5} tais que $r\alpha+s\beta=1$.

146. Mostrar que os anéis quadráticos A_{-6} e A_{-10} não são fatoriais. Estabelecer resultados análogos aos dos exercícios 144 e 145 para êstes anéis.

147. Sejam x e $y\neq 0$ dois elementos do anel quadrático A_m; demonstrar que se $x|y$, então $\overline{x}|\overline{y}$ e $N(x)\,|\,N(y)$.

148. Se $x\in A_m$ e se $N(x)$ é um inteiro primo, então x é irredutível em A_m. Sugestão: exercício anterior.

149. Demonstrar que em todo corpo quadrático K_m existe um elemento x tal que $N(x)\in\mathbf{Z}$ e $x\notin A_m$. Sugestão: $x=b^{-1}(a-2\omega)$, com a e b inteiros convenientes que satisfazem a condição $a^2-b^2=4m$.

150. Determinar um *mdc* e um *mmc* dos seguintes elementos α e β do anel quadrático A_m:

a) $\alpha=1-2i$, $\beta=2+2i$, $m=-1$;

b) $\alpha=\frac{1}{2}(5+7i\sqrt{3})$, $\beta=3+i\sqrt{3}$, $m=-3$;

c) $\alpha=3-\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$, $m=2$.

Em cada caso determinar elementos r e s em A_m tais que $r\alpha+s\beta=d$.

151. Representar cada um dos seguintes polinômios de $A_m[X]$ como o produto de uma constante por um polinômio primitivo em $A_m[X]$:

a) $2X^2+(1+i)X+3+i$, $m=-1$;

b) $2X^2+(2-\sqrt{2})X+(4-\sqrt{2})$, $m=2$;

c) $6X^2+3(5+2\sqrt{6})X+2(5-2\sqrt{6})$, $m=6$.

152. Determinar uma decomposição em fatôres irredutíveis, em $A_m[X]$, do polinômio $f\in A_m[X]$, nos seguintes casos:

a) $f=2(X^2+1)(X^2-X-2)$, $m=-1$;

b) $f=2(X^2-2)(X^3-2X^2-2X)$, $m=2$;

c) $f=7(X^2-X+2)(X^2-3X+36)$, $m=-7$.

153. Demonstrar que a igualdade $10=(\sqrt{10})^2=2\cdot 5$, em A_{10}, implica que o anel quadrático A_{10} não é fatorial. Sugestão: Mostrar que as equações $x^2-10y^2=\pm 2$ ou ± 5 não têm soluções inteiras.

154. Demonstrar que se $m\equiv 1$ (mod. 4), então o anel $\mathbf{Z}[\sqrt{m}]$ não é fatorial. Sugestão: corolário do teorema 25 aplicado ao elemento $\frac{1}{2}(1+\sqrt{m})$ de K_m.

155. Demonstrar que um número natural primo p é redutível em A_{-1} se, e sòmente se, existem números inteiros x e y tais que $x^2+y^2=p$. Concluir daí que todo número natural primo da forma $4n+3$ é primo em A_{-1}. (Ver também o exercício 177).

156. No anel quadrático A_{-3} temos

$$(\tfrac{5}{3}+\tfrac{i\sqrt{3}}{2})(\tfrac{5}{2}-\tfrac{i\sqrt{3}}{2})=(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3});$$

mostrar que esta igualdade é consistente com a afirmação: A_{-3} é fatorial.

5.3 - IDEAIS NUM ANEL QUADRÁTICO

Consideremos um número inteiro $m\neq 1$ livre de quadrados e seja $K_m=\mathbf{Q}(\omega)$ o corpo quadrático associado a m; pondo-se

$$\omega_0=\begin{cases}\omega \text{ se } m\not\equiv 1 \text{ (mod. 4)}\\ \frac{1}{2}(1+\omega) \text{ se } m\equiv 1 \text{ (mod. 4)},\end{cases}$$

o teorema 50 nos mostra que

$$A_m=\mathbf{Z}[\omega_0]=\{a+b\omega_0\in K_m \mid a\in\mathbf{Z} \text{ e } b\in\mathbf{Z}\},$$

ou, sob forma condensada:

$$A_m=\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\omega_0.$$

Mostraremos, a seguir, que todo ideal de A_m é de tipo finito (definição 18) e esta propriedade será uma conseqüência imediata do resultado mais preciso:

TEOREMA 56 - Para todo ideal não nulo M, do anel quadrático $A_m=\mathbf{Z}[\omega_0]$, existe uma única terna ordenada $(a,b,c)\in\mathbf{N}^3$ tal que

$$M=\mathbf{Z}a+\mathbf{Z}\theta \qquad (30),$$

onde $\theta=b+c\omega_0$, $a>b\geq 0$ e $a\geq c>0$.

DEMONSTRAÇÃO - Notemos que se α é um elemento não nulo de M, então o número inteiro $N(\alpha)=\alpha\overline{\alpha}\neq 0$ também pertence a M, logo, $M\cap\mathbf{Z}\neq\{0\}$; por outro lado, é fácil verificar que $M\cap\mathbf{Z}$ é um ideal de $\mathbf{Z}$, de onde vem, conforme corolário do teorema 43, que existe um número natural não nulo a tal que $M\cap\mathbf{Z}=\mathbf{Z}a$ e é imediato que a é divisor de todo número inteiro pertencente a M. Observemos agora que existem em M elementos da forma $g_1+h\omega_0$, com g_1 e h inteiros e $h>0$ (por exemplo, $a\omega_0$); portanto, existe um menor número natural não nulo c tal que $g+c\omega_0\in M$ e indicando-se por b o resto da divisão euclidiana de g por a resulta que

$$\theta=b+c\omega_0\in M,$$

onde $a>b\geq 0$ e $c>0$. A demonstração de que a terna ordenada (a,b,c) satisfaz as condições citadas no teorema acima será feita em três partes.

I. Afirmamos que $c|a$. Com efeito, de acôrdo com o algoritmo

da divisão em $\mathbf{Z}$, temos $q=qc+a_1$, onde $0\leqslant a_1<c$; ora, o elemento

$$a\omega_0-q\theta=-qb+a_1\omega_0$$

pertence a M, logo, em virtude da definição de c, teremos $a_1=0$ e então $0<c\leqslant a$.

II. Afirmamos agora que vale a igualdade (30) e para isso basta mostrar que $M\subset\mathbf{Z}a+\mathbf{Z}\theta$. Consideremos, então, um elemento qualquer $x+y\omega_0$ de M, com x e y inteiros; novamente, de acôrdo com o algoritmo da divisão, temos $x=q_1c+x_1$, onde $0\leqslant x_1<c$, logo, o elemento

$$(x+y\omega_0)-q_1\theta=(x-q_1b)+x_1\omega_0 \tag{31}$$

pertence a M. Portanto, conforme a definição de c, temos $x_1=0$, logo, $x-q_1b\in M\cap\mathbf{Z}=\mathbf{Z}a$ e então existe q_2 em $\mathbf{Z}$ tal que $x-q_1b=q_2a$; neste caso, a igualdade (31) nos mostra que

$$x+y\omega_0=q_2a+q_1\theta,$$

o que termina a verificação da inclusão acima.

III. Unicidade da terna (a,b,c). Suponhamos que $(a',b',c')\in\mathbf{N}^3$ seja tal que $a'>b'\geqslant 0$, $c'>0$ e $M=\mathbf{Z}a'+\mathbf{Z}\theta'$, onde $\theta'=b'+c'\omega_0$. Ora, temos $\mathbf{Z}a=M\cap\mathbf{Z}=\mathbf{Z}a'$, logo, $a=a'$. Por outro lado, existem números inteiros r_1 e r_2 tais que $\theta=r_1a'+r_2\theta'$, de onde vem, $c=r_2c'$, ou seja, $c'|c$; anàlogamente, demonstra-se que $c|c'$ e então $c=c'$. Finalmente, de $b-b'=\theta-\theta'\in M$ resulta que $|b-b'|\in M$, logo, a é um divisor de $|b-b'|$ e como $0\leqslant|b-b'|<a$ teremos, necessàriamente, $b=b'$. ∎

A fórmula (30) nos mostra que o conjunto $\{a,\theta\}$ é um sistema de geradores de M em A_m; portanto, todo ideal de A_m é de tipo finito.

Indicaremos por $\mathcal{F}(M)$ o conjunto de todos os ideais de A_m que contêm o ideal M e notemos que se $M_1\in\mathcal{F}(M)$, então $\mathcal{F}(M_1)\subset\mathcal{F}(M)$. O ideal principal A_mx, com $x\in A_m$, também será indicado por (x).

Entre as conseqüências mais importantes do teorema 56 daremos o seguinte

COROLÁRIO - a) Para todo número inteiro $g>0$, o conjunto $\mathcal{F}((g))$ é finito.

b) Para todo ideal não nulo M, de A_m, o conjunto $\mathcal{F}(M)$ é finito.

c) Para todo ideal não unitário M, de A_m, existe um ideal maximal P em A_m tal que $M\subset P$.

DEMONSTRAÇÃO - a) Seja $M=\mathbf{Z}a+\mathbf{Z}\theta$, com $\theta=b+c\omega_0$, onde a, b e c satisfazem as condições $a>b\geqslant 0$ e $a\geqslant c>0$, um ideal qualquer de A_m que contenha o ideal principal (g); de $g\in M$ resulta que $a|g$; logo, os elementos da terna ordenada (a,b,c) estão sujeitos às seguintes restrições: $0<a\leqslant g$, $0\leqslant b<a\leqslant g$ e $0<c\leqslant a\leqslant g$. Ora, o número de ternas ordenadas que satisfazem estas condições é g^3, logo, em virtude do teorema 56, o conjunto $\mathcal{F}((g))$ é finito.

b) De acôrdo com a demonstração do teorema 56 existe um número natural não nulo a em M, logo, $(a)\subset M$, de onde vem, $\mathcal{F}(M)\subset\mathcal{F}((a))$; portanto, em virtude de a), o conjunto $\mathcal{F}(M)$ é finito.

c) Conforme a parte b) o conjunto $\mathcal{F}(M)-\{(1)\}$ é finito e não vazio, logo, em virtude do exemplo 22, êste conjunto, ordenado por inclusão, possui um elemento maximal P e é imediato que P é um ideal maximal de A_m. ∎

Consideremos o automorfismo σ do corpo quadrático $K_m=\mathbf{Q}(\omega)$ definido por $\sigma(\alpha)=\overline{\alpha}$ e notemos que $\sigma(A_m)=A_m$, logo, σ induz um automorfismo sôbre $A_m=\mathbf{Z}[\omega_0]$; além disso, é fácil verificar que para todo ideal M, de A_m, o conjunto $\overline{M}=\sigma(M)$ é um ideal (diz-se, que $\overline{M}$ é o *ideal conjugado de* M). Por exemplo, se $M=A_m(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, então $\overline{M}=\sigma(M)=A_m(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots,\overline{\alpha}_s)$; em particular, se $M=\mathbf{Z}a+\mathbf{Z}\theta$, então $\overline{M}=\mathbf{Z}a+\mathbf{Z}\overline{\theta}$, onde $\theta=b+c\omega_0$ e $\overline{\theta}=b+c\omega_0$. Vamos demonstrar que o ideal produto $M\overline{M}$ é principal e para isso necessitamos de duas propriedades preliminares dadas pelos lemas abaixo.

LEMA 26 - Se $M=A_m(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ é um ideal de A_m, onde $a_1,a_2,\cdots,a_s$ são números inteiros, então existe $g\in\mathbf{Z}$ tal que $M=(g)$.

Basta colocar $g=mdc(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ e levar em conta que existem números inteiros $r_1,r_2,\cdots,r_s$ tais que $r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_sa_s=g$. ∎

LEMA 27 - Sejam x e y dois elementos quaisquer do anel quadrático A_m e suponhamos que um número inteiro $g\neq 0$ seja um divisor do $x\overline{x}$, $y\overline{y}$ e $x\overline{y}+\overline{x}y$; nestas condições, g é um divisor de $x\overline{y}$ e, portanto, g também é um divisor de $\overline{x}y$.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o elemento $g^{-1}x\overline{y}$ do corpo quadrático K_m; temos

$$T(g^{-1}x\overline{y})=g^{-1}(x\overline{y}+\overline{x}y)\quad\text{e}\quad N(g^{-1}x\overline{y})=g^{-2}(x\overline{x}y\overline{y}),$$

números estes que são inteiros em virtude das hipóteses acima, logo, $g^{-1}x\overline{y}\in A_m$, ou seja, g é um divisor de $x\overline{y}$ em A_m. ∎

TEOREMA 57 - Para todo ideal M, do anel quadrático A_m, existe um número inteiro g tal que $M\overline{M}=(g)$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $M=\{0\}$, basta escolher $g=0$; suponhamos, então, que $M\neq\{0\}$. Neste caso, em virtude do teorema 56, temos $M=A_m(a,\theta)$, logo, $\overline{M}=A_m(a,\bar{\theta})$, e

$$M\overline{M}=A_m(a^2,a\bar{\theta}+a\theta,\theta\bar{\theta}).$$

Ora, o ideal $N=A_m(a^2,a\theta+a\bar{\theta},\theta\bar{\theta})$ está contido em $M\overline{M}$ e como os geradores $a^2,a(\theta+\bar{\theta}),\theta\bar{\theta}$ são números inteiros resulta, conforme o lema 26, que existe $g\in\boldsymbol{Z}$ tal que $N=A_mg$; portanto, g é divisor de $a^2,a\theta+a\bar{\theta}$ e $\theta\bar{\theta}$, logo, de acôrdo com o lema 27, g também é divisor de $a\theta$ e $a\bar{\theta}$ e então g é divisor de todo elemento de $M\overline{M}$, ou seja, $M\overline{M}\subset A_mg$. ∎

Consideremos o conjunto $\mathcal{J}=(\mathcal{J}(A_m))^*$ de todos os ideais não nulos do anel quadrático A_m; já sabemos que $(\mathcal{J},\cdot,\subset)$ é um monóide comutativo parcialmente ordenado e vamos demonstrar que todo elemento dêste monóide é regular para a multiplicação. Para isso precisamos da seguinte propriedade preliminar:

LEMA 28 - Se N, N_1 e (γ) são ideais de A_m tais que $(\gamma)N=(\gamma)N_1$ e se $\gamma\neq 0$, então $N=N_1$.

É uma conseqüência imediata da definição de ideal principal e da definição de produto de dois ideais. ∎

TEOREMA 58 - Todo elemento M do monóide $(\mathcal{J},\cdot)$ é regular para a multiplicação.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $MN=MN_1$, com N e N_1 em $\mathcal{J}$; daqui resulta, $(\overline{M}M)N=(\overline{M}M)N_1$, ou, $(g)N=(g)N_1$, de onde vem, conforme o lema 28, $N=N_1$. ∎

LEMA 29 - Seja $M\neq\{0\}$ um ideal de A_m, seja γ um elemento não nulo de A_m e suponhamos que $M\subset(\gamma)$; nestas condições, existe um ideal N tal que $M=(\gamma)N$.

DEMONSTRAÇÃO - Indicando-se por N o conjunto de todos os elementos $\gamma^{-1}x$, com $x\in M$, temos $N\subset A_m$ e é imediato que N é um ideal de A_m; de $x=\gamma(\gamma^{-1})x$ concluímos que $M\subset(\gamma)N$ e, por outro lado, é evidente que $(\gamma)N\subset M$, logo, $M=(\gamma)N$. ∎

TEOREMA 59 - Quaisquer que sejam os elementos M e N de $\mathcal{J}$, tem-se $M\subset N$ se, e sòmente se, existe R em $\mathcal{J}$ tal que $M=RN$.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que $M=NR$ implica $M\subset N$. Recìprocamente, de $M\subset N$ vem $M\overline{N}\subset N\overline{N}=(g)$, logo, em virtude do lema 29, existe um ideal R tal que $MN=(g)R$, de onde vem, $M(\overline{N}N)=(g)RN$, ou, $(g)M=(g)RN$ e então $M=RN$. ∎

LEMA 30 - Seja $P\neq\{0\}$ um ideal primo do anel quadrático A_m; se M e N são ideais de A_m e se $MN\subset P$, então $M\subset P$ ou $N\subset P$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $M\not\subset P$ e seja α um elemento de M tal que $\alpha\notin P$; para todo $x\in N$ temos $\alpha x\in MN\subset P$ e como P é primo resulta que $x\in P$, logo, $N\subset P$. ∎

COROLÁRIO - Todo ideal primo próprio do anel quadrático A_m é um ideal maximal.

DEMONSTRAÇÃO - Seja M um ideal de A_m tal que $P\subset M$ e $P\neq M$; de acôrdo com o teorema 59 existe um ideal R tal que $MR=P$, logo, em virtude do lema 30, temos $R\subset P$ e então $R=P$. Portanto, temos $MP=P=(1)P$ e, neste caso, o teorema 58 nos mostra que $M=(1)$. ∎

TEOREMA 60 - a) Todo ideal próprio M do anel quadrático A_m é igual a um produto de ideais maximais de A_m.

b) Se
$$P_1P_2\cdots P_s=Q_1Q_2\cdots Q_t \qquad (32),$$
onde cada P_i e cada Q_j são ideais maximais, então $s=t$ e $P_i=Q_i$ para $i=1,2,\cdots,s$ (usando-se uma notação conveniente).

DEMONSTRAÇÃO - a) Procederemos por indução finita sôbre o número $f(M)$ de elementos do conjunto finito $\mathcal{F}(M)$ (corolário do teorema 56), observando-se que para $f(M)=2$ nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que $f(M)\geqslant 2$ e que a parte a) seja verdadeira para todo ideal próprio N tal que $2\leqslant f(N)<f(M)$; de acôrdo com o corolário do teorema 56, existe um ideal maximal P_1 tal que $M\subset P_1$ e então, em virtude do teorema 59, existe um ideal N tal que $M=P_1N$. Notando-se que $M\subset N$ e $M\neq N$ (teorema 58), temos $f(N)<f(M)$; portanto, de acôrdo com a hipótese de indução, existem ideais maximais $P_2,\cdots,P_s$ tais que $N=P_2\cdots P_s$, de onde vem, $M=P_1P_2\cdots P_s$.

b) Faremos a demonstração por indução finita sôbre o número natural não nulo s observando, inicialmente, que para $s=1$ tem-se $t=1$ e então $P_1=Q_1$. Suponhamos, então, que $s>1$ e que a parte b) seja verdadeira para $s-1$; de (32) resulta $P_1P_2\cdots P_s\subset Q_1$ logo, de acôrdo com o lema 30, existe um índi-

ce i, com $1 \leqslant i \leqslant s$, tal que $P_i \subset Q_1$ e então $P_i = Q_1$ (pois, P_i e Q_1 são ideais maximais). Usando-se uma notação conveniente podemos supor que $i = 1$ e teremos

$$P_1 P_2 \cdots P_s = P_1 Q_2 \cdots Q_t,$$

logo,

$$P_2 \cdots P_s = Q_2 \cdots Q_t,$$

pois, P_1 é regular para a multiplicação (teorema 58); portanto, conforme a hipótese de indução, temos $s-1 = t-1$ e $P_i = Q_i$ para $i = 2, \cdots, s$ (usando-se uma notação conveniente). Em resumo, temos $s = t$ e $P_i = Q_i$ para $i = 1, 2, \cdots, s$. ∎

OBSERVAÇÃO - Já sabemos que nem todo anel quadrático A_m é fatorial; o teorema acima restabelece a unicidade da decomposição em fatôres irredutíveis para os ideais próprios de A_m, ou seja, demonstrámos que o monóide $(\mathcal{J}(A_m)^*, \cdot)$ satisfaz as condições AF1 e AF2. Os ideais foram introduzidos por Kummer (1810-1893) e depois por Dedekind (1831-1916) com o objetivo principal de obter, novamente, a unicidade da decomposição em elementos-ideais irredutíveis.

TEOREMA 61 - O anel quadrático A_m é fatorial se, e sòmente se, A_m é principal.

DEMONSTRAÇÃO - Já sabemos que todo anel principal é fatorial (teorema 41). Suponhamos, então, que A_m seja fatorial e demonstremos, inicialmente, que todo ideal maximal P, de A_m, é principal. Com efeito, se α é um elemento não nulo de P, então existem elementos irredutíveis $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r$ tais que $\alpha = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_r$ e como P é primo resulta que pelo menos um dos fatôres π_i pertence a P, de onde vem $(\pi_i) \subset P$; ora, o ideal principal (π_i) é primo (lema 16), logo, êste ideal também é maximal (corolário do lema 30) e então $P = (\pi_i)$. Finalmente, se M é um ideal próprio de A_m, então existem ideais maximais $P_1, P_2, \cdots, P_s$ tais que $M = P_1 P_2 \cdots P_s$ (teorema 60) e como cada P_i é principal concluímos, imediatamente, que M também é um ideal principal. ∎

EXERCÍCIOS

157. Consideremos os seguintes ideais M do anel quadrático $A_m = \mathbf{Z}[\omega_0]$:

a) $M = A_{-1}(3-i, 3+4i, 5+10i)$;

b) $M = A_{-5}(5+2\omega_0, 9+3\omega_0)$;

c) $M = A_{-7}(6-5\omega_0, 3+\omega_0, 5-7\omega_0)$;

d) $M = A_2(3+6\sqrt{2}, 6-3\sqrt{2}, 11-5\sqrt{2})$;

e) $M = A_5(3-\sqrt{5}, \frac{1}{2}(3+7\sqrt{5}), 5-3\sqrt{5})$.

Determinar, em cada caso, os elementos a e $\theta = b + c\omega_0$ tais que $M = \mathbf{Z}a + \mathbf{Z}\theta$ (teorema 50).

158. Com as notações do teorema 50, determinar a e θ de modo que $A_m \alpha = \mathbf{Z}a + \mathbf{Z}\theta$, onde α é um elemento não nulo do anel quadrático A_m.

159. Demonstrar que o conjugado de um ideal é um ideal.

160. Demonstrar o lema 26.

161. Demonstrar o lema 28. Mostrar que êste lema é verdadeiro em todo anel de integridade A.

162. Demonstrar que o lema 29 é verdadeiro em todo anel de integridade A.

163. Demonstrar que o lema 20 é verdadeiro em todo anel comutativo com elemento unidade.

164. Demonstrar que o anel quadrático A_{-14} não é principal. Sugestão: Neste anel tem-se $\omega\omega = -(2.7)$; mostrar que 2 é irredutível e utilizar o teorema 61.

165. Consideremos os ideais M e N, de $A_{-5} = \mathbf{Z}[\omega]$, gerados, respectivamente, por $\{3+2\omega, 2+3\omega, 5+7\omega\}$ e $\{8+9\omega, -11+12\omega, -41\}$; mostrar que $N \subset M$ e determinar um ideal R tal que $N = MR$.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §5

166. Demonstrar, diretamente, que todo ideal primo próprio P de um anel quadrático A_m é maximal. Sugestão: Notar que $P \cap \mathbf{Z} = \mathbf{Z}p$ é um ideal maximal de $\mathbf{Z}$; considerar o homomorfismo canônico φ de A_m em A_m/P e mostrar que $\varphi(\mathbf{Z})$ é um subcorpo dêste anel quociente; finalmente, notando-se que todo elemento z de A_m é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, concluir que se $\varphi(z) \neq 0$, então $\varphi(z)$ é inversível em A_m/P.

167. Usando o teorema 56, mostrar que o conjunto $\mathcal{J}(A_m)$, ordenado por inclusão, dos ideais de um anel quadrático A_m satisfaz a condição maximal. (Ver o exercício 135). Concluir daí que para todo ideal não unitário M, de A_m, existe um ideal maximal P tal que $M \subset P$.

168. Demonstrar que se π é um elemento irredutível do anel quadrático A_m, então, o ideal principal $A_m \pi$ é maximal. Sugestão: Lema 16 e exercício 167.

169. Utilizando o exercício anterior, demonstrar que todo ideal primo próprio do anel quadrático A_m é principal. Sugestão: Notar que a condição AF1 é verdadeira em A_m (teorema 52).

170. Demonstrar que se o anel quadrático A_m é fatorial, então êste anel é principal. Sugestão: O exercício anterior nos mostra que todo ideal primo próprio é principal; dado um ideal próprio M, de A_m, considerar o conjunto $\mathcal{A}$ de todos os ideais principais e não unitários que contêm M; mostrar que $\mathcal{A}$ é não vazio (exercícios 167 e 168) e que $\mathcal{A}$, ordenado por inclusão, satisfaz a condição minimal e deduzir daí que se

$A_m b$ é um elemento minimal de $\mathcal{A}$, então $A_m b = M$ (utilizar aqui o lema 29). Observação: Obtém-se assim uma nova demonstração do teorema 61, demonstração esta que não se baseia no teorema 60.

171. Seja $M = \mathbf{Z}a + \mathbf{Z}\theta$, com $\theta = b + c\omega_0$, um ideal próprio do anel quadrático $A_m = \mathbf{Z}[\omega_0]$ (ver o teorema 56); demonstrar que $c|b$. Sugestão: distinguir dois casos: $m \not\equiv 1 \pmod 4$ e $m \equiv 1 \pmod 4$.

172. De acôrdo com o teorema 56 e o exercício anterior, temos $a = cr$ e $b = ct$, onde r e t são números naturais, $r \neq 0$ e $0 \leqslant t < r$; demonstrar que se $m \not\equiv 1 \pmod 4$, então $t^2 \equiv m \pmod r$ e se $m \equiv 1 \pmod 4$, então $t^2 + t \equiv \frac{1}{4}(m-1) \pmod r$.

173. Utilizando o exercício anterior, determinar todos os ideais de A_{-5} que contêm o ideal principal $(3) = A_{-5} \cdot 3$. Sugestão: Se $M = \mathbf{Z}a + \mathbf{Z}\theta$, com $a = cr$, $b = ct$ e $\theta = c(t+\omega)$ é um ideal que contém (3), então $(cr)|3$; distinguir os diversos casos possíveis de acôrdo com os valores que c e r podem assumir.

174. Mostrar que se um número inteiro primo p é redutível em A_m, então $p = \pm\pi\overline{\pi}$ onde π é irredutível em A_m.

175. Demonstrar que em todo anel quadrático existem infinitos elementos irredutíveis. Sugestão: exercício anterior e condição AF6 em $\mathbf{Z}$.

176. Demonstrar que se o anel quadrático A_m é fatorial e se π é um elemento irredutível de A_m, então π é divisor de um único número natural primo. Sugestão: Mostrar que $\pi | N(\pi)$, logo, existe um menor número natural não nulo p tal que $\pi | p$; utilizando o fato que A_m é fatorial concluir que p é primo em $\mathbf{Z}$; para a unicidade utilizar a condiçãoAF6 em $\mathbf{Z}$.

177. Verificar as seguintes propriedades de um anel quadrático fatorial A_m:

a) todo número natural primo p é irredutível em A_m ou é o produto de dois elementos irredutíveis (não necessàriamente distintos) de A_m. Sugestão: exercício 174.

b) se π é irredutível em A_m, então π é associado a um número natural primo ou π é associado a um fator irredutível de um número natural primo. Sugestão: exercício 176.

Observação: os resultados acima nos mostram como obter todos os elementos irredutíveis (a menos de associados) de um anel quadrático fatorial A_m; pode-se completar estas propriedades caracterizando os números naturais primos que permanecem irredutíveis em A_m ou que são redutíveis em A_m (ver [24], pp.215-218).

178. Demonstrar que se P é um ideal primo próprio do anel quadrático A_m, então $P\overline{P} = (p)$ ou $P\overline{P} = (p^2)$, onde p é um número natural primo e $\overline{P}$ é o conjugado de P. Sugestão: conforme o teorema 57 tem-se $P\overline{P} = (g)$, onde $g > 1$; concluir que $g | p^2$ considerando-se a decomposição de g, em $\mathbf{Z}$, num produto de fatôres primos positivos.

179. Demonstrar que se p é um número natural primo, então o ideal principal $(p) = A_m p$ é primo se, e sòmente se, a congruência

$$t^2 \equiv m \pmod p \quad \text{se} \quad m \not\equiv 1 \pmod 4$$

ou

$$t^2 + t \equiv \frac{1}{4}(m-1) \pmod p \quad \text{se} \quad m \equiv 1 \pmod 4$$

não tem solução. Supondo-se que a primeira ou a segunda congruência acima tenha uma solução t_1, logó, existe uma outra solução t_2, com $t_1 \not\equiv t_2 \pmod p$, demonstrar que $(p) = P_1 P_2$, onde $P_i = \mathbf{Z}p + \mathbf{Z}(t_i + \omega_0)$. Sugestão: exercício 171.

180. Demonstrar que para todo ideal primo próprio M, do anel quadrático A_m, existem ideais maximais $P_1, P_2, \cdots, P_r$ distintos dois a dois e existem números naturais não nulos $e_1, e_2, \cdots, e_r$ tais que $M = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \cdots P_r^{e_r}$. Além disso, se $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ são ideais maximais distintos dois a dois e se $M = Q_1^{f_1} Q_2^{f_2} \cdots Q_t^{f_t}$, onde cada f_j é um número natural não nulo, então $r = t$, $e_i = f_i$ e $P_i = Q_i$ para $i = 1, 2, \cdots, r$ (usando-se uma notação conveniente). Sugestão: teorema 60.

181. Sejam $M = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \cdots P_r^{e_r}$ e $N = P_1^{f_1} P_2^{f_2} \cdots P_r^{f_r}$ dois ideais próprios do anel quadrático A_m, onde cada P_i é um ideal maximal, $P_i \neq P_j$ se $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant r)$, $e_i \geqslant 0$ e $f_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$.

a) Mostrar que $M \subset N$ se, e somente se, $f_i \leqslant e_i$ para $i = 1, 2, \cdots, r$.

b) Verificar as seguintes fórmulas

$$MN = P_1^{e_1+f_1} P_2^{e_2+f_2} \cdots P_r^{e_r+f_r},$$

$$M + N = P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \cdots P_r^{\delta_r},$$

$$M \cap N = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \cdots P_r^{\mu_r}$$

e

$$(M+N)(M \cap N) = MN,$$

onde $\delta_i = min\{e_i, f_i\}$ e $\mu_i = max\{e_i, f_i\}$ para $i = 1, 2, \cdots, r$.

182. Seja α um elemento não nulo de um anel quadrático A_m e suponhamos que exista um número natural primo p tal que $p | N(\alpha)$ e $p^2 \nmid N(\alpha)$; demonstrar que se A_m é fatorial, então existe um elemento irredutível π, de A_m, tal que $N(\pi) = \pm p$. Sugestão: Se $\alpha = \pi_1 \cdots \pi_s$ é uma decomposição de α em fatôres irredutíveis, mostrar que $p | N(\pi_i)$ (i fixo) e concluir que $N(\pi_i) = \pm p$.

183. Utilizando o exercício anterior, mostrar que se o anel quadrático A_m é fatorial e se $m < -3$, então $m \equiv 1 \pmod 4$. Sugestão: supor que $m \not\equiv 1 \pmod 4$ e notar que $|m|$ ou $1 + |m|$ é exatamente divisível por 2.

184. Seja $A_m = \mathbf{Z}[\omega_0]$, com $m < -3$, um anel quadrático fatorial, logo, em virtude do exercício anterior, $m \equiv 1 \pmod 4$. Demonstrar que se a e b são dois números inteiros tais que $1 < a^2 - ab - qb^2 < q^2$, onde $q = \frac{1}{4}(m-1)$ e $mdc(a,b) = 1$, então $S = a^2 - ab - qb^2$ é primo. Sugestão: Pondo-se $\alpha = a - b\omega_0$, notar que se $b \neq 0$, então $N(\alpha) \geqslant |q|$; demonstrar que α é irredutível e concluir daí que $S = N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ é primo.

185. Demonstrar que se o anel quadrático A_m $(m < -3)$ é fatorial, então o número $S = a^2 - a + |q|$ é primo para $a = 1, 2, \cdots, |q| - 1$ e, em particular, q é primo. Sugestão: escolher $b = 1$ no exercício anterior.

186. Demonstrar que se o anel quadrático A_m $(m < -7)$ é fatorial, então o número $S = a^2 - 2a + 4|q|$ é primo para $a = 1, 3, \cdots, |q| - 2$ e, em particular, m é primo. Sugestão: notar que $|m| \equiv 3$ ou $7 \pmod 8$ e excluir êste último caso observando que o número q é primo (exercício anterior); aplicar o exercício 184 com $b = 2$.

Observação - O exercício anterior nos mostra que se A_m $(m < -7)$ é fatorial, então m é um número primo e já sabemos que $m \equiv 1 \pmod 4$

(exercício 183). Demonstra-se que para $m = -19, -43, -67$ e -163 o anel quadrático A_m é fatorial; portanto, para $m = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67$ e -163, o anel quadrático A_m é fatorial. Gauss fêz a conjetura de que êstes são os únicos anéis quadráticos imaginários e fatoriais, D. H. Lehmer demonstrou, em 1933, que se o anel A_m $(m<-163)$ é fatorial, então $m<-5\cdot 10^8$ e H. Heilbron e E. H. Linfoot demonstraram, em 1934, que existe, no máximo mais um valor de $m<-163$ tal que A_m seja fatorial. A existência dêste último anel quadrático imaginário fatorial parece ser bastante improvável mas a questão é ainda aberta em Matemática. Ao mesmo tempo Gauss fêz a conjetura: existem infinitos anéis quadráticos reais que são fatoriais. Esta conjetura ainda não foi negada ou confirmada.

Nos exercícios abaixo, sôbre anéis quadráticos reais, utilizaremos o seguinte resultado que foi mencionado, mas não demonstrado, no §5.2: se A_m é um anel quadrático real, então existe um elemento inversível $\eta>1$ tal que $U(A_m) = \{\pm\eta^s \in A_m \mid s\in \mathbf{Z}\}$.

187. Demonstrar que se o anel quadrático $A_m = \mathbf{Z}[\omega_0]$ é fatorial e se $m \equiv 3$ (mod. 4), então m é primo. Sugestão: supor que $m = p_1 m$, com p primo e $m_1>1$ (logo, $m_1>2$); como p divide exatamente $N(\omega)$, então existe $\alpha\in A_m$ tal que $N(\alpha) = \pm p$ (exercício 174). Mostrar que p é divisor de $T(\alpha)/2$ e concluir que $\gamma = \alpha/\alpha \in A_m$, logo, $\gamma = \pm\eta^h$; supondo-se que $h = 2k$ chegar a uma contradição por meio da igualdade $\gamma_0 = \alpha/\eta^k = \pm\gamma_0$. Como 2 divide exatamente $N(1+\omega)$ resulta que existe $\beta\in A_m$ tal que $N(\beta) = \pm 2$; concluir, novamente, que $\delta = \beta/\bar{\beta} = \pm\eta^l$ com l ímpar. Finalmente, de $N(\alpha\beta) = \pm 2p$, $\alpha\beta/\varepsilon\bar{\beta} = \pm\eta^{h+l}$, com $h+l$ para obter uma contradição, pois, $m_1>2$.

188. Demonstrar que se o anel quadrático real $A_m = \mathbf{Z}[\omega_0]$ é fatorial e se $m \equiv 2$ (mod. 4), então $m = 2p$, onde p é um número primo. Sugestão: Adaptar a demonstração do exercício anterior para êste caso. Observação: pode-se completar o resultado acima demonstrando-se que $p \equiv 3$ (mod. 4).

189. Demonstrar que se o anel quadrático real $A_m = \mathbf{Z}[\omega_0]$ é fatorail e se $m \equiv 1$ (mod. 4), então m é primo ou $m = p_1 p_2$, onde p_1 e p_2 são números primos (distintos). Sugestão: proceder como na demonstração do exercício 187, pondo-se $m = p_1 p_2 m_1$ (com $m_1>1$) e construindo um elemento α_i, de A_m, tal que $N(\alpha_i) = \pm p_i$ $(i = 1, 2)$. Observação: No segundo caso, $m = p_1 p_2$, pode-se demonstrar que $p_i \not\equiv 1$ (mod. 4) para $i = 1, 2$.

APÊNDICE – CAPÍTULO VII

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

A demonstração do teorema fundamental da Álgebra será feita em três etapas principais:

I. Mostraremos que todo polinômio real e de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real. Nesta primeira parte utilizaremos, essencialmente, o axioma de completividade, ou seja, a propriedade acima será uma conseqüência da continuidade das funções polinomiais reais. O teorema 1 e o lema 2 que serão demonstrados abaixo também têm importância no problema da localização das raízes reais de um polinômio real.

II. Dado um corpo K e um polinômio não constante $f\in K[X]$ pode acontecer que f não admita raízes em K. Surge, assim, o problema da construção de um outro corpo E que contenha K como subcorpo (diz-se, neste caso, que E é uma extensão do corpo K) onde f admita pelo menos uma raiz real. Realmente, construiremos uma extensão E do corpo K que satisfaz a propriedade: o polinômio f se decompõe num produto de fatôres lineares com coeficientes em E.

III. Mostraremos que basta demonstrar o teorema fundamental da Álgebra para todo polinômio não constante f com coeficientes reais e procederemos, então, por indução finita sôbre o número natural t tal que $2^t \mid \partial f$ e $2^{t+1} \nmid \partial f$. Utilizaremos aqui os resultados estabelecidos nas partes I e II e o teorema fundamental dos polinômios simétricos (teorema 29, Capítulo VI); esta é, de fato, a parte mais difícil da demonstração do teorema fundamental da Álgebra

I. Demonstraremos, inicialmente, o seguinte

LEMA 1 - Se g é um polinômio qualquer de $\mathbf{R}[X]$, então existe um número real estritamente positivo m tal que

$$|g(x)| \leq m,$$

para todo número real x que satisfaz a condição $|x|\leq 1$.

DEMONSTRAÇÃO - O lema é imediato no caso em que g é constante; suponhamos, então, que g não seja constante e ponhamos

$$g = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n$$

e

$$m = |b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|;$$

é imediato que $m > 0$ e, por outro lado, para todo $x \in \mathbf{R}$, se $|x| \leq 1$, teremos, em virtude das propriedades do valor absoluto

$$|g(x)| = |\sum_{i=0}^{n} b_i x^i| \leq \sum_{i=0}^{n} |b_i|\,|x|^i \leq \sum_{i=0}^{n} |b_i| = m,$$

o que termina a verificação do lema acima. ∎

TEOREMA 1 - Seja $f \in \mathbf{R}[X]$ um polinômio não constante e suponhamos que existam números reais a e b, com $a < b$, tais que $f(a)f(b) < 0$; nestas condições, o polinômio f admite pelo menos uma raiz real c compreendida entre a e b.

DEMONSTRAÇÃO - Faremos a demonstração no caso em que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, pois, o outro caso, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, se reduz ao anterior considerando-se o polinômio $-f$. Seja

$$S = \{x \in [a,b] \mid f(x) > 0\}$$

e notemos que S é não vazio, pois, $a \in S$ e, além disso, S é majorado pelo número real b; portanto, de acôrdo com o axioma de completividade, existe $c = sup\,S$ e temos, necessàriamente, $a \leq c \leq b$. Notemos, inicialmente, duas propriedades que derivam da definição de S e do fato que $c = sup\,S$:

(1) se x é um número real tal que $c < x \leq b$, então $f(x) > 0$;

(2) para todo número real estritamente positivo h, existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $c - h < x \leq c$ e $f(x) > 0$.

Observando-se que o número real zero é raiz do polinômio $f(X+c) - f(c)$ resulta que existe $g \in \mathbf{R}[X]$ tal que

$$f(X+c) = f(c) + Xg \tag{3}$$

e, em virtude do lema 1 existe um número real estritamente positivo m tal que

(4) $|g(x)| \leq m$ para todo número real x que satisfaz a condição $|x| \leq 1$.

Mostraremos, a seguir, que $f(c) = 0$ e para isso suporemos, por absurdo, que $f(c) \neq 0$ e distinguiremos, então, dois casos, conforme tivermos $f(c) > 0$ ou $f(c) < 0$.

1.º) $f(c) > 0$. Consideremos o número real

$$x = \frac{1}{2} min\{2, b-c, \frac{1}{m} f(c)\}$$

e notemos que $x > 0$, pois, $c < b$, $m > 0$ e $f(c) > 0$. De

$$0 < x \leq \frac{1}{2}(b-c) < b-c$$

resulta $c < x+c < b$, logo, de acôrdo com (1), temos

$$f(x+c) > 0 \tag{5},$$

Por outro lado, também temos $mx \leq \frac{1}{2} f(c) < f(c)$, logo,

$$f(x+c) = f(c) + xg(x) \geq f(c) - mx > f(c) - f(c) = 0,$$

isto é,

$$f(x+c) > 0,$$

o que está em contradição com (5).

2.º) $f(c) < 0$. Consideremos o número real

$$h = min\{1, -\frac{1}{m} f(c)\}$$

e notemos que $0 < h \leq 1$ (pois, $m > 0$ e $f(c) < 0$) e $hm \leq -f(c)$; de acôrdo com (2) existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $c - h < x \leq c$ e

$$f(x) > 0 \tag{6}.$$

Observando-se agora que

$$-h < x - c \leq 0 < h$$

resulta

$$|x - c| < h \leq 1,$$

logo, em virtude de (4), temos

$$|g(x-c)| \leq m.$$

Por outro lado, utilizando (3) e as desigualdades acima, temos

$$f(x) = f((x-c)) + c = f(c) + (x-c)g(x-c) \leq f(c) + |x-c|\,g(x-c) \leq$$
$$\leq f(c) + hm \leq f(c) - f(c) = 0,$$

isto é,

$$f(x) \leq 0,$$

o que está em contradição com (6).

Portanto, $f(c) = 0$ e como $a \leq c \leq b$, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, concluímos que $a < c < b$. ∎

LEMA 2 - Seja

$$f = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

um polinômio real de grau $n > 0$ e ponhamos

$$M = max\{-a_0, -a_1, \cdots, -a_{n-1}, 0\}$$

e

$$m = max\{(-1)^{n-1}a_0, (-1)^{n-2}a_2, \cdots, -a_{n-2}, a_{n-1}, 0\};$$

nestas condições, para todo número real x, temos:

se $x > M+1$, então $f(x) > 0$ (7)

e

se $x < -(m+1)$, então $(-1)^n f(x) > 0$ (8),

DEMONSTRAÇÃO - A definição de M implica que

$$-M \leq a_j \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \cdots, n-1,$$

ogo, para $x > 1$, temos

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \geq -M(1 + x + \cdots + x^{n-1}) + x^n x =$$
$$= \frac{[x-(M+1)]x^n + M}{x-1},$$

de onde vem, $f(x)>0$ para todo $x>M+1\geq 1$, o que termina a verificação de (7).

Consideremos o polinômio $g=(-1)^n f(-X)$ e notemos que

$$g=(-1)^n a_0+(-1)^{n+1}a_1X+\cdots+(-1)^{2n-1}a_{n-1}X^{n-1}+X^n,$$

logo,

$$max\{-(-1)^n a_0,-(-1)^{n+1}a_1,\cdots,-(-1)^{2n-1}a_{n-1},0\}=$$
$$=max\{(-1)^{n-1}a_0,(-1)^{n-2}a_1,\cdots,-a_{n-2},a_{n-1},0\}=m;$$

portanto, de acôrdo com o caso anterior, temos

$$\text{se } x>m+1, \text{ então } g(x)>0,$$

ou seja,

$$\text{se } x>m+1, \text{ então } (-1)^n f(-x)>0,$$

de onde vem,

$$\text{se } x<-(m+1), \text{ então } (-1)^n f(x)>0,$$

o que termina a verificação de (8). ∎

TEOREMA 2 - Se $f\in\boldsymbol{R}[X]$ é um polinômio não nulo e de grau ímpar, então f admite pelo menos uma raiz real.

DEMONSTRAÇÃO - Seja d o coeficiente dominante de f, $n=\partial f$ e ponhamos $g=d^{-1}f$; de acôrdo com o lema 2 existem números reais positivos M e m tais que

$$g(x)>0 \quad \text{para todo} \quad x>M+1$$

e

$$(-1)^n g(x)=-g(x)>0 \quad \text{para todo} \quad x<-(m+1).$$

Considerando-se, então, números reais a e b tais que $a<-(m+1)$ e $b>M+1$, temos

$$g(a)<0 \quad \text{e} \quad g(b)>0;$$

portanto, em virtude do teorema 1, existe um número real c, com $a<c<b$, tal que $g(c)=0$ e é imediato que c é raiz de f. ∎

II. Consideremos um corpo K e seja $f\in K[X]$ um polinômio não constante. Se f é irredutível em $K[X]$ e se $\partial f>1$, então f não admite raízes em K; procuraremos, então construir um corpo E, que contenha K como subcorpo, tal que f admita pelo menos uma raiz em E.

LEMA 3 - Se $f\in K[X]$ é irredutível em $K[X]$, então existe uma extensão E do corpo K e existe x em K tais que $E=K(x)=K[x]$ e $f(x)=0$.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o ideal principal $M=K[x]\cdot f$ e seja $E=K[x]/M$ o anel quociente de $K[X]$ pelo ideal M; como f é irredutível resulta que M é um ideal maximal (teorema 42), logo, E é um corpo (teorema 36). Seja q o homomorfismo canônico de $K[X]$ em E e indiquemos por q_0 a restrição de q ao subconjunto K de $K[X]$; é imediato que q_0 é um homomorfismo do corpo K em E e que

$$Ker(q_0)=K\cap M=\{0\},$$

logo, q_0 é um monomorfismo e então $K'=Im(q_0)$ é um subcorpo de E e, além disso, q_0 é um isomorfismo de K em K'. No que se segue identificaremos o corpo K com o corpo K' por meio do isomorfismo q_0, isto é, poremos $a=q_0(a)=a+M$ para todo a em K; dêste modo, K passa a ser considerado como um subcorpo de E, ou seja, E é uma extensão do corpo K. Se y é um elemento qualquer de E, então existe $g=\sum_{i=0}^{m}b_iX^i\in K[X]$ tal que $y=q(g)$ e pondo-se $q(X)=x$, teremos

$$q(g)=q(\sum_{i=0}^{m}b_iX^i)=\sum_{i=0}^{m}q_0(b_i)(q(X))^i=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i=g(x),$$

logo, $E\subset K[x]$, de onde vem, $E=K[x]=K(x)$. Finalmente, notando-se que $q(f)=0$, pois, $f\in M$, teremos, conforme os cálculos acima, $f(x)=0$. ∎

COROLÁRIO - Se $f\in K[X]$ é um polinômio não constante então existe uma extensão E do corpo K e existe x em E tais que $E=K(x)=K[x]$ e $f(x)=0$.

Basta aplicar o teorema acima para um fator irredutível $p\in K[X]$ do polinômio f.

TEOREMA 3 - Se $f\in K[X]$ é um polinômio não constante de grau n e de coeficiente dominante a, então existe uma extensão E do corpo K e existem elementos $x_1,x_2,\cdots,x_n$ em E tais que

$$E=K(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

e

$$f=a(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n),$$

igualdade esta válida no anel de polinômios $E[X]$.

DEMONSTRAÇÃO - Procederemos por indução finita sôbre o grau de f, observando que para $n=1$, temos $f=b+aX=a(X+a^{-1}b)$ e basta, então escolher $E=K$ e $x_1=-a^{-1}b$. Suponhamos, então, que $n>1$ e que o teorema acima seja verdadeiro para $n-1$ e seja $f\in K[X]$ um polinômio não constante de grau n e de coeficiente dominante a. De acôrdo com o corolário do lema 3 existe uma extensão $E_1=K(x_1)$, do corpo K, onde $f(x_1)=0$; neste caso, o polinômio $f\in E_1[X]$ é divisível em $E_1[X]$ por $X-x_1$, isto é, existe $g\in E_1[X]$ tal que $f=(X-x_1)g$ e é imediato que $\partial g=n-1$ e que a é o coeficiente dominante de g. Aplicando-se a hipótese de indução ao polinômio $g\in E_1[X]$ concluímos que existe uma extensão E do corpo E_1 e existem elementos $x_2,\cdots,x_n$ em E tais que $E=E_1(x_2,\cdots,x_n)$ e $g=a(X-x_2)\cdots(X-x_n)$; notando-se que

$$E=E_1(x_2,\cdots,x_n)=(K(x_1))(x_2,\cdots,x_n)=K(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

e

$$f=(X-x_1)g=a(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n),$$

resulta que a extensão $E=K(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ satisfaz as condições exigidas na tese do teorema acima. ∎

III. Em primeiro lugar estabeleceremos algumas propriedades de polinômio com diversas indeterminadas, propriedades estas que serão essenciais para a demonstração do principal teorema desta secção.

Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e consideremos o anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$. Lembremos, inicialmente, que para tôda n-upla $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B^n$, existe um único A-homomorfismo

$$\sigma_x: A[X_1,X_2,\cdots,X_n]\longrightarrow B$$

tal que $\sigma_x(X_i)=x_i$ para $i=1,2,\cdots,n$ (teorema 25, Capítulo VI).

LEMA 4 - Se $g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ é uma n-upla de elementos de $A[X_1,X_2,\cdots,X_p]$ $(1\leqslant p\leqslant n)$ e se f é um polinômio qualquer de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, então para tôda n-upla $x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)\in B^p$, temos

$$(f(g_1,g_2,\cdots,g_n))(x)=f(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)) \tag{9}.$$

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o teorema 25 do Capítulo VI, enunciado acima, existem A-homomorfismos

$$\sigma_x: A[X_1,X_2,\cdots,X_p]\longrightarrow B,$$

$$\sigma_g: A[X_1,X_2,\cdots,X_n]\longrightarrow A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$$

e

$$\sigma_{g(x)}: A[X_1,X_2,\cdots,X_n]\longrightarrow B,$$

tais que $\sigma_x(X_i)=x_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$, $\sigma_g(X_i)=g_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ e $\sigma_{g(x)}(X_i)=g_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, onde $g(x)=(g_1(x),\cdots,g_n(x))$. Notando-se que

$$(\sigma_x\circ\sigma_g)(X_i)=\sigma_x(\sigma_g(X_i))=\sigma_x(g_i)=g_i(x)=\sigma_{g(x)}(X_i),$$

para $i=1,2,\cdots,n$, temos $\sigma_x\circ\sigma_g=\sigma_{g(x)}$; portanto, para todo polinômio f de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$, teremos

$$(f(g_1,g_2,\cdots,g_n))(x)=\sigma_x(f(g_1,g_2,\cdots,g_n))=\sigma_x(\sigma_g(f))=$$
$$=(\sigma_x\circ\sigma_g)(f)=\sigma_{g(x)}(f)=f(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)),$$

o que termina a verificação de (9). ∎

Como caso particular da fórmula (9) temos

$$\sigma\cdot f(g_1,g_2,\cdots,g_n)=f(\sigma\cdot g_1,\sigma\cdot g_2,\cdots,\sigma\cdot g_n) \tag{10},$$

onde σ é uma permutação qualquer do intervalo inteiro $[1,p]$. Basta lembrar que $\sigma\cdot h=h(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(p)})$ para todo h em $A[X_1,X_2,\cdots,X_p]$, onde σ também indica o A-automorfismo de $A[X_1,X_2,\cdots,X_p]$ determinado pela p-upla $(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(p)})$ (ver o §3.2, Capítulo VI).

LEMA 5 - Seja B um anel comutativo com elemento unidade, seja A um sub-anel unitário de B e consideremos o anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$; nestas condições, para tôda n-upla $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B^n$, temos

$$\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)=X^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i(x)X^{n-i} \tag{11},$$

onde $s_1,s_2,\cdots,s_n$ são os polinômios simétricos elementares em $X_1,X_2,\cdots,X_n$ (ver o §3.4, Capítulo VI).

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com a fórmula (37) do Capítulo VI, temos

$$\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)=X^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i X^{n-1};$$

basta, então, aplicar a fórmula (9) para a $(n+1)$-upla $(X,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ de elementos de $B[X,X_1,X_2,\cdots,X_p]$ para obter a fórmula (11). ∎

Seja $g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ uma n-upla de elementos distintos dois a dois do anel de polinômios $A[X_1,X_2,\cdots,X_p]$ $(1\leqslant p\leqslant n)$ e suponhamos que para tôda permutacão σ do intervalo inteiro $[1,p]$ tenha-se $\sigma\cdot g_i=g_{\pi(i)}$, onde $1\leqslant\pi(i)\leqslant n$ para $i=1,2,\cdots,n$, neste caso, é imediato que π é uma permutação do intervalo inteiro $[1,n]$, logo, π determina um A-automorfismo π de $A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ tal que

$$\pi\cdot h=h(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots,X_{\pi(n)})$$

Nestas condições, demonstraremos o seguinte

LEMA 6 - Se $f\in A[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ é um polinômio simétrico, então $f(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ é um polinômio simétrico em $X_1,X_2,\cdots,X_p$.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com as fórmulas (10) e (9), temos

$$\sigma\cdot f(g_1,g_2,\cdots,g_n)=f(\sigma\cdot g_1,\sigma\cdot g_2,\cdots,\sigma\cdot g_n)=$$
$$=f(g_{\pi(1)},g_{\pi(2)},\cdots,g_{\pi(n)})=f(X_{\pi(1)}(g),X_{\pi(2)}(g),\cdots,X_{\pi(n)}(g))=$$
$$=(f(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots,X_{\pi(n)})(g)=(\pi\cdot f)(g_1,g_2,\cdots,g_n)=f(g_1,g_2,\cdots,g_n),$$

o que termina a verificação do lema acima. ∎

LEMA 7 - Para todo polinômio quadrático $X^2+pX+q\in\mathbf{C}[X]$ existem números complexos z_1 e z_2 tais que

$$X^2+pX+q=(X-z_1)(X-z_2).$$

DEMONSTRAÇÃO - Em virtude do teorema 27 do Capítulo V, existe um número complexo d tal que $d^2=p^2-4q$ e notando-se que

$$X^2+pX+q=(X+\frac{p}{2})^2-(\frac{d}{2})^2=(X+\frac{p-d}{2})(X+\frac{p+d}{2}),$$

basta escolher

$$z_1=-\frac{p-d}{2}\quad\text{e}\quad z_2=-\frac{p+d}{2}.$$

∎

LEMA 8 - Se todo polinômio não constante do anel $\boldsymbol{R}[X]$ admite pelo menos uma raiz complexa, então o mesmo vale para todo polinômio não constante $f \in \boldsymbol{C}[X]$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja σ o $\boldsymbol{R}$-automorfismo de $\boldsymbol{C}$ definido por $\sigma(z) = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ indica o complexo conjugado de z; de acôrdo com o teorema 9, Capítulo VI, σ pode ser prolongado de um único modo a um $\boldsymbol{R}$-automorfismo (que será indicado por σ) do anel $\boldsymbol{C}[X]$ tal que $\sigma(X) = X$. Ponhamos

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \text{e} \quad \bar{f} = \sigma(f) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i X^i$$

e consideremos o polinômio $g = f\bar{f} \in \boldsymbol{C}[X]$. Temos

$$\sigma(g) = \sigma(f\bar{f}) = \sigma(f)\sigma(\bar{f}) = \bar{f}f = g,$$

logo, $g \in \boldsymbol{R}[X]$; portanto, por hipótese, existe z em $\boldsymbol{C}$ tal que $g(z) = 0$, logo, $f(z)\bar{f}(z) = 0$, de onde vem, $f(z) = 0$ ou $\bar{f}(z) = 0$. No primeiro caso já obtemos a tese do lema acima e no segundo caso teremos

$$f(\bar{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{z}^i = \sum_{i=0}^{n} \sigma(\bar{a}_i)(\sigma(z))^i = \sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i z^i\right) = \sigma(f(z)) = \sigma(0) = 0,$$

logo, $\bar{z}$ é raiz de f. ∎

TEOREMA 4 - Todo polinômio não constante do anel $\boldsymbol{R}[X]$ admite pelo menos uma raiz complexa.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que podemos nos limitar ao caso em que f seja unitário. O teorema 2 nos mostra que se f tem grau ímpar, então f admite pelo menos uma raiz real; suponhamos, por indução finita, que o teorema acima seja verdadeiro para todo polinômio real não constante e de grau $2^t r_1$, onde t e r_1 são números naturais e r_1 é ímpar e seja f um polinômio real, não constante e unitário, de grau $p = 2^{t+1} r$, onde r é ímpar. De acôrdo com o teorema 3, existe uma extensão E do corpo K e existem elementos $x_1, x_2, \cdots, x_p$ em E tais que

$$f = (X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_p).$$

Consideremos no anel de polinômios $\boldsymbol{R}[X_1, X_2, \cdots, X_n]$, onde $n = \binom{p}{2}$, os polinômios

$$g_{ij} = X_i + X_j + aX_iX_j,$$

onde $a \in \boldsymbol{R}$ e $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. É fácil verificar que êstes polinômios g_{ij} são distintos dois a dois; além disso, se σ é uma permutação qualquer do intervalo inteiro $[1, p]$, então

$$\sigma \cdot g_{ij} = g_{\sigma(i),\sigma(j)} \quad \text{se} \quad \sigma(i) < \sigma(j)$$

e

$$\sigma \cdot g_{ij} = g_{\sigma(j),\sigma(i)} \quad \text{e} \quad \sigma(j) < \sigma(i).$$

Portanto, a n-upla

$$(g_{12}, g_{13}, \cdots, g_{1p}, g_{23}, \cdots, g_{2p}, \cdots, g_{p-1,p}) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$$

satisfaz as condições do lema 6. Consideremos agora o polinômio

$$h_a = \prod_{i=1}^{n} (X - g_i(x)) \in E[X],$$

onde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$; de acôrdo com a fórmula (11) temos

$$h_a = X^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i s_i(g_1(x), \cdots, g_n(x)) X^{n-1},$$

onde s_i é o polinômio simétrico elementar de grau i em $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Ora, em virtude do lema 6, o polinômio $s_i(g_1, g_2, \cdots, g_n)$, do anel $\boldsymbol{R}[X_1, X_2, \cdots, X_p]$, é simétrico e, neste caso, o teorema fundamental dos polinômios simétricos (corolário de teorema 29, Capítulo VI) nos mostra que existe $f_i \in \boldsymbol{R}[X_1, X_2, \cdots, X_p]$ tal que

$$s_i(g_1, g_2, \cdots, g_n) = f_i(s_{p,1}, s_{p,2}, \cdots, s_{p,p}),$$

onde $s_{p,1}, s_{p,2}, \cdots, s_{p,p}$ são os polinômios simétricos elementrres em $X_1, X_2, \cdots, X_p$; daqui resulta, em virtude de (3), que

$$s_i(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)) = f_i(s_{p,1}(x), s_{p,2}(x), \cdots, s_{p,p}(x))$$

e como $s_{p,i}(x) \in \boldsymbol{R}$ (pois, $f \in \boldsymbol{R}[X]$) concluímos que $h_a \in \boldsymbol{R}[X]$. Notando-se que

$$\partial h_a = n = \tfrac{1}{2} p(p-1) = 2^t r(2^{t+1} r - 1),$$

onde $r(2^{t+1} r - 1)$ é ímpar, concluímos, de acôrdo com a hipótese de indução, que existe um número complexo z tal que $h_a(z) = 0$, logo, existe um par (i, j), com $1 \leqslant i < j \leqslant p$, tal que

$$z = g_{ij}(x) = x_i + x_j + a x_i x_j \in \boldsymbol{C}.$$

Como o corpo $\boldsymbol{R}$ é infinito resulta que existem números reais distintos a e b tais que

$$z_1 = x_i + x_j + a x_i x_j \in \boldsymbol{C} \quad \text{e} \quad z_2 = x_i + x_j + b x_i x_j \in \boldsymbol{C}$$

para o mesmo par (i, j), com $1 \leqslant i < j \leqslant p$; de onde vem

$$x_i + x_j = \frac{a z_2 - b z_1}{a - b} \quad \text{e} \quad x_i x_j = \frac{z_1 - z_2}{a - b},$$

logo,

$$x_i + x_j \in \boldsymbol{C} \quad \text{e} \quad x_i x_j \in \boldsymbol{C}.$$

Portanto, x_i e x_j são raízes do polinômio quadrático

$$(X - x_i)(X - x_j) = X^2 - (x_i + x_j)X + x_i x_j$$

com coeficientes complexos, logo, em virtude do lema 7, os elementos x_i e x_j pertencem a $\boldsymbol{C}$, ou seja, o polinômio f admite pelo menos uma raiz complexa. ∎

Finalmente, como conseqüência imediata do lema 8 e do teorema acima, temos o

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA - O corpo $\boldsymbol{C}$ dos números complexos é algèbricamente fechado.

CAPÍTULO VIII

GRUPOS

INTRODUÇÃO

Apresentaremos, neste Capítulo, algumas partes elementares da teoria dos grupos. No §1 daremos as propriedades gerais dos grupos; entre os resultados mais importantes dêste parágrafo mencionaremos os seguintes: a noção de relação de equivalência compatível com a operação de um grupo (definição 3), o teorema de Lagrange, os conceitos de subgrupo normal (definição 4) e de homomorfismo (definição 5), a construção do grupo quociente e o teorema do homomorfismo (teorema 16). Terminaremos êste parágrafo com os importantes teoremas do isomorfismo (§1.5), onde veremos também o lema de Zassenhaus que será aplicado no estudo das seqüências de composição de um grupo (§4.)

No §2 estudaremos duas classes especiais de grupos: os grupos cíclicos (§2.1) e os grupos de permutações (§2.2). A secção 2.2 tem importância pelas suas aplicações na teoria de Galois na parte referente à resolução de equações algébricas por radicais.

O §3 contém outros teoremas fundamentais sôbre grupos finitos que foram obtidos por Sylow nos fins do século passado; as demonstrações desenvolvidas no texto empregam a noção de grupo que opera sôbre um conjunto e são devidas a H. Wielandt.

No §4 estudaremos a estrutura de um grupo por intermédio das seqüências de composição; os principais resultados dêste parágrafo são o teorema de Schreier e o teorema de Jordan-Hölder. Finalmente, na secção 4.3 daremos algumas propriedades elementares dos grupos solúveis, propriedades estas que têm importância para o problema da resolução de uma equação algébrica por radicais.

Para estudar a decomposição de um grupo abeliano finito como soma direta de p-subgrupos cíclicos (§6) desenvolvemos no §5 a noção de produto direto de uma família de subgrupos (definição 18). Finalmente, o §6 é dedicado ao estudo dos grupos abelianos finitos, onde estabeleceremos um resultado fundamental sôbre a estrutura dêstes grupos (teorema 54).

O leitor encontrará nos exercícios dêste Capítulo diversos resultados suplementares da teoria dos grupos; destacamos, os exercícios 170-174 que determinam a estrutura do grupo dos elementos inversíveis do anel dos inteiros módulo n.

§1 - PROPRIEDADES GERAIS DOS GRUPOS

1.1 - AXIOMAS DA ESTRUTURA DE GRUPO

No §1.3 do Capítulo II introduzimos a noção de grupo e destacamos algumas de suas propriedades elementares; no entanto, não fizemos ainda um estudo detalhado desta estrutura que sempre foi considerada como parte de estruturas mais complexas como a de anel ou a de corpo. Repetiremos, nesta secção, os axiomas G1, G2 e G3 e apresentaremos outros sistemas de axiomas mais simples que também caracterizam a estrutura de grupo (teoremas 1 e 2; ver também os exercícios 7, 56, 57 e 62).

DEFINIÇÃO 1 - Seja G um conjunto e seja $*$ uma operação definida sôbre G; diz-se que esta operação define uma *estrutura de grupo sôbre o conjunto* G se, e sòmente se, os seguintes axiomas estiverem verificados

G1 (propriedade associativa): quaisquer que sejam x, y e z em G, tem-se

$$(x*y)*z = x*(y*z);$$

G2 (existência do elemento neutro): existe em G um elemento e tal que

$$x*e = x = e*x,$$

para todo x em G;

G3: para todo elemento x de G, existe um elemento x' em G tal que

$$x*x' = e = x'*x \qquad (1).$$

O axioma G3 nos mostra que se $(G,*)$ é um grupo, então todo elemento de G é simetrizável para a operação $*$; já

sabemos que x' é determinado de modo único pelas condições (1) e que

$$(x')' = x$$

e

$$(x*y)' = y'*x'.$$

Além disso, todo elemento de G é regular para a operação $*$ (teorema 6, Capítulo II); portanto, valem em G as leis do cancelamento à esquerda e à direita: quaisquer que sejam a, x e y em G, se $a*x = a*y$ ou $x*a = y*a$, então $x = y$.

Se a operação $*$ de um grupo G satisfaz o axioma

G4 (propriedade comutativa): quaisquer que sejam x e y em G, tem-se

$$x*y = y*x:$$

diremos que G é um *grupo comutativo* ou *abeliano*.

Só usaremos a notação aditiva para indicar a operação de um grupo quando esta operação fôr comutativa. No que se segue usaremos, em geral, a notação multiplicativa e a frase «seja $(G,\cdot)$ um grupo multiplicativo» será, freqüentemente, substituída por «seja G um grupo».

Exemplo 1 - O conjunto $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros é um grupo comutativo em relação a operação usual de adição, que é denominado *grupo aditivo dos números inteiros.*

Exemplo 2 - O conjunto $\boldsymbol{Q}$ dos números racionais é um grupo comutativo em relação à operação usual de adição, que é denominado *grupo aditivo dos números racionais.* Analogàmente, obtém-se o *grupo aditivo* $(\boldsymbol{R},+)$ *dos números reais* e o *grupo aditivo* $(\boldsymbol{C},+)$ *dos números complexos.* De um modo geral, se $(A,+,\cdot)$ é um anel, então $(A,+)$ é um grupo comutativo, que é denominado *grupo aditivo do anel A.*

Exemplo 3 - O conjunto $\boldsymbol{Q}^*$ dos números racionais não nulos é um grupo comutativo em relação à operação usual de multiplicação, que é denominado *grupo multiplicativo dos números racionais.* Anàlogamente, temos o *grupo multiplicativo* $(\boldsymbol{R}^*,\cdot)$ *dos números reais* e o *grupo multiplicativo* $(\boldsymbol{C}^*,\cdot)$ *dos números complexos.* De um modo geral, se $(K,+,\cdot)$ é um corpo, então $(K^*,\cdot)$ é um grupo comutativo, que é denominado *grupo multiplicativo do corpo K.* Assim obtemos, por exemplo, o *grupo multiplicativo* F_p^* *dos inteiros módulo p.*

Exemplo 4 - Se A é um anel comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$, então o conjunto $U(A)$ dos elementos inversíveis de A (ver o §1.2 do capítulo IV) é um grupo em relação à multiplicação, que é denominado grupo dos elementos inversíveis do anel A. Êste grupo desempenhou papel importante, no Capítulo VII, no estudo da divisibilidade sôbre um anel de integridade.

Exemplo 5 - O conjunto T de todos os números complexos de valor absoluto 1 é um grupo em relação à multiplicação.

Exemplo 6 - Para todo número natural $n \geq 1$, o conjunto U_n de tôdas as raízes complexas n-ésimas da unidade é um grupo comutativo em relação à multiplicação (ver o exercício 95 do Capítulo V).

Exemplo 7 - Conforme o corolário do teorema 3, Capítulo II, o conjunto $U(E)$ de todos os elementos simetrizáveis de um monóide $(E,*)$ é um grupo em relação à operação induzida sôbre $U(E)$ pela operação $*$; o grupo $(U(E),*)$ é denominado *grupo dos elementos simetrizáveis do monóide* $(E,*)$.

Exemplo 8 - Consideremos o monóide $(M,\circ)$ definido no exemplo 10 do Capítulo II, onde $M = E^E$ é o conjunto de tôdas as aplicações de E em E; o conjunto $U(M)$ dos elementos simetrizáveis de M coincide com o conjunto $S(E)$ das permutações de E (ver o exemplo 13, Capítulo II). O exemplo anterior nos mostra que $(S(E),\circ)$ é um grupo, que é denominado *grupo das permutações do conjunto E* ou *grupo simétrico do conjunto E.* Podemos ver, fàcilmente, que $S(E)$ não é comutativo caso E tenha mais de dois elementos. Com efeito, sejam a, b e c três elementos, distintos dois a dois, do conjunto E e consideremos as permutações σ e τ definidas por $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = c$, $\sigma(c) = a$, $\tau(a) = a$, $\tau(b) = c$, $\tau(c) = b$ e $\sigma(x) = \tau(x) = x$ para todo x em E, com $x \neq a$, $x \neq b$ e $x \neq c$; temos

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = b$$

e

$$(\tau \circ \sigma)(a) = \tau(\sigma(a)) = \tau(b) = c,$$

logo, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Pode-se demonstrar que se E é finito e tem n elementos, então $S(E)$ tem $n!$ elementos.

Exemplo 9 - Sejam $(A,\cdot)$ e $(B,\cdot)$ dois grupos e consideremos o produto cartesiano $A \times B$ dos conjuntos A e B; se (a,b) e (a',b') são dois elementos quaisquer de $A \times B$ colocaremos, por definição,

$$(a,b)\cdot(a',b') = (aa',bb');$$

obtém-se assim uma operação $\cdot$ sôbre $A \times B$ e é fácil verificar que $(A \times B,\cdot)$ é um grupo, que é denominado *grupo produto* dos grupos $(A,\cdot)$ e $(B,\cdot)$.

Diremos que um grupo G é *finito* se o conjunto G fôr finito e, neste caso, o número de elementos de G, que será indicado por $o(G)$, será denominado *ordem do grupo* G; caso contrário, diremos que G é um *grupo infinito* e que a ordem de G é *infinita*. O exemplo 6 nos mostra que para todo número natural $n \geqslant 1$ existe um grupo finito de ordem n; os grupos definidos nos exemplos 1 e 5 são infinitos.

Os axiomas G2 e G3 podem ser apresentados sob forma mais simples:

TEOREMA 1 - Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto G e suponhamos que esta operação satisfaça o axioma G1 e os seguintes

G2′: existe $e \in G$ tal que $a*e = a$ para todo a em G;

G3′: para todo a em G, existe a' em G tal que $a*a' = e$.

Nestas condições, a operação $*$ define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto G.

DEMONSTRAÇÃO - Precisamos, simplesmente, mostrar que

$$a'*a = e \quad \text{e} \quad e'*a = a,$$

Ora, por hipótese, para todo a em G existe $a' \in G$ tal que $a*a' = e$ e também existe $a'' \in G$ tal que $a'*a'' = e$; portanto, temos

$$a'*a = a'*(a*e) = a'*[a*(a'*a'')] = a'*[(a*a')*a''] =$$
$$= a'*(e*a'') = (a'*e)*a'' = a'*a'' = e$$

e

$$e*a = (a*a')*a = a*(a'*a) = a*e = a. \quad \blacksquare$$

Os axiomas que definem a estrutura de grupo também podem ser dados sob a forma

TEOREMA 2 - Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto não vazio G e suponhamos que esta operação satisfaça o axioma G1 e os seguintes

I: quaisquer que sejam a e b em G, existe x em G tal que $a*x = b$;

II: quaisquer que sejam a e b em G, existe y em G tal que $y*a = b$.

Nestas condições, a operação $*$ define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto G.

DEMONSTRAÇÃO - Verificaremos os axiomas G2′ e G3′. Como G é não vazio existe a_0 em G, logo, de acôrdo com o axioma I, existe e em G tal que $a_0*e = a_0$; se a é um elemento qualquer de G existe, conforme o axioma II, um elemento y em G tal que $y*a_0 = a$; portanto, temos

$$a*e = (y*a_0)*e = y*(a_0*e) = y*a_0 = a,$$

o que termina a verificação de G2′. O axioma G3′ é, evidentemente, verdadeiro em virtude do axioma I. ∎

Introduziremos, a seguir, uma notação que será bastante útil nos parágrafos seguintes e que já foi usada diversas vêzes nos Capítulos anteriores. Sejam A e B duas partes não vazias de um grupo multiplicativo G; colocaremos, por definição,

$$A^{-1} = \{a^{-1} \in G \mid a \in A\}$$

e

$$AB = \{ab \in G \mid a \in A \text{ e } b \in G\}.$$

Caso A seja unitário, $A = \{a\}$, indicaremos $\{a\}B$ ou $B\{a\}$ por aB ou Ba, respectivamente. Se G é um grupo aditivo, as notações acima serão substituídas por $-A$, $A+B$ e $a+B$.

LEMA 1 - Quaisquer que sejam as partes não vazias A, B e C, de um grupo multiplicativo G, tem-se:

a) $(AB)C = A(BC)$;

b) $A \cdot 1 = A \cdot = 1 \cdot A$;

c) $(A^{-1})^{-1} = A$;

d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

e) se $A \subset B$, então $AC \subset BC$;

f) se $A \subset B$, então $A^{-1} \subset B^{-1}$.

Deixaremos a verificação destas propriedades a cargo do leitor.

OBSERVAÇÃO - Seja G um grupo multiplicativo e consideremos o conjunto $(\mathcal{P}(G))^*$ das partes não vazias de G; conforme o lema acima, a operação $(A,B) \mapsto AB$ define uma estrutura de monóide parcialmente ordenado por inclusão sôbre $(\mathcal{P}(G))^*$. Observemos que se A é uma parte não vazia de G, então A^{-1} não é, necessàriamente, o inverso de A para esta operação, pois, se A tem mais de um elemento, temos $AA^{-1} \neq \{1\}$.

EXERCÍCIOS

1. Verificar o lema 1.

2. Seja $G = \boldsymbol{R}^* \times \boldsymbol{R}$ e ponhamos $(a,b)\cdot(c,d) = (ac, ad+b)$ quaisquer que sejam (a,b) e (c,d) em G; demonstrar que esta operacão define uma estrutura de grupo sôbre G. Êste grupo é comutativo? (Ver também o exercício 42).

3. Sejam a e b elementos quaisquer de um grupo G; mostrar que existe um elemento x em G tal que $xax = bba^{-1}$.

4. Substituir os axiomas G2′ e G3′, dados no teorema 1, pelos seguintes

G2″: existe e em G tal que $e*a = a$ para todo a em G;

G3″: qualquer que seja a em G, existe $a' \in G$ tal que $a' * a = e$.
Demonstrar que se obtém uma estrutura de grupo sôbre o conjunto G.

5. Consideremos o conjunto $\mathbb{C}^*$ de todos os números complexos não nulos e para todo par (a,b), de elementos de $\mathbb{C}^*$, ponhamos $a * b = |a|b$. Mostrar que esta operação $*$ satisfaz os axiomas G1, G2″ e G3′, mas não satisfaz G2′ e nem G3″ (portanto, não define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto $\mathbb{C}^*$).

6. Seja $(G,\cdot)$ um semi-grupo e suponhamos que $a \cdot G = G = G \cdot a$ para todo a em G; demonstrar que $(G,\cdot)$ é um grupo. Sugestão: teorema 2.

7. Seja $(G,\cdot)$ um semi-grupo e suponhamos que sejam válidas as seguintes condições:

a) existe e em G tal que $e^2 = e$;

b) para todo a em G existe $x \in G$ tal que $xa = e$ e existe no máximo um elemento $y \in G$ tal que $ay = e$. Demonstrar que $(G,\cdot)$ é um grupo. Sugestão: utilizando-se a) e a segunda parte de b) mostrar que $ae = a$; pondo-se $b = ea$ e notando-se que existe b' em G tal que $b'b = e$ concluir que $b = a$.

8. Demonstrar que se $(G,\cdot)$ é um grupo e se $1 \leq o(G) \leq 4$, então êste grupo é comutativo.

1.2 - SUBGRUPOS

DEFINIÇÃO 2 - Seja $(G,*)$ um grupo e seja H uma parte do conjunto G; diz-se que H é um *sub-grupo* de $(G,*)$ se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) H é fechado em relação à operação $*$;

b) H é um grupo em relação à operação induzida sôbre H pela operação $*$.

A condição a) impõe que se a e b são dois elementos quaisquer de H, então $a * b \in H$; portanto, a operação $*$ induz uma operação (ainda indicada por $*$) sôbre o conjunto H. A condição b) impõe que a restrição da operação $*$, ao subconjunto H, deve satisfazer os axiomas G1, G2 e G3. Para simplificar a linguagem pode-se dizer que um subconjunto H, de G, é um subgrupo de $(G,*)$ se, e sòmente se, H é um grupo em relação à operação $*$.

TEOREMA 3 - Seja $(G,\cdot)$ um grupo e seja H uma parte do conjunto G. H é um sub-grupo de G se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

1) $H \neq \emptyset$;

2) quaisquer que sejam a e b em G, se $a \in H$ e se $b \in H$, então $ab \in H$;

3) para todo a em G, se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que o subconjunto H satisfaça as condições 1), 2) e 3), logo, em particular, está verificada a condição a) da definição 2. Precisamos agora mostrar que os axiomas G1, G2 e G3 são verdadeiros em H.

G1: Por hipótese, temos $(ab)c = a(bc)$ quaisquer que sejam a, b e c em G, logo, esta igualdade também é verdadeira para todos os elementos a, b e c de H.

G2: Conforme a condição 1) existe um elemento a_0 em H, logo, de acôrdo com 3), $a_0^{-1} \in H$ e então, em virtude de 2), $a_0 a_0^{-1} \in H$, ou seja, $1 \in H$ e é imediato que $a \cdot 1 = a$ para todo a em H.

G3: É verdadeiro em virtude da condição 3).

Recìprocamente, suponhamos que H seja um subgrupo de G; conforme a condição a) da definição 2, H é fechado em relação à multiplicação de G, logo, está satisfeita a condição 2). O subconjunto H não é vazio, pois, de acôrdo com o axioma G2, existe em H o elemento unidade 1_H; portanto, está verificada a condição 1). Para verificar 3) mostraremos, em primeiro lugar, que $1_H = 1$. Com efeito, temos $1_H 1_H = 1_H \cdot 1$, logo, em virtude da lei do cancelamento aplicada a elementos de G, teremos $1_H = 1$. Se a é um elemento qualquer de H, então, de acôrdo com o axioma G3, que é verdadeiro em H, existe $a' \in H$ tal que $aa' = 1_H = 1$; esta igualdade nos mostra que a' também é o inverso de a em G; portanto, conforme a unicidade do inverso, temos $a' = a^{-1}$ e então $a^{-1} \in H$. ∎

TEOREMA 4 - Seja $(G,\cdot)$ um grupo e seja H uma parte do conjunto G. H é um subgrupo de G se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) $H \neq \emptyset$;

b) quaisquer que sejam a e b em G, se $a \in H$ e se $b \in H$, então $a^{-1}b \in H$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que H seja um sub-grupo de G, logo, $H \neq \emptyset$ em virtude do axioma G2. Por outro lado, sejam a e b dois elementos quaisquer de H; de acôrdo com a condição 3) do teorema 3, tem-se $a^{-1} \in H$ e como $b \in H$ concluímos que $a^{-1}b \in H$. Recìprocamente, suponhamos que um subconjunto H, de G, satisfaça a) e b), logo, a condição 1) do teorema 3 está verificada; daqui resulta que existe um elemento a_0 em H, de onde vem, $1 = a_0 a_0^{-1} \in H$. Portanto, se a é um elemento qualquer de H temos $a^{-1} = a^{-1} \cdot 1 \in H$, ou seja, vale a condição 3) do teorema 3. Finalmente, sejam a e b dois elementos quaisquer de H; conforme vimos acima temos $a^{-1} \in H$ e como $b \in H$ teremos $ab = (a^{-1})^{-1} b \in H$. ∎

EXEMPLO 10 - Todo grupo G admite, pelo menos, dois subgrupos: $\{1\}$ e G.

EXEMPLO 11 - O grupo aditivo $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbf{Q}$ dos números racionais que, por sua vez, é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbf{R}$ dos números reais.

EXEMPLO 12 - Para todo número inteiro n, indiquemos por $\mathbf{Z}n$ o conjunto de todos os inteiros que são múltiplos de n; a fórmula $qn-q'n=(q-q')n$ nos mostra que $\mathbf{Z}n$ é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbf{Z}$.

EXEMPLO 13 - O grupo multiplicativo $\mathbf{Q}^*$ dos números racionais não nulos é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbf{R}^*$ dos números reais não nulos que, por sua vez, é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbf{C}^*$ dos números complexos não nulos.

EXEMPLO 14 - O grupo U_n, definido no exemplo 6, é um subgrupo do grupo T definido no exemplo 5.

EXEMPLO 15 - Consideremos o grupo $(S(E),\circ)$ das permutações de um conjunto não vazio E e seja E_0 uma parte de E; é fácil verificar que o conjunto G de tôdas as permutações $\sigma\in S(E)$ tais que $\sigma(x)=x$, para todo x em E_0, é um subgrupo de $S(E)$. Todo subgrupo de $(S(E),\circ)$ é chamado *grupo de permutações sôbre* E.

TEOREMA 5 - A intersecção de uma família não vazia $(H_i)_{i\in I}$, de subgrupos de um grupo G, é um subgrupo de G.

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $H=\bigcap_{i\in I}H_i$ e notemos que $H\neq\emptyset$, pois, $1\in H_i$ para todo $i\in I$. Se a e b são dois elementos quaisquer de H, temos $a\in H_i$ e $b\in H_i$, logo, $a^{-1}b\in H_i$ para todo $i\in I$, de onde vem, $a^{-1}b\in H$. ∎

Seja G um grupo, seja S uma parte do conjunto G e consideremos a família $(H_i)_{i\in I}$ de todos os subgrupos de G que contêm S; é imediato que esta família é não vazia, pois, $S\subset G$ e G é um subgrupo de G. A intersecção da família (H_i) é um subgrupo de G que é denominado *subgrupo gerado pela parte* S e será indicado por $[S]$; S, por sua vez, é chamado *sistema de geradores do subgrupo* $[S]$. É fácil verificar que $[S]$ é o menor (em relação à inclusão) subgrupo de G que contém a parte S; portanto, se H é um subgrupo de G e se $S\subset H$, então $[S]\subset H$. Se $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ também usaremos a notação $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ para indicar o subgrupo $[S]$ e diremos que

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ são *geradores* dêste subgrupo; em particular, para todo a em G, $[a]$ indica o subgrupo gerado por a, ou seja, o menor subgrupo de G que contém $\{a\}$. Todo grupo que admite um sistema finito de geradores é denominado *grupo de tipo finito*.

TEOREMA 6 - Para todo elemento a, de um grupo G, tem-se

$$[a]=\{a^n\in G \mid n\in\mathbf{Z}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $H=[a]$ e $H_1=\{a^n\in G \mid n\in\mathbf{Z}\}$. As fórmulas $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ e $(a^n)^{-1}=a^{-n}$ nos mostram que H_1 é um subgrupo de G e como $a\in H_1$ teremos $H\subset H_1$. Por outro lado, de $a\in H$ resulta, por indução finita sôbre n, que $a^n\in H$ para todo número natural não nulo n e como $a^{-1}\in H$ também temos $(a^{-1})^n=a^{-n}\in H$; em resumo, $a^n\in H$ para todo número inteiro n, de onde vem, $H_1\subset H$. ∎

Os subgrupos do grupo aditivo $\mathbf{Z}$ dos números inteiros são completamente determinados conforme o seguinte

TEOREMA 7 - Se H é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbf{Z}$, então existe um único número inteiro $n\geq 0$ tal que $H=\mathbf{Z}n$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $H=\{0\}$ basta escolher $n=0$. Suponhamos, então, que $H\neq\{0\}$, logo, existe $m\in H$, $m\neq 0$ e podemos supor que $m>0$, pois, se $m<0$, temos $-m\in H$ e $-m>0$. Portanto, existe em H um menor inteiro estritamente positivo n e é imediato que $\mathbf{Z}n\subset H$. Se x é um elemento qualquer de H, temos, conforme o algoritmo da divisão, $x=qn+r$, onde $0\leq r<n$; mas $r=x-qn\in H$, logo, $r=0$ e então $x\in\mathbf{Z}n$, ou seja, $H\subset\mathbf{Z}n$ e portanto $H=\mathbf{Z}n$. Finalmente, se $H=\mathbf{Z}n'$, com $n'\geq 0$, temos evidentemente $n'\neq 0$ e $n\leq n'$; mas de $n\in\mathbf{Z}n'$ vem $n=qn'$, com $q>0$, logo, $n\geq n'$ e então $n=n'$. Fica assim demonstrado que o inteiro $n>0$ tal que $H=\mathbf{Z}n$ é único. ∎

EXERCÍCIOS

9. Seja G um grupo e sejam M e N duas partes quaisquer do conjunto G; verificar as seguintes propriedades:
   a) se $M\subset N$, então $[M]\subset[N]$;
   b) $[[M]]=[M]$;
   c) M é um subgrupo de G se, e sòmente se, $M=[M]$.

10. Demonstrar que se H é um subgrupo de $(G,\cdot)$ e se K é um subgrupo de $(H,\cdot)$, então K é um subgrupo de $(G,\cdot)$.

11. Seja $(G,\cdot)$ um grupo e seja H um subconjunto de G. Mostrar que H é um subgrupo de G se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas: a) $H\neq\emptyset$; b) $HH\subset H$; c) $H^{-1}\subset H$.

12. Com as notações do exercício anterior, mostrar que H é um subgrupo de G se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas: a) $H \neq \emptyset$; b) $H^{-1}H \subset H$ (ou $HH^{-1} \subset H$).

13. Seja $(G,\cdot)$ um grupo e seja H uma parte não vazia do conjunto G; mostrar que: a) se $HH \subset H$ e se $H^{-1} \subset H$, então $HH = H$ e $H^{-1} = H$; b) se $H^{-1}H \subset H$, então $H^{-1}H = H$.

14. Seja G um grupo e seja H uma parte finita e não vazia do conjunto G; demonstrar que se $HH \subset H$, então H é um subgrupo de G.

15. Demonstrar que se H e K são dois subgrupos próprios de um grupo G (logo, $H \neq G$ e $K \neq G$), então $H \cup K \neq G$.

16. Demonstrar que se H e K são dois subgrupos de um grupo G, então $H \cup K$ é um subgrupo de G se, e sòmente se, $H \subset K$ ou $K \subset H$.

17. Sejam H, K e L subgrupos de um grupo G e suponhamos que $H \subset L$; verificar as propriedades:

a) $L \cap (HK) = H(L \cap K)$;

b) se $G = HK$, então $L = H(L \cap K)$.

18. Sejam H e L subgrupos de um grupo G; mostrar que HL é um subgrupo de G se, e sòmente se, $HL = LH$.

19. Seja G um grupo e sejam a e b dois elementos permutáveis de G; mostrar que

$$[a,b] = \{a^m b^n \in G \mid m \in \mathbf{Z} \text{ e } n \in \mathbf{Z}\}.$$

Generalizar êste resultado para uma família finita $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ de elementos permutáveis dois a dois.

1.3 - RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA E SUBGRUPOS

Seja G um grupo multiplicativo e seja R uma relação de equivalência definida sôbre o conjunto G; daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 3 - Diz-se que R *é compatível à esquerda* (resp., *à direita*) *com a operação de* G se, e sòmente se, o seguinte axioma estiver verificado: quaisquer que sejam a, b e c em G, se $a \equiv b$ (mod. R), então $ca \equiv cb$ (mod. R) (resp., $ac \equiv bc$ (mod. R)). Se R é compatível à esquerda e à direita com a operação de G diremos, simplesmente, que R *é compatível com a operação de* G ou que R *é compatível com a estrutura de grupo definida sôbre o conjunto* G.

EXEMPLO 16 - A congruência módulo m definida sôbre o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é compatível com a estrutura de grupo aditivo definida sôbre $\mathbf{Z}$ (ver o teorema 32, Capítulo III).

EXEMPLO 17 - Se G é um grupo abeliano, então é imediato que tôda relação de equivalência compatível à esquerda ou à direita com a operação de G é compatível com a estrutura de grupo definida sôbre G.

EXEMPLO 18 - Seja H um subgrupo de um grupo G e consideremos a relação R_H definida do seguinte modo: se x e y são dois elementos quaisquer de G, então $x \equiv y$ (mod. R_H) se, e sòmente se, $x^{-1}y \in H$. É fácil verificar que R_H é uma relação de equivalência compatível à esquerda com a operação de G.

EXEMPLO 19 - Seja H um subgrupo de um grupo G e consideremos a relação R'_H definida do seguinte modo: se x e y são dois elementos quaisquer de G, então $x \equiv y$ (mod. R'_H) se, e sòmente se, $xy^{-1} \in H$. Verifica-se, fàcilmente, que R'_H é uma relação de equivalência compatível à direita com a operação do grupo G.

Os dois últimos exemplos nos mostram que todo subgrupo H, de G, determina duas relações de equivalência R_H e R'_H, sendo que a primeira é compatível à esquerda com a operação de G e a segunda é compatível à direita com a mesma operação. Um problema que surge naturalmente é o de se saber se tôdas as relações de equivalências, sôbre um grupo G e compatíveis à esquerda ou à direita com a operação de G, são obtidas pelo processo anterior; isto acontece em virtude dos teoremas 8 e 9 que demonstraremos abaixo.

TEOREMA 8 - Para tôda relação de equivalência R compatível à esquerda com a operação de um grupo G, tem-se:

a) existe um unico subgrupo H, de G, tal que $R = R'_H$;

b) para todo x em G, xH é a classe de equivalência, módulo R, determinada pelo elemento x.

DEMONSTRAÇÃO - a) Mostraremos, inicialmente, que o conjunto

$$H = \{x \in G \mid x \equiv 1 \text{ (mod. } R)\}$$

é um subgrupo de G. Com efeito, é imediato que H é não vazio e se x e y são dois elementos quaisquer de H temos $x \equiv 1$ (mod. R) e $y \equiv 1$ (mod. R), de onde vem, $xy \equiv x$ (mod. R), logo, $xy \equiv 1$ (mod. R) e então $xy \in H$; finalmente, de $x \equiv 1$ (mod. R) resulta $x^{-1}x \equiv x^{-1} \cdot 1$ (mod. R), logo, $x^{-1} \equiv 1$ (mod. R) e então $x^{-1} \in H$.

Mostraremos, a seguir, que $R = R_H$. De fato, se x e y são dois elementos quaisquer de G, temos

$$x \equiv y \text{ (mod. } R) \Longleftrightarrow x^{-1}x \equiv x^{-1}y \text{ (mod. } R) \Longleftrightarrow x^{-1}y \equiv 1 \text{ (mod. } R) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x^{-1}y \in H \Longleftrightarrow x \equiv y \text{ (mod. } R_H);$$

portanto, $R = R_H$.

Finalmente, se H_1 é um subgrupo de G e se $R = R_{H_1}$, temos

$$x \in H \iff x \equiv 1 \pmod{R} \iff x \equiv 1 \pmod{R_{H_1}} \iff x \in H_1;$$

portanto, $H \equiv H_1$.

b) Seja $\overline{x}$ a classe de equivalência, módulo H, determinada pelo elemento x e seja z um elemento qualquer de G; temos $z \in \overline{x} \iff z \equiv x \pmod{R} \iff x^{-1}z \equiv 1 \pmod{R} \iff x^{-1}z \in H \iff z \in xH$, logo, $\overline{x} \equiv xH$. ∎

Para todo $x \in G$ a classe de equivalência $\overline{x} \equiv xH$ é denominada *classe lateral à esquerda (módulo H) determinada por x*.

Vale um teorema análogo ao anterior para uma relação de equivalência compatível à direita com a operação de um grupo; precisamente, temos o seguinte

TEOREMA 9 - Para tôda relação de equivalência R compatível à direita com a operação de um grupo G, temos:

a) existe um único subgrupo H, de G, tal que $R = R'_H$;

b) para todo x em G, Hx é a classe de equivalência, módulo R, determinada pelo elemento x.

O subconjunto Hx passa a ser denominado *classe lateral à direita (módulo H) determinada pelo elemento x*.

LEMA 2 - Seja H um subgrupo de um grupo G e sejam x e y dois elementos quaisquer de G; temos $xH = yH$ se, e sòmente se, $Hx^{-1} = Hy^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO - De $xH = yH$ resulta $x^{-1}y \in H$, logo, $y^{-1}(x^{-1})^{-1} = (x^{-1}y)^{-1} \in H$ e então $Hx^{-1} = Hy^{-1}$. Reciprocamente, supondo-se que esta última igualdade seja verdadeira, temos $y^{-1}x = y^{-1}(x^{-1})^{-1} \in H$, logo, $x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in H$ e então $xH = yH$. ∎

Seja H um subgrupo de um grupo G e consideremos a relação de equivalência R_H determinada por H; diz-se que H tem *índice* (à esquerda) *finito* se, e sòmente se, o conjunto quociente G/R_H é finito e, neste caso, o número de elementos dêste conjunto é denominado *índice* (à esquerda) *de H em G*. Caso contrário, diz-se que H tem índice (à esquerda) infinito ou o que o índice (à esquerda) de H em G é infinito.

As noções acima também podem ser introduzidas com o qualificativo «à direita» e para isso considera-se o conjunto quociente G/R'_H. O lema 2 nos mostra que a aplicação $xH \mapsto Hx^{-1}$ é uma bijeção de G/R_H em G/R'_H e daqui resulta, em particular, que G/R_H é finito se, e sòmente se, G/R'_H é finito. Por causa disso não há necessidade de distinguir o índice à esquerda do índice à direita de H em G e diremos, simplesmente, que H tem índice finito ou infinito em G. Se H tem índice finito em G, então, o índice de H em G será indicado pela notação $(G:H)$, logo,

$$(G:H) = o(G/R_H) = o(G/R'_H).$$

Notemos ainda que $H = \{1\}$ tem índice finito em G se, e sòmente se, o grupo G é finito e, neste caso, tem-se $(G:\{1\}) = o(G)$.

LEMA 3 - Se H é um subgrupo finito de um grupo G, então para todo a em G tem-se $o(H) = o(aH) = o(Ha)$.

Basta notar que as aplicações $x \mapsto ax$ e $x \mapsto xa$ são, respectivamente, bijeções de H em aH e de H em Ha. ∎

Suponhamos agora que G seja um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então G/R_H é, evidentemente, finito; além disso, G/R_H é a reunião de $(G:H)$ classes laterais à esquerda disjuntas duas a duas e como estas classes têm o mesmo número de elementos, que é igual a $o(H)$ (lema 3), temos $o(G) = (G:H) \cdot o(H)$. Demonstramos assim o seguinte

TEOREMA 10 (Lagrange) - Para todo subgrupo H, de um grupo finito G, tem-se

$$o(G) = (G:H) \cdot o(H);$$

em particular, a ordem e o índice de todo subgrupo de G são divisores da ordem de G.

EXERCÍCIOS

20. Verificar que a relação R_H (definida no exemplo 18) é uma relação de equivalência compatível à esquerda com a operação de G.

21. Verificar que a relação R'_H (definida no exemplo 19) é uma relação de equivalência compatível à direita com a operação de G.

22. Demonstrar o teorema 9.

23. Dar um exemplo de uma relação de equivalência sôbre $\mathbf{Q}$ que é compatível com a adição (resp., multiplicação) e não é compatível com a multiplicação (resp., adição).

24. Seja H um subgrupo do grupo $(\mathbf{Z}, +)$; determinar o conjunto quociente $\mathbf{Z}/R_H$. Sugestão: teorema 7.

25. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G e sejam x e y dois elementos quaisquer de G; demonstrar que se $(HxK) \cap (HyK) \neq \emptyset$, então $HxK = HyK$.

26. O produto de duas classes laterais à esquerda é uma classe lateral à esquerda ou à direita?

27. Se G é um grupo finito e se a ordem de G é um número primo, então os únicos subgrupos de G são: $\{1\}$ e G. Sugestão: teorema de Lagrange.

28. Nas condições do exercício anterior, mostrar que para todo a em G, com $a \neq 1$, tem-se $G = [a]$.

29. Seja $G \neq \{1\}$ um grupo e suponhamos que os únicos subgrupos de G sejam G e $\{1\}$; demonstrar que para todo $a \in G, a \neq 1$, tem-se $G = [a]$.

30. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G e suponhamos que $H \subset K$. Verificar as seguintes propriedades:

a) Se H tem índice finito em K e se K tem índice finito em G, então H tem índice finito em G e

$$(G:H) = (G:K)(K:H).$$

b) Se H tem índice finito em G, então H tem índice finito em K e K tem índice finito em G e, portanto, vale a igualdade acima. Sugestão: Coloca-se $(K:H) = p$ e $(G:K) = q$, logo, K é a reunião de p classes laterais $a_1H, \cdots, a_pH$ $(a_i \in K)$ disjuntas duas a duas e G é a reunião de q classes laterais $b_1K, \cdots, b_qK$ disjuntas duas a duas; demonstrar que as classes laterais b_ja_iK $(i = 1,2,\cdots,p$ e $j = 1,2,\cdots,q)$ são disjuntas duas a duas e formam uma partição de G. Observação: o teorema de Lagrange é um caso particular de a) bastando para isso escolher $H = \{1\}$.

31. Generalizar o exercício anterior para uma família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$, de subgrupos de um grupo G, onde $H_i \subset H_{i+1}$ para $i = 1,2,\cdots,n-1$.

1.4 - GRUPOS QUOCIENTES, HOMOMORFISMOS

Seja N um subgrupo de um grupo multiplicativo G e consideremos as relações de equivalência R_N e R'_N determinadas por N; para todo x em G, xN e Nx são, respectivamente, as classes de equivalência módulo R_N e módulo R'_N determinadas por x e é fácil verificar que $R_N = R'_N$ se, e sòmente se, $xN = Nx$ qualquer que seja x em G. Um subgrupo que satisfaz esta condição é denominado subgrupo normal (ou invariante ou distinguido); como esta noção é muito importante vamos destacá-la pela

DEFINIÇÃO 4 - Diz-se que um subgrupo N, de um grupo G, é um *subgrupo normal de* G se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: para todo x em G tem-se $xN = Nx$.

Se N é um subgrupo normal de G, então $R_N = R'_N$ é compatível com a estrutura de grupo definida sôbre G; indicaremos esta relação de equivalência com a mesma letra que indica o subgrupo normal correspondente e temos $x \equiv y$ (mod. N) se, e sòmente se, $x^{-1}y \in N$ (ou $xy^{-1} \in N$).

EXEMPLO 20 - Todo grupo G admite pelo menos dois subgrupos normais, a saber: $\{1\}$ e G

EXEMPLO 21 - Todo subgrupo de um grupo abeliano é normal.

OBSERVAÇÃO - Sejam M e N subgrupos, de um grupo G, tais que $N \subset M$; se N é um subgrupo normal de G, então é imediato que N também é um subgrupo normal de M. No entanto, se N é um subgrupo normal de M, nem sempre N é um subgrupo normal de G, mesmo quando M é um subgrupo normal de G (ver o exemplo 45).

Para mostrar que um subgrupo é normal usaremos freqüentemente o critério mais simples dado pelo seguinte

LEMA 4 - Um subgrupo N, de um grupo G, é normal se, e sòmente se, a seguinte condição estiver verificada: para todo x em G, tem-se $xNx^{-1} \subset N$,

DEMONSTRAÇÃO - Se N é normal, temos $xN = Nx$ ou $xNx^{-1} = N$ para todo x em G. Recìprocamente, suponhamos que $xNx^{-1} \subset N$ para todo x em G; se x_0 é um elemento qualquer de G, temos

$$x_0Nx_0^{-1} \subset N \quad \text{e} \quad x_0^{-1}N(x_0^{-1})^{-1} \subset N.$$

Desta última inclusão vem $N \subset x_0Nx_0^{-1}$, logo, $N = x_0Nx_0^{-1}$ ou $x_0N = Nx_0$; portanto, N é um subgrupo normal de G. ∎

Seja N um subgrupo normal de um grupo G e consideremos o conjunto quociente G/N de G pela relação de equivalência N; os elementos deste conjunto são as classes laterais $xN = Nx$, com x em G. Sejam xN e yN duas classes laterais quaisquer; conforme o lema 1 e a igualdade $NN = N$, temos

$$(xN)(yN) = x[N(yN)] = x[N(Ny)] = x[(NN)y] = x(Ny) = x(yN) = (xy)N,$$

logo, o produto de duas classes laterais módulo N é uma classe lateral módulo N. Fica assim definida uma operação de multiplicação sôbre o conjunto G/N e temos o seguinte

TEOREMA 11 - Seja N um subgrupo normal de um grupo G e consideremos o conjunto quociente G/N; a operação de multiplicação

$$(xN, yN) \longrightarrow (xy)N$$

define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto G/N.

DEMONSTRAÇÃO - O lema 1 nos mostra que esta operação é associativa e vamos, então, verificar os axiomas G2′ e G3′.

G2′: Considerando-se o subconjunto N teremos, para tôda classe lateral xN de G/N,

$$(xN)N = x(NN) = xN.$$

G3′: Seja xN uma classe lateral qualquer e consideremos a classe lateral $x^{-1}N \in G/N$; temos

$$(xN)(x^{-1}N) = (xx^{-1})N = 1 \cdot N = N.$$ ∎

O grupo $(G/N,\cdot)$ passa a ser denominado *grupo quociente de* $(G,\cdot)$ *pelo subgrupo normal* N. Notemos que seu elemento unidade é o subconjunto N e que o inverso de cada elemento xN é a classe lateral $x^{-1}N$.

EXEMPLO 22 - Consideremos o grupo aditivo $\boldsymbol{Z}$ dos números inteiros e seja N um subgrupo de $\boldsymbol{Z}$; conforme o teorema 7 existe um único número natural n tal que $N=\boldsymbol{Z}n$ e notemos que N é normal em $\boldsymbol{Z}$ (exemplo 21). Se x e y são dois elementos quaisquer de $\boldsymbol{Z}$, então temos $x\equiv y$ (mod. N) se, e sòmente se, $x-y\in N=\boldsymbol{Z}n$, ou seja, se, e sòmente se, $x\equiv y$ (mod. n); portanto, a relação de equivalência determinada por N coincide com a congruência módulo n. Vimos no §2.6 do Capítulo III, que se $n>0$, então o conjunto quociente $\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{Z}n$ tem exatamente n elementos:

$$\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{Z}n=\{\boldsymbol{Z}n,1+\boldsymbol{Z}n,\cdots,(n-1)+\boldsymbol{Z}n\};$$

notemos ainda que a soma de duas classes laterais $a+\boldsymbol{Z}n$ e $b+\boldsymbol{Z}n$ é a classe lateral $(a+b)+\boldsymbol{Z}n$ e é imediato que esta classe coincide com $r+\boldsymbol{Z}n$, onde r é o resto da divisão euclidiana de $a+b$ por n.

DEFINIÇÃO 5 - Sejam G e G' dois grupos multiplicativos e seja f uma aplicação do conjunto G no conjunto G'; diz-se que f é um *homomorfismo de* $(G,\cdot)$ *em* $(G',\cdot)$ se, e sòmente se,

$$f(ab)=f(a)f(b) \qquad (2),$$

quaisquer que sejam a e b em G.

Se o grupo G é aditivo e G' é multiplicativo, então a fórmula (2) será representada sob a forma

$$f(a+b)=f(a)f(b).$$

Nos outros casos possíveis, temos

$$f(ab)=f(a)+f(b)$$

e

$$f(a+b)=f(a)+f(b).$$

Se f é um homomorfismo de G em G' e se f é uma aplicação sobrejetora, diremos que f é um *epimorfismo de* G *em* G' ou que f é um *homomorfismo sobrejetor de* G *em* G'.

Se f é um homomorfismo de G em G' e se f é uma aplicação injetora, diremos que f é um *monomorfismo de* G *em* G' ou que f é um *homomorfismo injetor de* G *em* G'.

Finalmente, se f é um homomorfismo de G em G' e se f é uma aplicação bijetora, diremos que f é um *isomorfismo de* G *em* G' ou que f é um *homomorfismo bijetor de* G *em* G'.

Neste caso também se diz que o grupo G é *isomorfo* ao grupo G' e escreveremos $G\cong G'$ (leia-se: G é isomorfo a G').

Um homomorfismo de G em G também é denominado *endomorfismo de* G e um isomorfismo de G em G é chamado *automorfismo de* G.

Indicaremos por $Hom(G,G')$ o conjunto de todos os homomorfismos de G em G' e colocaremos $End(G)=Hom(G,G)$; além disso, indicaremos por $Aut(G)$ o conjunto de todos os automorfismos do grupo G.

EXEMPLO 23 - Seja a um elemento de um grupo G; a aplicação $f:\boldsymbol{Z}\to G$ definida por $f(n)=a^n$ é um homomorfismo de $(\boldsymbol{Z},+)$ em $(G,\cdot)$, pois,

$$f(m+n)=a^{m+n}=a^m.a^n=f(m)f(n).$$

EXEMPLO 24 - Seja d um número inteiro não nulo e consideremos a aplicação $f:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$ definida por $f(n)=dn$; é imediato que f é um endomorfismo de $(\boldsymbol{Z},+)$. Tomando-se $d>1$ tem-se um exemplo de endomorfismo injetor que não é sobrejetor.

EXEMPLO 25 - Consideremos o grupo aditivo $\boldsymbol{R}$ dos números reais e o grupo multiplicativo $\boldsymbol{R}_+^*$ dos números reais estritamente positivos; se $a\neq 1$ é um número real estritamente positivo, então a função exponencial $x\mapsto a^x$ é um isomorfismo de $(\boldsymbol{R},+)$ em $(\boldsymbol{R}_+^*,\cdot)$. Anàlogamente, a função logarítmica $x\mapsto log_a x$ é um isomorfismo de $(\boldsymbol{R}_+^*,\cdot)$ em $(\boldsymbol{R},+)$.

EXEMPLO 26 - Seja N um subgrupo normal de um grupo G e consideremos o grupo quociente G/N; a aplicação $\varphi:G\mapsto G/N$, definida por $\varphi(x)=xN$, é um epimorfismo, que é denominado *homomorfismo canônico de* G *em* G/N.

Utilizaremos no teorema abaixo as notações introduzidas nos exercícios 82 e 84 do Capítulo I: se $f:E\mapsto F$ é uma aplicação de um conjunto E num conjunto F e se X e Y são, respectivamente, partes de E e de F, então $f(X)=Im(f_X)$, onde f_X indica a restrição de f ao subconjunto X e

$$f^{-1}(Y)=\{x\in E \mid f(x)\in Y\}.$$

Lembremos ainda que se $X\subset X'\subset E$ e se $Y\subset Y'\subset F$, então $f(X)\subset f(X')$ e $f^{-1}(Y)\subset f^{-1}(Y')$.

TEOREMA 12 - Para todo homomorfismo f de um grupo G num grupo G' valem as seguintes propriedades:

a) $f(1)$ é o elemento unidade de G';

b) $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$;

c) se H é um subgrupo de G, então $f(H)$ é um subgrupo de G';

d) se K' é um subgrupo de G', então $K=\bar{f}^{1}(K')$ é um subgrupo de G e, além disso, se K' é normal em G', então K é normal em G.

DEMONSTRAÇÃO

a) Temos $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1)$ e daqui resulta que $f(1)$ é o elemento unidade de G'.

b) Temos $f(1)=f(aa^{-1})=f(a)f(a^{-1})$, logo, $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$.

c) É imediato que $f(H)$ é não vazio; se a' e b' são dois elementos quaisquer de $f(H)$ temos $a'=f(a)$ e $b'=f(b)$, com a e b em H, logo, $a^{-1}b\in H$ e como

$$a'^{-1}b'=(f(a))^{-1}f(b)=f(a^{-1})f(b)=f(a^{-1}b)$$

resulta que $a'^{-1}b'\in f(H)$.

d) É imediato que $K=\bar{f}^{1}(K')$ é não vazio; se a e b são dois elementos quaisquer de K, temos $f(a)\in K'$ e $f(b)\in K'$, logo, $f(a^{-1}b)=(f(a))^{-1}f(b)\in K'$, de onde vem, $a^{-1}b\in K$ e fica assim demonstrado que K é um subgrupo de G. Finalmente, seja x um elemento qualquer de G e consideremos um elemento y de xKx^{-1}, logo, $y=xax^{-1}$ com a em K; daqui resulta $f(y)=f(x)f(a)f(x)^{-1}$ e como $f(a)\in K'$ e K' é normal em G' teremos $f(y)\in K'$, isto é, $y\in K$ e fica assim demonstrado que $xKx^{-1}\subset K$.

Para todo homomorfismo $f: G\to G'$, a imagem da aplicação f, que é indicada por $Im(f)$ (ver o §3.1, Capítulo I), passa a ser denominada *imagem do homomorfismo* f. Notemos que $Im(f)=f(G)$ é um subgrupo de G' e que f é um epimorfismo se, e sòmente se, $Im(f)=G'$. O conjunto de todos os elementos a de G tais que $f(a)=1$ (onde 1 também indica o elemento unidade de G') é denominado *núcleo* ou *kernel* do homomorfismo f e será indicado por $Ker(f)$ (leia-se: kernel de f). Notemos que $Ker(f)=\bar{f}^{1}(\{1\})$, logo, $Ker(f)$ é um subgrupo normal de G. É fácil verificar que f é um monomorfismo se, e sòmente se, $Ker(f)=\{1\}$. Observemos ainda que todo subgrupo normal N de G é o núcleo de algum homomorfismo, pois, o homomorfismo canônico $\varphi: G\to G/N$ tem núcleo N.

EXEMPLO 27 - Seja $n>1$ um número natural e consideremos o grupo $(T,\cdot)$ definido no exemplo 5; a aplicação $f: T\to T$, definida por $f(z)=z^n$, é um endomorfismo de T. De acôrdo com o exercício 95 do Capítulo V, f é sobrejetor e notemos que f não é injetor, pois, $Ker(f)=U_n$; temos, assim, um exemplo de um endomorfismo sobrejetor que não é injetor (ver o exemplo 24).

As partes c) e d) do teorema 12 podem ser dadas sob forma mais precisa quando f é um epimorfismo de núcleo N: $\bar{f}^{1}(f(H))=NH=HN$, $f(\bar{f}^{1}(K'))=K'$ e $f(\bar{f}^{1}(f(H)))=f(H)$. Deixaremos a verificação destas propriedades a cargo do leitor.

Em particular, se φ é o homomorfismo canônico de G em $G'=G/N$ e se K' é um subgrupo normal de G', então $K=\bar{\varphi}^{1}(K')$ é um subgrupo normal de G que contém N e $\varphi(K)=K'$; além disso, é fácil verificar que $K'=K/N$ (ver o exercício 74).

TEOREMA 13 - Sejam G, G' e G'' três grupos; se $f\in Hom(G,G')$ e se $g\in Hom(G',G'')$, então $g\circ f\in Hom(G,G'')$.

Com efeito, se a e b são dois elementos quaisquer de G, temos $(g\circ f)(ab)=g(f(ab))=g(f(a)f(b))=g(f(a))g(f(b))=(g\circ f)(a)\cdot(g\circ f)(b)$, logo, $g\circ f$ é um homomorfismo. ∎

COROLÁRIO - Com as notações do teorema anterior, se $G\cong G'$ e se $G'\cong G''$, então $G\cong G''$.

Basta lembrar que a composta de duas bijeções é uma bijeção.

TEOREMA 14 - Se f é um isomorfismo de um grupo G num grupo G', então a aplicação inversa de f é um isomorfismo de G' em G.

DEMONSTRAÇÃO - Já sabemos que f^{-1} é uma bijeção de G' em G; por outro lado, se a' e b' são dois elementos quaisquer de G', então existem a e b em G tais que $f(a)=a'$ e $f(b)=b'$, logo, $a'b'=f(a)f(b)=f(ab)$, de onde vem, $f^{-1}(a'b')=ab=f^{-1}(a')f^{-1}(b')$. ∎

O teorema acima nos mostra que se $G\cong G'$, então $G'\cong G$; por causa disto podemos dizer, neste caso, que G e G' são isomorfos.

Conforme o teorema 10 do Capítulo I e o teorema acima, temos o seguinte

COROLÁRIO - Para que um homomorfismo f de um grupo G num grupo G' seja um isomorfismo, é necessário e suficiente que exista uma aplicação $g: G'\to G$ tal que $g\circ f=1_G$ e $f\circ g=1_{G'}$; neste caso, tem-se $g=f^{-1}$.

EXEMPLO 28 - Consideremos um grupo G e seja $(S(G),\circ)$ o grupo simétrico do conjunto G; notemos que $Aut(G)\subset S(G)$ e, por outro lado, os teoremas 13 e 14 nos mostram que $Aut(G)$ é um subgrupo de $S(G)$. Diremos, então, que $Aut(G)$ é o *grupo dos automorfismos do grupo* G.

TEOREMA 15 - Seja f um homomorfismo de um grupo G num grupo G', seja L um subgrupo normal de G tal que $L \subset N = Ker(f)$ e indiquemos por φ o homomorfismo canônico de G em G/L. Nestas condições, temos:

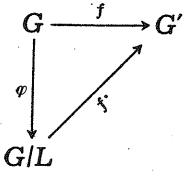
a) existe uma única aplicação $f^*: G/L \to G'$ tal que $f^* \circ \varphi = f$;

b) f^* é um homomorfismo;

c) se f é um epimorfismo, então f^* também é um epimorfismo;

d) $Ker(f^*) = N/L$.

Os diversos homomorfismos considerados neste teorema podem ser visualizados no seguinte diagrama



$f(L) = \{1\}$
$f^* \circ \varphi = f$.

DEMONSTRAÇÃO - a) É imediato que se $xL = yL$, com x e y em G, então $f(x) = f(y)$, pois, $y^{-1}x \in L \subset N$; portanto, $x + L \mapsto f(x)$ é uma aplicação f^* de G/L em G' e é evidente que $f^* \circ \varphi = f$. Se $g: G/L \to G'$ é tal que $g \circ \varphi = f$ e se xL é um elemento qualquer de G/L, temos

$$g(xL) = g(\varphi(x)) = (g \circ \varphi)(x) = (f^* \circ \varphi)(x) = f^*(\varphi(x)) = f^*(xL),$$

logo, $g = f^*$.

b) Se xL e yL são dois elementos quaisquer de G/L, temos

$$f^*(xL \circ yL) = f^*((xy)L) = f(xy) = f(x)f(y) = f^*(xL)f^*(yL);$$

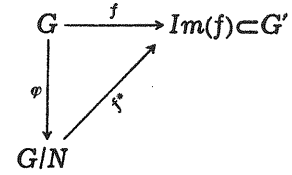
portanto, f^* é um homomorfismo de G/L em G'.

c) Por hipótese, para todo $x' \in G'$ existe $x \in G$ tal que $f(x) = x'$, logo, $(f^* \circ \varphi)(x) = x'$, ou, $f^*(xL) = x'$; portanto, f^* é um epimorfismo.

d) De $xL \in Ker(f^*)$ vem $f^*(xL) = 1$, ou, $(f^* \circ \varphi)(x) = 1$, ou, $f(x) = 1$, logo, $x \in N = Ker(f)$ e então $xL \in N/L$; recìprocamente, é imediato que se $xL \in N/L$, então $f^*(xL) = 1$. Portanto, temos $Ker(f^*) = N/L$. ∎

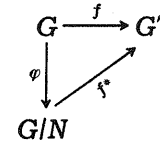
O homomorfismo f^*, definido na demonstração do teorema acima, é denominado *homomorfismo induzido por* f. Se $L = N$, então f^* é um monomorfismo de G/L em G' e temos assim o seguinte

TEOREMA 16 (teorema do homomorfismo) - Se f é um homomorfismo de um grupo G num grupo G' e se $N = Ker(f)$, então existe um único monomorfismo f^*, de G/N em G', tal que $f^* \circ \varphi = f$, onde φ é o homomorfismo canônico de G em G/N; em particular, temos $G/N \cong Im(f)$.



$Ker(f) = N$
$G/N \cong Im(f)$.

COROLÁRIO - Se f é um epimorfismo de um grupo G num grupo G', e se $N = Ker(f)$, então existe um único isomorfismo f^*, de G/N em G', tal que $f^* \circ \varphi = f$, onde φ é o homomorfismo canônico de G em G/N; em particular, temos $G/N \cong G'$.



$Ker(f) = N$, $Im(f) = G'$
$G/N \cong G'$.

EXEMPLO 29 - Consideremos os grupos $(\mathbf{Z}, +)$ e $(F_n, +)$, onde $n \geq 1$ e seja $f: \mathbf{Z} \to F_n$ e aplicação que a todo inteiro a faz corresponder o resto da divisão euclidiana de a por n. É fácil verificar que f é um epimorfismo e que $Ker(f) = \mathbf{Z}n$; portanto, de acôrdo com o corolário acima, temos $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n \cong F_n$.

EXEMPLO 30 - Com as notações e hipóteses do exemplo 27, temos $T/U_n \cong T$.

Para cada elemento a de um grupo multiplicativo G a aplicação $\gamma_a: G \to G$ (resp., $\delta_a: G \to G$) definida por $\gamma_a(x) = ax$ (resp., $\delta_a(x) = xa$) é denominada *translação à esquerda* (resp., *à direita*) *determinada pelo elemento* a. É fácil verificar que γ_a e δ_a são bijeções do conjunto G, logo, γ_a e δ_a são elementos de $S(G)$; além disso, se a e b são dois elementos quaisquer de G, tem-se

$$\gamma_{ab} = \gamma_a \circ \gamma_b \quad \text{e} \quad \delta_{ab} = \delta_b \circ \delta_a \qquad (3).$$

A primeira igualdade nos mostra que a aplicação $a \mapsto \gamma_a$ é um homomorfismo de G em $S(G)$ e é imediato que seu núcleo se reduz ao elemento unidade de G, logo, esta aplicação é um monomorfismo. Daqui resulta que o conjunto $\Gamma(G)$ de tôdas as translações à esquerda do grupo G é um subgrupo de $S(G)$ e que $G \cong \Gamma(G)$, ou seja, o grupo G é isomorfo a um grupo de permutações. Destacaremos êste resultado pelo seguinte

TEOREMA 17 (Cayley) - Todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações.

O teorema acima nos mostra que o estudo de um grupo pode ser limitado ao estudo de um conveniente grupo de permutações.

DEFINIÇÃO 6 - Chama-se *centro* de um grupo G ao conjunto $C(G)$ de todos os elementos x de G tais que $xy = yx$ para todo y em G.

TEOREMA 18 - O centro de um grupo G é um subgrupo abeliano de G e todo subgrupo de $C(G)$ é um subgrupo normal de G; além disso, para todo $\sigma \in Aut(G)$ tem-se $\sigma(C(G)) \subset C(G)$.

DEMONSTRAÇÃO - Notemos que $1 \in C(G)$ e se x e x' são dois elementos quaisquer de $C(G)$, então $xx' \in C(G)$ (exercício 16, Capítulo II) e $x^{-1} \in C(G)$ (teorema 4, Capítulo II); portanto, $C(G)$ é um subgrupo de G e é imediato que $C(G)$ é abeliano. Se H é um subgrupo de $C(G)$ e se y é um elemento qualquer de G, temos $yHy^{-1} = H$, logo, H é um subgrupo normal de G. Finalmente, se y é um elemento qualquer de G, então existe z em G tal que $y = \sigma(z)$; portanto, se $x \in C(G)$ teremos

$$y\sigma(x) = \sigma(z)\sigma(x) = \sigma(zx) = \sigma(xz) = \sigma(x)\sigma(z) = \sigma(x)y,$$

logo, $\sigma(x) \in C(G)$, ou seja, $\sigma(C(G)) \subset C(G)$. ∎

Por causa da última afirmação do teorema acima diz-se que $C(G)$ é um *subgrupo característico* de G.

TEOREMA 19 - Para todo elemento a de um grupo G, a aplicação $\sigma_a : G \longrightarrow G$, definida por $\sigma_a(x) = axa^{-1}$, é um automorfismo de G.

DEMONSTRAÇÃO - Notando-se que $\sigma_a = \gamma_a \circ \delta_{a^{-1}}$ resulta que σ_a é bijetora; por outro lado, se x e y são dois elementos quaisquer de G, temos

$$\sigma_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \sigma_a(x)\sigma_a(y),$$

logo, σ_a é um automorfismo de G. ∎

Diremos que σ_a é o *automorfismo interno* determinado pelo elemento a.

Sejam x e y dois elementos quaisquer de um grupo G; diz-se que x *é conjugado de* y (em G) se, e sòmente se, existe a em G tal que $\sigma_a(x) = y$. É fácil verificar que a relação «x é conjugado de y» é uma relação de equivalência sôbre o conjunto G; por causa disso podemos dizer «x e y são conjugados» em lugar de «x é conjugado de y».

Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G; diz-se que H é um *subgrupo conjugado* de K (em G) se, e sòmente se, existe a em G tal que $\sigma_a(H) = K$. É fácil verificar que a relação «H é um subgrupo conjugado de K» é uma relação de equivalência sôbre o conjunto $\mathcal{G}$ de todos os subgrupos de G e diremos, então, que H e K são subgrupos conjugados. Notemos que um subgrupo N, de G, é normal se, e sòmente se, $\sigma_a(N) = N$ para todo a em G; por causa desta propriedade, um subgrupo normal N de G também é chamado subgrupo *invariante* para frizar que N é «invariante» em relação a todo automorfismo interno de G.

TEOREMA 20 - O conjunto $\Delta(G)$, de todos os automorfismos internos de um grupo G, é um subgrupo normal de $Aut(G)$ e a aplicação $a \mapsto \sigma_a$ é um epimorfismo de G em $\Delta(G)$ cujo núcleo é o centro de G, logo, $G/C(G) \cong \Delta(G)$.

DEMONSTRAÇÃO - É fácil verificar que

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab} \quad \text{e} \quad (\sigma_a)^{-1} = \sigma_{a^{-1}},$$

quaisquer que sejam a e b em G, logo, $\Delta(G)$ é um subgrupo de $Aut(G)$. Por outro lado, se $f \in Aut(G)$ e se $g \in f\Delta(G)f^{-1}$, temos $g = f\sigma_a f^{-1}$, com $a \in G$, logo,

$$g(x) = (f\sigma_a f^{-1})(x) = (f\sigma_a)(f^{-1}(x)) = f(af^{-1}(xa)^{-1}) =$$
$$= f(a)x(f(a))^{-1} = \sigma_{f(a)}(x),$$

de onde vem, $g = \sigma_{f(a)} \in \Delta(G)$ e então $f\Delta(G)f^{-1} \subset \Delta(G)$ e fica assim demonstrado que $\Delta(G)$ é normal em $Aut(G)$. Finalmente, notando-se que $\sigma_a = 1_G$ se, e sòmente se, $a \in C(G)$ concluímos que o núcleo do epimorfismo $a \mapsto \sigma_a$ é $C(G)$. A última afirmação do teorema acima é, então, uma conseqüência imediata do corolário do teorema do homomorfismo. ∎

EXERCÍCIOS

32. Verificar as propriedades enunciadas logo acima do teorema 13.

33. Verificar as fórmulas (3).

34. Verificar que «x é conjugado de y» é uma relação de equivalência sôbre o conjunto G.

35. Verificar que «H é um subgrupo conjugado de K» é uma relação de equivalência sôbre o conjunto $\mathcal{G}$ de todos os subgrupos de G.

36. Construir o grupo quociente do grupo aditivo $\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \cdot 20$ pelo subgrupo $H = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$.

37. Se $f : G \to G'$ é um epimorfismo e se G é abeliano, então G' também é abeliano.

38. Se $f: G \to G'$ é um isomorfismo e se H é um subgrupo de índice finito em G, então $H' = f(H)$ é um subgrupo de índice finito em G' e $(G:H) = (G':H')$.

39. Se H é um subgrupo de índice finito de um grupo G e se K é um subgrupo conjugado de H, então $(G:H) = (G:K)$.

40. Se $f \in End(G)$ e se H é um subgrupo de índice finito em G, então $f(H) = H'$ tem índice finito em $f(G) = G'$ e $(G':H') \leqslant (G:H)$.

41. Seja $f: G \to G$ a aplicação definida por $f(x) = x^{-1}$; mostrar que f é bijetora e mostrar que $f \in Aut(G)$ se, e sòmente se, G é abeliano.

42. Consideremos o grupo $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ definido no exercício 2 e para cada par ordenado $(a,b) \in G$ indiquemos por $f_{a,b}$ a aplicação de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ definida por $f_{a,b}(x) = ax + b$. Verificar as seguintes propriedades:

a) $f_{a,b} \in S(G)$;

b) o conjunto $H = \{f_{a,b} \in S(G) \mid (a,b) \in G\}$ é um subgrupo de $(S(G), \circ)$;

c) a aplicação $(a,b) \mapsto f_{a,b}$ é um isomorfismo de G em H.

43. Consideremos o grupo aditivo $\mathbf{C}$ dos números complexos e para todo $z = a + bi$, com a e b reais, ponhamos $\mathcal{R}(z) = a$ e $\mathcal{I}(z) = b$. Mostrar que as aplicações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$ são endomorfismos de $(\mathbf{C},+)$ e determinar os núcleos e as imagens dêstes endomorfismos. Determinar os grupos quocientes $\mathbf{C}/Ker(\mathcal{R})$ e $\mathbf{C}/Ker(\mathcal{I})$.

44. Demonstrar que se N é um subgrupo de um grupo G e se $(G:N) = 2$, então N é normal em G.

45. Demonstrar que se um grupo finito G tem um único subgrupo N, de uma dada ordem m, então N é normal em G. Sugestão: exercício 40.

46. Sejam N e L subgrupos de um grupo G e suponhamos que N seja normal em G; verificar as seguintes propriedades:

a) NL é um subgrupo de G e $NL = LN$;

b) se L é normal em G, então NL também é normal em G.

47. Se $(N_i)_{i \in I}$ é uma família não vazia de subgrupos normais de um grupo G, então

$$\bigcap_{i \in I} N_i \quad \text{e} \quad \left[\bigcup_{i \in I} N_i\right]$$

são subgrupos normais de G.

48. Mostrar que a reunião de uma cadeia crescente de subgrupos normais, de um grupo G, é um subgrupo normal de G.

49. Demonstrar que $Aut(\mathbf{Z}) \cong \{-1, 1\}$.

50. Demonstrar que se G não é abeliano, então $Aut(G)$ também não é abeliano. Sugestão: teorema 20.

1.5 - TEOREMAS DO ISOMORFISMO

Demonstraremos, inicialmente, o seguinte

TEOREMA 21 - Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\ f\ } & G_2 \\ {\scriptstyle \varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ G_1/M_1 & \xrightarrow{\ f^*\ } & G_2/M_2 \end{array}$$

onde cada G_i é um grupo multiplicativo, M_i é um subgrupo normal de G_i, φ_i é o homomorfismo canônico de G_i em G_i/M_i e f é um homomorfismo de G_1 em G_2 tal que $f(M_1) \subset M_2$. Nestas condições, temos

a) existe uma única aplicação $f^*: G_1/M_1 \to G_2/M_2$ tal que $f^* \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$;

b) f^* é um homomorfismo;

c) se f é um epimorfismo, então f^* também é um epimorfismo;

d) $N = f^{-1}(M_2)$ é um subgrupo normal de G_1, $M_1 \subset N$ e $Ker(f^*) = N/M_1$.

DEMONSTRAÇÃO

a) É imediato que se $xM_1 = yM_1$, com x e y em G_1, então $f(x)M_2 = f(y)M_2$, pois, $f(M_1) \subset M_2$; portanto, $xM_1 \mapsto f(x)M_2$ é uma aplicação f^* de G_1/M_1 em G_2/M_2 e é evidente que $f^* \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$. Se $g: G_1/M_1 \to G_2/M_2$ é tal que $g \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$ e se xM_1 é um elemento qualquer de G_1/M_1, então temos

$$g(xM_1) = g(\varphi_1(x)) = (g \circ \varphi_1)(x) = (\varphi_2 \circ f)(x) = \\ = \varphi_2(f(x)) = f(x)M_2 = f^*(xM_1),$$

logo, $g = f^*$.

b) se xM_1 e yM_1 são dois elementos quaisquer de G_1/M_1, temos

$$f^*(xM_1 \cdot yM_1) = f^*((xy)M_1) = f(xy)M_2 = \\ = [f(x)f(y)]M_2 = f(x)M_2 \cdot f(y)M_2 = f^*(xM_1)f^*(yM_1),$$

logo, f^* é um homomorfismo.

c) Para todo $x_2M_2 \in G_2/M_2$ existe, por hipótese, $x_1 \in G_1$ tal que $f(x_1) = x_2$, logo,

$$f^*(x_1M_1) = f(x_1)M_2 = x_2M_2$$

e então f^* é um epimorfismo.

d) As primeiras afirmações desta parte já foram vistas na secção anterior; vejamos a última. Seja xM_1 ($x \in G_1$) um

elemento do conjunto quociente N/M_1, logo, $x \in N$, de onde vem, $f(x) \in M_2$; portanto, $\varphi_2(f(x)) = f^*(xM_1)$ é o elemento unidade de M_2 de G_2/M_2, ou seja, $xM_1 \in Ker(f^*)$ e então $N/M_1 \subset Ker(f^*)$. Por outro lado, se $xM_1 \in Ker(f^*)$, temos

$$M_2 = f^*(xM_1) = f^*(\varphi_1(x)) = (f^* \circ \varphi_1)(x) =$$
$$= (\varphi_2 \circ f)(x) = \varphi_2(f(x)) = f(x)M_2,$$

logo, $f(x) \in M_2$ ou $x \in N$; portanto, $xM_1 \in N/M_1$ e fica assim demonstrado que $Ker(f^*) \subset N/M_1$. ∎

O homomorfismo f^*, definido na demonstração do teorema acima, é denominado *homomorfismo induzido por* f.

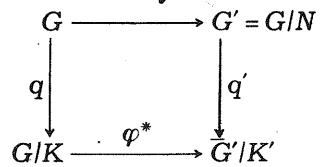
TEOREMA 22 (*primeiro teorema do isomorfismo*) - Seja N um subgrupo normal de um grupo G, seja φ o homomorfismo canônico de G em $G' = G/N$, seja K' um subgrupo normal de G' e ponhamos $K = \overline{\varphi}^1(K')$.

Nestas condições, temos:

a) K é um subgrupo normal de G, $N \subset K$, $\varphi(K) = K'$ e $K' = K/N$;

b) existe um único isomorfismo $\varphi^*: G/K \to G'/K'$ tal que $\varphi^* \circ q = q' \circ \varphi$, onde q e q' são, respectivamente, os homomorfismos canônicos de G em G/K e de G' em G'/K'.

Os diversos homomorfismos considerados neste teorema podem ser visualizados pelo seguinte diagrama



$K = \overline{\varphi}^1(K')$
$\varphi^* \circ q = q' \circ \varphi$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Estas propriedades já foram consideradas na secção anterior.

b) Temos $\varphi(K) \subset K'$ e K é um subgrupo normal de G, logo, em virtude do teorema anterior, o homomorfismo induzido φ^* é tal que $\varphi^* \circ q = q' \circ \varphi$; de acôrdo com a parte c) do mesmo teorema, φ^* é um epimorfismo e, em virtude de d), temos $Ker(\varphi^*) = K/K = \{1\}$, logo, φ^* é um isomorfismo. A unicidade de φ^* já foi vista na parte a) do teorema 21. ∎

Observemos, em particular, que

$$G/K \cong G'/K' = (G/N)/(K/N);$$

além disso, o isomorfismo φ^* é definido por

$$\varphi^*(xK) = \varphi(x)K',$$

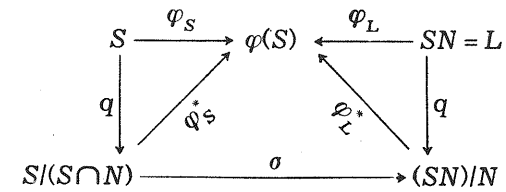
para todo $xK \in G/K$. φ^* e φ^{*-1} são denominados isomorfismos canônicos, o que nos permite dizer que os grupos quocientes G/K e G'/K' são canônicamente isomorfos.

TEOREMA 23 (*segundo teorema do isomorfismo*) - Seja N um subgrupo normal de um grupo G e seja S um subgrupo qualquer de G; temos:

a) $S \cap N$ é um subgrupo normal de S e $SN = NS$ é um subgrupo de G que contém N;

b) os grupos quocientes $S/(S \cap N)$ e $(SN)/N$ são isomorfos.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o homomorfismo canônico φ de G em $G' = G/N$ e seja φ_S a restrição de φ ao subgrupo S; é imediato que φ_S é um epimorfismo de S em $\varphi(S)$ e que $Ker(\varphi_S) = S \cap N$, de onde resulta, em particular, que $S \cap N$ é um subgrupo normal de S. De acôrdo com o corolário do teorema do homomorfismo, existe um único isomorfismo $\varphi_S^*: S/(S \cap N \to \varphi(S)$ tal que $\varphi_S^* \circ q = \varphi_S$, onde q é o homomorfismo canônico de S em $S/(S \cap N)$ (ver o diagrama abaixo). Por outro lado, temos $q(SN) = q(S)$ e $\overline{\varphi}^1(\varphi(S)) = SN$; desta última igualdade concluímos que SN é um subgrupo normal de G, que $N \subset SN$ e, finalmente, temos $SN = (SN)^{-1} = N^{-1}S^{-1} = NS$. Indiquemos por φ_L a restrição de φ a $L = SN$; é imediato que φ_L é um epimorfismo de L em $\varphi(S)$ e que $Ker(\varphi_L) = N$, logo, de acôrdo com o corolário do teorema do homomorfismo, existe um único isomorfismo $\varphi_L^*: (SN)/N \to \varphi(S)$ tal que $\varphi_L^* \circ q' = \varphi_L$, onde q' é o homomorfismo canônico de SN em $(SN)/N$ (ver o diagrama abaixo). Com estas notações, $\sigma = (\varphi_L^*)^{-1} \circ \varphi_S^*$ é um isomorfismo de $S/(S \cap N)$ em $(SN)/N$. ∎



Observemos ainda que o isomorfismo σ é definido por

$$\sigma(x(S \cap N)) = xN,$$

para todo x em S. σ e σ^{-1} são denominados isomorfismos canônicos.

DEFINIÇÃO 7 - Diz-se que um grupo G é *simples* se, e sòmente se, G só contém dois subgrupos normais distintos.

Portanto, se G é simples tem-se, necessàriamente, $G \neq \{1\}$ e os únicos subgrupos normais de G são G e $\{1\}$. Por exemplo, todo grupo finito de ordem igual a um número primo é simples; isto é uma conseqüência imediata do teorema de Lagrange (ver o exercício 27).

Seja G um grupo e indiquemos por $\mathcal{N}$ o conjunto, ordenado por inclusão, de todos os subgrupos normais de G excluído o próprio G; todo elemento maximal (caso exista) de $\mathcal{N}$ é denominado subgrupo normal maximal de G. Isto equivale a dar a seguinte

DEFINIÇÃO 8 - Seja $G \neq \{1\}$ um grupo e seja N um subgrupo normal de G; diz-se que N é um *subgrupo normal maximal* de G se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas: a) $N \neq G$; b) para todo subgrupo normal N' de G, se $N \subset N'$, então $N' = N$ ou $N' = G$.

Notemos que um grupo $G \neq \{1\}$ é simples se, e sòmente se, $\{1\}$ é um subgrupo normal maximal de G.

LEMA 5 - Todo grupo finito $G \neq \{1\}$ admite pelo menos um subgrupo normal maximal.

Basta notar que o conjunto $\mathcal{N}$, de todos os subgrupos normais próprios de G, é finito e não vazio; portanto, conforme o exemplo 22 do Capítulo VII, $\mathcal{N}$ admite pelo menos um elemento maximal. ∎

LEMA 6 - Seja N um subgrupo normal próprio de um grupo G; N é um subgrupo normal maximal de G se, e sòmente se, o grupo quociente G/N é simples.

Basta notar que, conforme a parte a) do teorema 22, todo subgrupo normal K', de G/N, é da forma K/N, onde K é um subgrupo normal de G e $N \subset K$. ∎

COROLÁRIO - Se N é um subgrupo normal próprio de um grupo finito G, então existe um subgrupo normal maximal N', de G, tal que $N \subset N'$.

Demonstraremos, a seguir, um outro teorema, que é conhecido sob o nome de *terceiro teorema do isomorfismo* ou lema de Zassenhaus e que nos será útil no §3.2 para o estudo das seqüências de composição.

LEMA DE ZASSENHAUS - Sejam A, A', B e B' quatro subgrupos de um grupo G tais que $A' \subset A$ e $B' \subset B$; se A' é normal em A e se B' é normal em B, temos:

a) $A'(A \cap B')$ é um subgrupo normal de $A'(A \cap B)$;

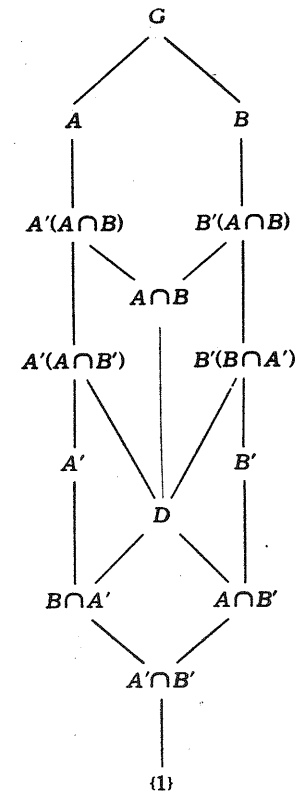
b) $B'(B \cap A')$ é um subgrupo normal de $B'(A \cap B)$;

c) os grupos quocientes

$$A'(A \cap B)/A'(A \cap B') \quad \text{e} \quad B'(A \cap B)/B'(B \cap A') \tag{4}$$

são isomorfos.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme veremos, ao desenvolver a demonstração dêste lema, as relações de inclusão entre os diversos subgrupos considerados podem ser visualizadas pelo seguinte diagrama



onde $D = (B \cap A')(A \cap B')$. Faremos a demonstração em diversas partes.

1.ª) A' é um grupo normal de A e $A \cap B$ é um subgrupo de A, logo, conforme o segundo teorema do isomorfismo,

$$A' \cap (A \cap B) = B \cap A'$$

é um subgrupo normal de $A \cap B$.

2.ª) Anàlogamente, $A \cap B'$ é um subgrupo normal de $A \cap B$.

3.ª) Como o produto de dois subgrupos normais é um subgrupo normal (exercício 46) concluímos que $(B \cap A')(A \cap B') = D$ é um subgrupo normal de $A \cap B$.

4.ª) De acôrdo com o segundo teorema do isomorfismo, $A'(A \cap B')$ é um subgrupo de $A'(A \cap B)$, pois, A' é normal em A (logo, também é normal em $A'(A \cap B)$) e $A \cap B'$ é um subgrupo de $A'(A \cap B)$. Afirmamos que $A'(A \cap B')$ é normal em $A'(A \cap B)$. Com efeito, se x é um elemento qualquer de $A'(A \cap B)$, temos

$$x \cdot A'(A \cap B) \cdot x^{-1} = xA'x^{-1} \cdot x(A \cap B')x^{-1}.$$

Mas $xA'x^{-1} = A'$, pois, $x \in A$ e A' é normal em A, logo,

$$x \cdot A'(A \cap B') \cdot x^{-1} = A' \cdot x(A \cap B')x^{-1}.$$

Por outro lado, $x = a'u$, onde $a' \in A'$ e $u \in A \cap B$, logo,

$$x \cdot (A \cap B') \cdot x^{-1} = a' \cdot u(A \cap B')u^{-1} \cdot a'^{-1};$$

mas $u(A \cap B')u^{-1} = A \cap B'$, pois, $u \in A \cap B$ e $A \cap B'$ é um subgrupo normal de $A \cap B$. Notando-se que $A'a' = a'A' = A'$ e $A'(A \cap B') = (A \cap B')A'$, teremos

$$x \cdot A(A \cap B') \cdot x^{-1} = A' \cdot a'(A \cap B')a'^{-1} = (A'a')(A \cap B')a'^{-1} =$$
$$= A'(A \cap B') \cdot a'^{-1} = (A \cap B')(A'a'^{-1}) = (A \cap B')A' = A'(A \cap B')$$

o que termina a verificação da afirmação acima.

5.ª) Afirmamos que

$$A'(A \cap B') \cap (A \cap B) = D.$$

Com efeito, a inclusão $D \subset A'(A \cap B') \cap (A \cap B)$ é imediata. Por outro lado, se x é um elemento qualquer de $A'(A \cap B') \cap (A \cap B)$, temos $x = a'u$, com $a' \in A'$ e $u \in A \cap B'$, logo, $a' = xu^{-1} \in B \cap A'$ e então

$$x = a'u \in (B \cap A')(A \cap B') = D.$$

6.ª) É fácil verificar que

$$A'(A \cap B') \cdot (A \cap B) = A'(A \cap B).$$

7.ª) De acôrdo com a parte b) do segundo teorema do isomorfismo aplicada ao grupo $A'(A \cap B)$, onde tomamos $S = A \cap B$ e $N = A'(A \cap B')$, temos

$$A'(A \cap B)/A'(A \cap B') = [A'(A \cap B') \cdot (A \cap B)]/A'(A \cap B') \cong$$
$$\cong (A \cap B)/[A'(A \cap B') \cap (A \cap B)] = (A \cap B)/D.$$

Finalmente, como as hipóteses são simétricas, temos

$$B'(A \cap B)/B'(B \cap A') \cong (A \cap B)/D;$$

portanto, os grupos quocientes (4) são, de fato, isomorfos. ∎

EXERCÍCIOS

51. Seja S um subgrupo de um grupo finito G e seja N um subgrupo normal de G; demonstrar que $(SN:N) = (S:S \cap N)$.

52. Seja S um subgrupo de um grupo G e seja N um subgrupo normal de G tal que $S \cap N = \{1\}$; demonstrar que $SN/N \cong S$.

53. Demonstrar o corolário do lema 6.

54. Demonstrar que se G é um grupo não abeliano e se G é simples, então $C(G) = \{1\}$. Sugestão: teorema 20.

55. Demonstrar que se A e B são subgrupos normais maximais de um grupo G, então $A \cap B$ é um subgrupo normal maximal de A e de B. Sugestão: Notar que AB é um subgrupo normal de G (exercício 46) e concluir que $AB = G$; utilizar, então, o segundo teorema do isomorfismo.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §1

56. Seja $(G,\cdot)$ um semi-grupo e suponhamos que para todo a em G a translação à esquerda γ_a seja uma permutação do conjunto G e que exista b em G tal que a translação à direita δ_b seja uma permutação de G; demonstrar que $(G,\cdot)$ é um grupo.

57. a) Seja $(G,\cdot)$ um grupo e consideremos a operação $*$, definida sôbre o conjunto G do seguinte modo $a*b = ab^{-1}$, onde a e b são elementos quaisquer de G. Verificar que esta operação $*$ satisfaz as seguintes condições (onde a, b e c são elementos quaisquer de G e e é o elemento unidade do grupo G):

D1: $a*a = e$;

D2: $a*e = a$;

D3: $e*(a*b) = b*a$;

D4: $(a*c)*(b*c) = a*b$.

b) Seja $*$ uma operação sôbre um conjunto G e suponhamos que: 1) a operação $*$ satisfaz o axioma D4; 2) existe e em G tal que os axiomas D1, D2 e D3 sejam verdadeiros. Nestas condições, demonstrar que a operação $\cdot$, definida por $a \cdot b = a*(e*b)$, define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto G. Sugestão: Mostrar que e é o elemento neutro para a operação $\cdot$; verificar que: 1) $(ac)*(bc) = a*c$; 2) $(a*c)(c*b) = a*b$; 3) $a*b = e \Rightarrow a = b$; 4) $a*c = b*c \Rightarrow a = b$; 5) $(ab)*b = a$. Finalmente, mostrar que a operação $\cdot$ é associativa.

58. Seja $*$ uma operação associativa definida sôbre um conjunto não vazio G e suponhamos que exista uma aplicação $f: G \to G$ tal que

$$f(a)*(ab) = b = (ba)*f(a),$$

quaisquer que sejam a e b em G. Nestas condições, demonstrar que $(G,*)$ é um grupo. Sugestão: mostrar que $a*f(a) = b*f(b)$ é o elemento neutro para a operação $*$.

59. Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto G e suponhamos que sejam válidos os seguintes axiomas:

I. existe e em G tal que $a*b = e$ se, e sòmente se, $a = b$;

II. $(a*c)*(b*c) = b$.

Nestas condições, demonstrar que a operação $\cdot$, definida pôr $a \cdot b = a*(e*b)$, define uma estrutura de grupo sôbre o conjunto G. Sugestão: exercício 57.

60. Com as notações do exercício anterior, suponhamos que a operação $*$ satisfaça o axioma

III. $a*(a*b) = a*b$.

Mostrar que se G é não vazio e se a operação $*$ satisfaz o axioma II, então G é um grupo abeliano em relação à operação $\cdot$ definida por $ab = a*(e*b)$, onde $e = a_0*a_0$ (a_0 é um elemento dado de G). Sugestão: verificar que $[a*(a*b)]*[a*(a*b)] = a*a = b*b$.

61. Com as notações do exercício 58, suponhamos que a operação $*$ satisfaça o axioma II e o seguinte

IV. $(a*c)*(a*b) = b*c$.

Mostrar que G é um grupo abeliano em relação à operação $\cdot$ definida por $ab = a*(1*b)$, onde $1 = a*a$.

62. Seja $*$ uma operação definida sôbre um conjunto não vazio G e suponhamos que o seguinte axioma esteja verificado: quaisquer que sejam a, b e c em G, tem-se

$$b = a*[(a*c)*(b*c)].$$

Mostrar que G é um grupo comutativo em relação à operação $\cdot$ definida por $ab = a*(1*b)$, onde $1 = a*a$. Sugestão: verificar o axioma III do exercício anterior; pondo-se $a' = a*a$ mostrar que $a = a*(a*c)'$, $a = a*a'$ e $b = a*[(a*b')*b]$; a seguir mostra-se que a operação $*$ satisfaz o axioma I do exercício 59.

63. Se A é uma parte não vazia de um grupo G e se n é um número inteiro, colocaremos

$$A^{(n)} = \{a^n \in G \mid a \in A\}$$

e

$$A_{(n)} = \{a \in A \mid a^n = 1\}.$$

Por exemplo, tem-se $A^{(1)} = A$ e $A^{(-1)} = A^{-1}$. Verificar as propriedades:

a) $A^{(mn)} = (A^{(m)})^{(n)}$,

b) $A_{(m)} \cap A_{(n)} = A_{(d)}$, onde $d = mdc(m,n)$.

Sugestão para a parte b): existem inteiros r e s tais que $rm + sn = d$.

64. Seja G um grupo e suponhamos que $(ab)^n = a^n b^n$, onde n é um inteiro fixo e a e b são elementos quaisquer de G.

a) Mostrar que $G^{(n)}$ e $G_{(n)}$ são subgrupos de G.

b) Se G é finito, tem-se $o(G^{(n)}) = (G:G_{(n)})$.

Sugestão: considerar a aplicação $x \mapsto x^n$ e utilizar o teorema do homomorfismo.

65. Sejam A e B dois subgrupos de um grupo G; demonstrar que para tôda classe lateral à direita $(A \cap B)x$ existem elementos y e z em G tais que $(A \cap B)x = (Ay) \cap (Bz)$. Concluir daí que se A e B têm índices finitos em G, então $A \cap B$ também tem índice finito em G.

66. Se A e B são subgrupos finitos de um grupo G, então temos

$$o(AB) = o(A)o(B)/o(A \cap B)$$

67. Com as notações do exercício 65, mostrar que se A e B têm índices finitos em G, então valem as seguintes desigualdades:

$$(G:A \cap B) \leq mmc\{(G:A),(G:B)\} \quad \text{e} \quad (G:B) \leq (A:A \cap B).$$

68. Seja $(N_i)_{1 \leq i \leq n}$ uma família de subgrupos de um grupo G e suponhamos que cada N_i tenha índice finito em G; demonstrar que $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ também tem índice finito em G.

69. Com as hipóteses do exercício 67, mostrar que se $(G:A)$ e $(G:B)$ são primos entre si, então $(G:A \cap B) = (G:A)(G:B)$.

70. Demonstrar que todo subgrupo próprio do grupo $(\mathbf{Q},+)$ tem índice infinito.

71. Se N é um subgrupo normal de um grupo G e se f é um epimorfismo de G num grupo G', então existe um epimorfismo g de G/N em G' tal que $g \circ \varphi = f$, onde φ é o homomorfismo canônico de G em G/N, se, e sòmente se, $N \subset Ker(f)$. Sugestão: teorema 15.

72. Se h é um endomorfismo de um grupo G e se $\sigma_a \circ h = h \circ \sigma_a$ para todo a em G, então o subconjunto $N = \{x \in G \mid h(h(x)) = h(x)\}$ é um subgrupo normal de G e o grupo quociente G/N é abeliano.

73. Demonstrar que se G é um grupo e se $C(G) = \{1\}$, então $C(Aut(G)) = \{1_G\}$.

74. Seja N um subgrupo normal de um grupo G, seja $G' = G/N$ o grupo quociente de G por N, seja $\mathcal{G}_0$ o conjunto, ordenado por inclusão, de todos os subgrupos de G que contêm N e seja $\mathcal{G}'$ o conjunto, ordenado por inclusão, de todos os subgrupos de G'. Indiquemos por φ o homomorfismo canônico de G em G', por f a extensão de q ao conjunto $\mathcal{G}_0$ (isto é, $f(H) = q(H)$ para todo H em $\mathcal{G}_0$) e por g a restrição de $\bar{\varphi}^1$ ao subconjunto $\mathcal{G}'$ (isto é, $g(K') = \bar{\varphi}^1(K') = \{x \in G \mid \varphi(x) \in K\}$ para todo K' em $\mathcal{G}'$). Verificar as seguintes propriedades:

a) f é um isomorfismo ordenado do monóide $(\mathcal{G}_0, \cap, \subset)$ no monóide $(\mathcal{G}', \cap, \subset)$ e g é o seu isomorfismo recíproco.

b) $f(H) = H/N$ para todo H em $\mathcal{G}_0$.

c) Se $K = g(K')$, com $K' \in \mathcal{G}'$, então $f(K) = K' = K/N$.

d) Se $H \in \mathcal{G}_0$ e se H é normal em G, então $f(H)$ é normal em G'.

75. Demonstrar que a reunião de uma cadeia crescente de subgrupos simples de um grupo G é um subgrupo simples de G.

§2 - GRUPOS CÍCLICOS E GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

2.1 GRUPOS CÍCLICOS

DEFINIÇÃO 9 - Diz-se que um grupo G é *cíclico* se, e sòmente se, existe a em G tal que $G = [a]$. Todo elemento a que satisfaz esta condição é denominado *gerador* do grupo cíclico G.

Se $G=[a]$ é um grupo cíclico multiplicativo, então o teorema 6 nos mostra que

$$G=\{a^n \mid n\in\mathbf{Z}\},$$

isto é, todo elemento de G é uma potência, com expoente inteiro, do gerador a. Notemos ainda que todo grupo cíclico é, necessàriamente, um grupo abeliano.

TEOREMA 24 - Se f é um epimorfismo de um grupo G num grupo G' e se G é cíclico, então G' também é cíclico.

Basta notar que se a é um gerador de G, então $f(a)$ é um gerador de G'. ∎

COROLÁRIO - Todo grupo quociente de um grupo cíclico também é cíclico.

EXEMPLO 31 - O grupo aditivo $\mathbf{Z}$ dos números inteiros é cíclico, pois, $\mathbf{Z}=[1]$.

EXEMPLO 32 - Conforme o corolário acima e o exemplo anterior, para todo número inteiro $n>0$, o grupo aditivo $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$ dos inteiros módulo n é cíclico.

Êstes dois exemplos incluem, a menos de um isomorfismo, todos os grupos cíclicos (ver o teorema 25); para demonstrar êste resultado introduziremos a noção de ordem de um elemento pela seguinte

DEFINIÇÃO 10 - Seja G um grupo e seja a um elemento do conjunto G; diz-se que *a tem ordem finita* se, e sòmente se, o subgrupo cíclico $[a]$ é finito e, neste caso, a ordem dêste subgrupo será denominada *ordem do elemento a* e será indicada por $o(a)$, logo, $o(a)=o([a])$. Caso contrário, diz-se que *a tem ordem infinita* ou que *a ordem de a é infinita.*

EXEMPLO 33 - Se a é um elemento de um grupo G, então temos $o(a)=1$ se, e sòmente se, a é o elemento unidade de G.

EXEMPLO 34 - Todo elemento de um grupo finito tem ordem finita.

TEOREMA 25 - Seja a um elemento de um grupo multiplicativo G e consideremos a aplicação $f:\mathbf{Z}\to G$ definida por $f(n)=a^n$. Valem as seguintes propriedades:

a) O elemento a tem ordem infinita se, e sòmente se, f é injetora; neste caso, f é um isomorfismo de $(\mathbf{Z},+)$ em $[a]$.

b) Se a tem ordem finita m, então f é um epimorfismo de $(\mathbf{Z},+)$ em $[a]$ e $Ker(f)=\mathbf{Z}m$; além disso, o grupo aditivo $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m$ é isomorfo ao subgrupo $[a]$ e m é o menor inteiro estritamente positivo tal que $a^m=1$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Já sabemos que f é um homomorfismo de $(\mathbf{Z},+)$ em G (exemplo 23) e o teorema 6 nos mostra que f é um epimorfismo de $(\mathbf{Z},+)$ em $[a]$; além disso, temos $Ker(f)=\mathbf{Z}m$, onde $m\geq 0$ (teorema 7), portanto, em virtude do corolário do teorema do homomorfismo, temos $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m\cong[a]$. Observando-se que o grupo quociente $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m$ é infinito se, e sòmente se, $m=0$ concluímos, imediatamente, que a tem ordem infinita se, e sòmente se, f é injetora e é evidente, neste caso, que $\mathbf{Z}\cong[a]$, o que termina a verificação da parte a).

b) As primeiras afirmações desta parte já foram demonstradas acima; finalmente, é imediato que m é o menor inteiro estritamente positivo tal que $a^m=1$, pois, conforme a demonstração do teorema 7, m é o menor inteiro estritamente positivo tal que $m\in Ker(f)$. ∎

No caso particular em que $G=[a]$ o teorema 25 nos mostra que $\mathbf{Z}\cong G$ se, e sòmente se, o grupo cíclico G é infinito e $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}m\cong G$ se, e sòmente se, o grupo cíclico G é finito e de ordem m; ficam assim determinados, a menos de um isomorfismo, todos os grupos cíclicos.

COROLÁRIO 1 - Se a é um elemento de um grupo G e se a tem ordem finita m, então $a^n=1$ se, e sòmente se, $m|n$.

Basta notar que a condição $a^n=1$ é equivalente a $n\in Ker(f)=\mathbf{Z}m$. ∎

COROLÁRIO 2 - Se G é um grupo finito de ordem n, então todo elemento a de G tem ordem finita e $o(a)|n$; em particular, temos $x^n=1$ para todo elemento x de G.

Com efeito, é evidente que a tem ordem finita e o teorema de Lagrange nos mostra que $o(a)=o([a])$ é um divisor de n; finalmente, a última afirmação é uma conseqüência imediata do corolário anterior. ∎

COROLÁRIO 3 - Se $G=[a]$ é um grupo finito de ordem n, então

$$G=\{1,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}.$$

COROLÁRIO 4 - Todo grupo finito G cuja ordem é um número primo p é um grupo cíclico; além disso, todo elemento a de G tal que $a\neq 1$ é um gerador de G.

Com efeito, se $a\in G$ e se $a\neq 1$, temos $o(a)>1$ e $o(a)|p$, logo, $o(a)=p$ e então $[a]=G$. ∎

LEMA 7 - Seja $G=[a]$ um grupo cíclico de ordem finita n e seja a^r, com $0\leqslant r<n$, um elemento de G; nestas condições, temos $o(a^r)=n/mdc(r,n)$.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos supor que $r>0$ e, neste caso, ponhamos $d=mdc(r,n)$, $r=r_1d$ e $n=n_1d$. Notando-se que $(a^r)^{n_1}=1$, com $n_1>0$, concluímos que $s=o(a^r)\leqslant n_1$; por outro lado, temos $a^{rs}=1$, logo, $n|rs$, de onde vem, $n_1|(r_1s)$ e como n_1 e r_1 são primos entre si resulta que $n_1|s$ e então $n_1\leqslant s$. ∎

TEOREMA 26 - Seja G um grupo cíclico e seja a um gerador de G; valem as seguintes propriedades:

a) se G é infinito, então a e a^{-1} são os únicos geradores de G;

b) se G é finito de ordem n, então um elemento a^r, com $0\leqslant r\leqslant n$, é um gerador de G se, e sòmente se, r e n são primos entre si.

DEMONSTRAÇÃO

a) É imediato que a^{-1} é um gerador de G, pois, $a^n=(a^{-1})^{-n}$ para todo inteiro n. Por outro lado, se b é um gerador de G, temos $b=a^s$ e $a=b^t$, onde s e t são inteiros não nulos, logo, $a=b^t=(a^s)^t=a^{st}$, de onde vem, $st=1$ e então $s=1$ ou $s=-1$.

b) Conforme o lema 7, temos $o(a^r)=n$ se, e sòmente se, $mdc(r,n)=1$. ∎

O número de geradores de um grupo cíclico de ordem finita n é indicado pela notação $\Phi(n)$, logo, $\Phi(n)$ também indica o número de números naturais $r<n$ que são primos com n; a aplicação $\Phi: \boldsymbol{N}^*\longrightarrow \boldsymbol{N}$ é denominada *indicador de Euler*. Nos exercícios 78 e 171-2 daremos uma fórmula para calcular $\Phi(n)$ a partir da decomposição de n em fatôres primos.

Determinaremos, a seguir, todos os subgrupos de um grupo cíclico:

TEOREMA 27 - Seja G um grupo cíclico e seja a um gerador de G; valem as seguintes propriedades:

a) Todo subgrupo H, de G, é cíclico; se $H\neq\{1\}$, então o grupo quociente G/H é finito e $H=[a^d]$, onde $d=(G:H)$;

b) se G é infinito, então todo subgrupo $H\neq\{1\}$, de G, é infinito;

c) se G é finito de ordem n, então, para todo divisor positivo m de n, existe um único subgrupo H de G de ordem m e temos $H=[a^{n/m}]$; portanto, o número de subgrupos de G é igual ao número de divisores positivos de n.

DEMONSTRAÇÃO

a) Se $H=\{1\}$ nada temos a demonstrar; suponhamos, então que $H\neq\{1\}$ e consideremos o grupo quociente G/H. De acôrdo com o teorema 24, a classe lateral aH é um gerador de G/H e como existe um inteiro $t>0$ tal que $a^t\in H$ concluímos que aH tem ordem finita, logo, G/H é um grupo finito. Pondo-se $(G:H)=d$ resulta que d é o menor inteiro estritamente positivo tal que $(aH)^d=a^dH=H$, logo, d é o menor inteiro estritamente positivo tal que $a^d\in H$ e é fácil verificar que $H=[a^d]$.

b) Conforme a parte anterior, temos $H=[a^d]$, com $d>0$ e é imediato que a^d tem ordem infinita, logo, H é infinito.

c) Em virtude do lema 7 o elemento $a^{n/m}$ tem ordem $n/mdc(n,n/m)=n/(n/m)=m$, logo, o subgrupo $H=[a^{n/m}]$ tem ordem m. Seja H_1 um subgrupo de G e suponhamos que $o(H_1)=m$, logo, $m|n$ e podemos supor que $m>1$; conforme a parte a), temos $H_1=[a^d]$, onde $d=(G:H_1)$, logo, $d|n$. Finalmente, de acôrdo com o lema 7, temos $m=o(a^d)=n/mdc(n,d)=n/d$, de onde vem, $d=n/m$ e então $H_1=H$. ∎

COROLÁRIO - Um grupo abeliano $G\neq\{1\}$ é simples se, e sòmente se, G é finito de ordem prima.

DEMONSTRAÇÃO - Se a ordem de G é um número primo, então, de acôrdo com o teorema de Lagrange, os únicos subgrupos de G são G e $\{1\}$, logo, G é simples. Recìprocamente, se G é abeliano e simples, então para todo $a\in G$, $a\neq 1$, tem-se $G=[a]$ e o teorema acima nos mostra que o conjunto G é finito e $o(G)$ é um número primo. ∎

EXEMPLO 35 - Já foram definidos dois grupos de ordem 4: o grupo aditivo $\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{Z}\cdot 4$ dos inteiros módulo 4 e o grupo produto $(\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{Z}\cdot 2)\times(\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{Z}\cdot 2)$ (ver o exemplo 9) do grupo aditivo dos inteiros módulo 2 por si mesmo. Notemos que êstes grupos não são isomorfos, pois, o primeiro tem um elemento de ordem 4 e o segundo não satisfaz esta condição. Vamos demonstrar neste exemplo, que êstes são, a menos de um isomorfismo, os únicos grupos de ordem 4. Consideremos, então, um grupo $(G,\cdot)$, de ordem 4, e indiquemos por e seu elemento unidade; conforme o corolário 2 do teorema 25, para todo elemento x de G, $x\neq e$, temos $o(x)|4$, logo, x tem ordem 4 ou 2. Distinguiremos, então, os seguintes casos: 1.º) existe em G um elemento de ordem 4; 2.º) para todo $x\neq e$, tem-se $o(x)=2$.

1.º) Neste caso $G=[a]$ é um grupo cíclico de ordem 4 e temos $G \cong \mathbf{Z}/\mathbf{Z}\cdot 4$ (teorema 25) e pode-se construir, fàcilmente, a tábua dêste grupo.

2.º) Sejam a e b dois elementos de G tais que $a \neq e$, $b \neq e$ e $a \neq b$; temos $a = a^{-1}$ e $b = b^{-1}$, logo, $ab \neq e$, pois, $a \neq b$. Por outro lado, notemos que $ab \neq a$ (pois, $b \neq e$) e $ab \neq b$ (pois, $a \neq e$), logo, ab é o quarto elemento do grupo G. Finalmente, de $(ba)^2 = e$ resulta $ba = (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} = ab$. Com êstes dados podemos construir a tábua do grupo $(G,\cdot)$ e teremos

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

É fácil verificar que êste grupo é isomorfo ao grupo produto do grupo aditivo dos inteiros módulo 2 por si mesmo. O grupo construído acima é denominado *grupo de Klein* e será indicado por V_4.

EXEMPLO 36 - Já foram definidos dois grupos de ordem 6: o grupo aditivo dos inteiros módulo 6 e o grupo simétrico S_3 do intervalo [1,3] (ver o exemplo 8 ou o exemplo 34 do Capítulo II). Notemos que êstes grupos não são isomorfos, pois, o primeiro é abeliano e o segundo não o é. Vamos demonstrar neste exemplo que êstes grupos são, a menos de um isomorfismo, os únicos grupos de ordem 6. Consideremos, então, um grupo $(G,\cdot)$ de ordem 6 e indiquemos por e seu elemento unidade; conforme o corolário 2 do teorema 25, para todo elemento x de G, com $x \neq e$, temos $o(x) \mid 6$, logo, x tem ordem 6, 3 ou 2. Distinguiremos, então, os seguintes casos: 1.º) existe em G um elemento a de ordem 6; 2.º) para todo $x \in G-\{e\}$ temos $o(x)<6$ (logo, $o(x)=2$ ou $o(x)=3$). 1.º) Neste caso $G=[a]$ é um grupo cíclico de ordem 6 e temos $G \cong \mathbf{Z}/\mathbf{Z}\cdot 6$ (teorema 25) e pode-se construir, fàcilmente, a tábua dêste grupo. 2.º) Afirmamos que existe em G um elemento de ordem 3. Com efeito, suponhamos que $o(x)=2$ para todo $x \in G-\{e\}$ e consideremos dois elementos distintos a e b de $G-\{e\}$; procedendo-se como no exemplo anterior resulta que $\{e,a,b,ab\}$ é um subgrupo de G de ordem 4, contra o teorema de Lagrange. Portanto, existe a em G tal que $o(a)=3$ e $[a]=\{e,a,a^2\}$ é um subgrupo, de ordem 3, do grupo G. Consideremos agora um elemento b de G tal que $b \notin [a]$; as classes laterais $[a]$ e $[a]b$ são disjuntas e cada uma delas tem três elementos, logo,

$$G=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}.$$

Notemos que $b^2 \neq ab$ (pois, $b \neq a$) e $b^2 \neq a^2b$ (pois, $b \notin [a]$); por outro lado, se $b^2=a$ ou $b^2=a^2$ teríamos $[a] \subset [b]$ (pois, tanto a como a^2 são geradores do subgrupo $[a]$) e então $o(b) \geq 4$, logo, $o(b)=6$ o que está em contradição com a hipótese feita neste segundo caso. Portanto, $b^2=e$. Finalmente, determinaremos o produto ba. Notemos que $ba \neq e$, $ba \neq a$ e $ba \neq a^2$, pois, $b \notin [a]$; se $ba=ab$, teríamos $(ab)^2=a^2b^2=a^2$ e daqui viria, como na discussão anterior, que $o(ab)=6$, contra a hipótese. Portanto, $ba=a^2b$. Com êstes dados podemos construir a tábua do grupo $(G,\cdot)$ e teremos

	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	ab	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

É fácil verificar que o grupo construído acima é isomorfo ao grupo simétrico S_3 (comparar com a tábua do exemplo 24, Capítulo II).

EXERCÍCIOS

76. Determinar todos os subgrupos do grupo U_{12} das raízes complexas, de ordem 12, da unidade.

77. Demonstrar que se H é um subgrupo de um grupo cíclico G, então, para todo $f \in End(G)$, tem-se $f(H) \subset H$. (Por causa disso, diz-se que todo subgrupo de um grupo cíclico é completamente invariante).

78. Demonstrar que o número de geradores de um grupo cíclico de ordem p^m, onde p é um número natural primo e $m \geq 1$, é igual a $p^{m-1}(p-1)$, isto é, demonstrar que $\varphi(p^m)=p^{m-1}(p-1)$.

79. Seja G um grupo e sejam a e b dois elementos quaisquer de G. Verificar as seguintes propriedades:

a) se a tem ordem finita, então $o(a)=o(a^{-1})=o(bab^{-1})$;

b) se a e b têm ordens finitas, então $o(ab) = o(ba)$;

c) se a e b têm ordens finitas e se a e b são permutáveis, então $o(ab) \leq mmc(o(a), o(b))$;

d) se existe um único elemento x de G tal que $o(x) = 2$, então $x \in C(G)$.

80. Demonstrar que se os únicos subgrupos de um grupo $G \neq \{1\}$ são $\{1\}$ e G, então G é um grupo cíclico de ordem prima. (Ver o exercício 29).

81. Seja p um número natural primo e seja a um inteiro tal que $p \nmid a$; demonstrar que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{2}$ (teorema de Fermat). Sugestão: corolário 2 do teorema 25 aplicado ao grupo dos elementos inversíveis do corpo $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}p$. (Ver também o §2.3 do Capítulo VI).

82. Seja $n \geq 1$ um número natural e seja a um inteiro tal que $mdc(a, n) = 1$; demonstrar que $a^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ (teorema de Euler). Sugestão: corolário 2 do teorema 25 aplicado ao grupo dos elementos inversíveis do anel $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$.

83. Para cada número natural $n \geq 1$ indiquemos por H_n o subgrupo de $(\mathbf{Q}, +)$ gerado por $1/n!$; demonstrar que (H_n) é uma cadeia estritamente crescente e que sua reunião é $\mathbf{Q}$.

84. Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem $n > 1$. Verificar as seguintes propriedades:

a) Se σ é um endomorfismo de G, então existe um único número natural s, com $0 \leq s < n$, tal que $\sigma(a) = a^s$.

b) Se $\sigma \in End(G)$ e se $\sigma(a) = a^s$, com $0 \leq s < n$, então σ é um automorfismo de G se, e sòmente se, s e n são primos entre si.

c) A aplicação $\sigma \mapsto \bar{s}$, onde $\bar{s}$ indica a classe de restos módulo n, é um isomorfismo de $Aut(G)$ no grupo dos elementos inversíveis do anel $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$; portanto, $Aut(G)$ é abeliano e $o(Aut(G)) = \Phi(n)$.

2.2 - GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

Seja E um conjunto não vazio e consideremos o grupo simétrico $(S(E), \circ)$ do conjunto E (ver o exemplo 8); todo subgrupo de $S(E)$ é denominado *grupo de permutações sôbre* E. Já sabemos que se E é finito e tem n elementos, então a ordem de $S(E)$ é $n!$.

Se $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e se $\sigma \in S(E)$ também usaremos a notação

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \cdots & \sigma(x_n) \end{pmatrix} \tag{5}$$

para indicar a permutação σ (é a mesma notação que foi introduzida no exemplo 34 do Capítulo II) e qualquer outro símbolo obtido dêste por meio de uma permutação de suas colunas ainda indicará a mesma permutação σ. Por exemplo

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdots x_n \\ x_1 & x_2 \cdots x_n \end{pmatrix}$$

indica a permutação idêntica do conjunto E, ou seja, é o elemento unidade e do grupo simétrico $S(E)$; a permutação inversa σ^{-1}, de σ, pode ser indicada por

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(x_1) & \sigma(x_2) \cdots \sigma(x_n) \\ x_1 & x_2 \cdots x_n \end{pmatrix}.$$

Sejam E e F dois conjuntos não vazios e suponhamos que exista uma bijeção f de E em F; é fácil verificar que a aplicação

$$\varphi_f : S(E) \to S(F),$$

definida por

$$\varphi_f(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1},$$

é um isomorfismo de $(S(E), \circ)$ em $(S(F), \circ)$. Pondo-se $\varphi_f(\sigma) = \tau$, temos $f \circ \sigma = \tau \circ f$, logo, $f(\sigma(x)) = \tau(f(x))$ para todo x em E e esta igualdade nos mostra que σ transforma os elementos de E do mesmo modo que τ transforma as imagens dêstes elementos por meio de f. Por causa disso daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 11 - Seja G um grupo de permutações sôbre um conjunto não vazio E e seja H um grupo de permutações sôbre um conjunto não vazio F; diz-se que G é *P-isomorfo* a H (P: para significar permutação) se, e sòmente se, existe uma bijeção $f : E \to F$ tal que φ_f seja um isomorfismo de G em H.

É fácil verificar que a relação «G é P-isomorfo a H» é reflexiva, simétrica e transitiva e então poderemos dizer, simplesmente, que G e H são P-isomorfos. Notemos, que se G e H são P-isomorfos, então G e H são, necessàriamente, isomorfos; no entanto, não é verdadeira, em geral, a recíproca dêste resultado (ver o exemplo 40). No caso particular em que $E = F$ a bijeção f também é um elemento de $S(E)$ e φ_f é o automorfismo interno de $S(E)$ determinado por f; portanto, se G e H são dois grupos de permutações sôbre E, então G e H são P-isomorfos se, e sòmente se, G e H são subgrupos conjugados de $S(E)$ (ver a parte final do §1.4 ou o exemplo 53).

No que se segue estudaremos o grupo simétrico $S(E)$ do intervalo inteiro $E = [1.n]$ $(n \geq 1)$ e colocaremos $S(E) = S_n$.

Para todo elemento σ de S_n, o conjunto

$$M(\sigma) = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}$$

é denominado *suporte* da permutação σ. Diremos que duas permutações σ e τ são *disjuntas* se, e sòmente se, seus supor-

tes são disjuntos; por exemplo, a permutação idêntica e é disjunta de qualquer outra permutação $\sigma \in S_n$. É imediato que σ e τ são disjuntas se, e sòmente se, não existe x em E tal que $\sigma(x) \neq x$ e $\tau(x) \neq x$.

LEMA 8 - Sejam σ e τ duas permutações disjuntas do intervalo inteiro $E = [1,n]$; valem as seguintes propriedades:

a) σ e τ são permutáveis;

b) $o(\sigma\tau) = mmc(o(\sigma), o(\tau))$.

DEMONSTRAÇÃO

a) Seja x um elemento qualquer de E; podemos ter três casos: 1) $x \in M(\sigma)$; 2) $x \in M(\tau)$; 3) $x \notin M(\sigma) \cup M(\tau)$.

1) Temos $x \notin M(\tau)$, logo, $\tau(x) = x$; por outro lado, de $\sigma(x) \neq x$ vem $\sigma(\sigma(x)) \neq \sigma(x)$, ou seja, $\sigma(x) \in M(\sigma)$, de onde vem, $\tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Portanto, $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(x) = \tau(\sigma(x)) = (\tau\sigma)(x)$.

2) Temos $x \notin M(\sigma)$, logo, $\sigma(x) = x$; por outro lado, de $\tau(x) \neq x$ vem $\tau(\tau(x)) \neq \tau(x)$, ou seja, $\tau(x) \in M(\tau)$, de onde vem, $\sigma(\tau(x)) = \tau(x)$. Portanto, $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \tau(x) = \tau(\sigma(x)) = (\tau\sigma)(x)$.

3) Temos $\sigma(x) = x = \tau(x)$, logo,

$$(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(x) = x = \tau(x) = \tau(\sigma(x)) = (\tau\sigma)(x).$$

Fica assim demonstrado que $(\sigma\tau)(x) = (\tau\sigma)(x)$ para todo x em E, logo, σ e τ são permutáveis.

b) Ponhamos $o(\sigma) = r$, $o(\tau) = s$, $t = o(\sigma\tau)$ e $m = mmc(r,s)$.

De $r|m$ e $s|m$ e de acôrdo com a parte a), vem $(\sigma\tau)^m = e$, logo, $t|m$. Notemos agora que $(\sigma\tau)^t = e$ e consideremos um elemento qualquer x de E. Se $x \in M(\sigma)$, temos $\tau(x) = x$, logo, $\tau^t(x) = x$ e então

$$x = e(x) = (\sigma\tau)^t(x) = (\sigma^t\tau^t)(x) = \sigma^t(\tau^t(x)) = \sigma^t(x)$$

e se $x \notin M(\sigma)$, temos $\sigma(x) = x$, logo, $\sigma^t(x) = x$; portanto, $\sigma^t = e$ e daqui concluímos que $r|t$. Anàlogamente, demonstra-se que $\tau^t = e$, logo, $s|t$. De $r|t$ e $s|t$ resulta $m|t$ e então $t = m$. ∎

COROLÁRIO - Se $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ são permutações disjuntas duas a duas, então temos

$$o(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r) = mmc(o(\sigma_1), o(\sigma_2), \cdots, (\sigma_r)).$$

Faz-se a demonstração por indução finita sôbre o número natural r utilizando-se o lema 8. ∎

Seja $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ uma família de elementos do intervalo inteiro $[1,n]$ e suponhamos que $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$, logo, $r \leq n$. A permutação $\sigma \in S_n$ definida por

$$\sigma(a_i) = a_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 1,2,\cdots,r-1$$

$$\sigma(a_r) = a_1$$

e

$$\sigma(x) = x \text{ para todo } x \neq a_i \ (i = 1,2,\cdots,r),$$

é denominada *ciclo determinado pela família* $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ e será indicada por

$$(a_1\ a_2\cdots a_r);$$

se $r = n$ diremos que $(a_1\ a_2\cdots a_r)$ é uma *permutação circular*. O número r é denominado *comprimento* do ciclo $\sigma = (a_1\ a_2\cdots a_r)$ e também diremos que σ é um r-ciclo. Todo ciclo de comprimento 2 é chamado *transposição* e notemos que todo ciclo de comprimento 1 é o elemento unidade e de S_n. Faremos a seguinte convenção: se $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_r)$ é um r-ciclo, então os símbolos

$$(a_2\ a_3\cdots a_r\ a_1),\ (a_3\cdots a_r\ a_1\ a_2),\cdots,(a_r\ a_1\cdots a_{r-1})$$

também indicam a permutação σ.

EXEMPLO 37 - Em S_2 só temos um ciclo de comprimento 1 e uma única transposição:

$$e = (1) = (2) \quad \text{e} \quad (1\ 2).$$

EXEMPLO 38 - Em S_3 temos os seguintes elementos:

a) um único ciclo de comprimento 1: $e = (1) = (2) = (3)$;

b) três transposições: (1 2), (1 3) e (2 3);

c) dois ciclos de comprimentos 3: (1 2 3) e (1 3 2).

EXEMPLO 39 - Em S_4 temos os seguintes elementos:

a) um único ciclo de comprimento 1: $e = (1) = (2) = (3) = (4)$;

b) seis transposições: (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4) e (3 4);

c) oito ciclos de comprimentos 3: (1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 3 4) e (2 4 3);

d) seis ciclos de comprimento 4: (1 2 3 4), (1 2 4 3), (1 3 2 4), (1 3 4 2), (1 4 2 3) e (1 4 3 2).

Temos ao todo 21 ciclos; faltam na lista acima as permutações

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)$

que, evidentemente, não são ciclos.

LEMA 9 - Se $\sigma = (a_1\ a_2\cdots a_r) \in S_n$ é um ciclo de comprimento r, então $o(\sigma) = r$.

DEMONSTRAÇÃO - É fácil verificar que $\sigma^{i-1}(a_1) = a_i$ para $i = 1,2,\cdots,r$ e $\sigma^r(a_1) = a_1$: daqui resulta, em particular, que se $1 \leq i < r$, então $\sigma^i \neq e$, de onde vem, $r \leq o(\sigma)$. Por outro lado, te-

mos para todo índice $i \in [1,r]$:

$$\sigma^r(a_i) = \sigma^r(\sigma^{i-1}(a_1)) = \sigma^{i-1}(\sigma^r(a_1)) = \sigma^{i-1}(a_1) = a_i$$

e como $\sigma^r(x) = x$ para todo $x \notin M(\mathrm{d})$, concluímos que $\mathrm{d}^r = e$, logo, $o(\sigma) \leqslant r$ e então $o(\sigma) = r$. ∎

LEMA 10 - Se $\sigma = (a_1\, a_2 \cdots a_r)$ é um r-ciclo de S_n e se τ é um elemento qualquer de S_n, então vale a seguinte fórmula

$$\tau(a_1\, a_2 \cdots a_r)\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2) \cdots \tau(a_r)) \qquad (6).$$

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $\lambda = \tau\sigma\tau^{-1}$, $\lambda' = (\tau(a_1)\,\tau(a_2) \cdots \tau(a_r))$ e seja x um elemento qualquer do intervalo inteiro $[1,n]$. Se $x \notin M(\lambda')$ temos $\lambda'(x) = x$ e $x \neq \tau(a_i)$ para todo $i \in [1,r]$, de onde vem, $\tau^{-1}(x) \neq a_i$ e então $\tau^{-1}(x) \notin M(\sigma)$, logo,

$$\lambda(x) = (\tau\sigma\tau^{-1})(x) = \tau(\sigma(\tau^{-1}(x))) = \tau(\tau^{-1}(x)) = x = \lambda'(x).$$

Suponhamos, então, que $x \in M(\lambda')$, logo, $x = \tau(a_i)$, com $1 \leqslant i \leqslant r$; se $i < r$, temos

$$\lambda(x) = (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(a_i)) = \tau(\sigma(a_i)) = \tau(a_{i+1}) = \lambda'(\tau(a_i)) = \lambda'(x)$$

e se $i = r$, temos

$$\lambda(x) = (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(a_r)) = \tau(\sigma(a_r)) = \tau(a_1) = \lambda'(\tau(a_r)) = \lambda'(x).$$

Em resumo, temos $\lambda'(x) = \lambda(x)$ para todo $x \in [1,n]$, de onde vem, $\lambda' = \lambda$. ∎

EXEMPLO 40 - Consideremos os subconjuntos

$$G = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$

e

$$H = \{e, (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}$$

de S_4; é fácil verificar que G e H são subgrupos de S_4 e notemos que êstes grupos são isomorfos ao grupo de Klein V_4, logo, $G \cong H$. No entanto, G e H não são P-isomorfos, pois, no caso contrário, conforme a fórmula (6), deveria existir uma transposição em G.

Seja G um subgrupo do grupo simétrico S_n e consideremos a relação G, definida sôbre $E = [1,n]$, do seguinte modo: se x e y são dois elementos quaisquer de E, então xGy se, e sòmente se, existe $\sigma \in G$ tal que $y = \sigma(x)$. Levando-se em conta que G é um grupo, é fácil verificar que G é uma relação de equivalência sôbre E; para todo x em E indicaremos por $E_G(x)$ a classe de equivalência, módulo G, determinada por x, logo,

$$E_G(x) = \{\sigma(x) \in E \mid \sigma \in G\}$$

e diremos que $E_G(x)$ é a *G-órbita* do elemento x. O conjunto quociente E/G é, então, o conjunto de tôdas as G-órbitas e já sabemos que E/G é uma partição de E (ver o teorema 12, Capítulo I).

OBSERVAÇÃO - As noções introduzidas acima serão generalizadas no §3.1 pelo conceito geral de grupo que opera sôbre um conjunto (ver a definição 12).

O caso que vai nos interessar é aquêle em que $G = [\sigma]$, com σ em S_n: uma G-órbita $E_G(x)$ é, então, denominada σ-órbita e será indicada por $E_\sigma(x)$. Notemos que se $o(\sigma) = r$, então

$$E_\sigma(x) = \{1, \sigma(x), \sigma^2(x), \cdots, \sigma^{r-1}(x)\},$$

logo, $o(E_\sigma(x)) \leqslant r$. Daqui resulta, imediatamente, que σ induz uma permutação circular sôbre $E_\sigma(x)$, logo, usando-se uma notação conveniente para os elementos de $E_\sigma(x)$ podemos representar a restrição de σ a $E_\sigma(x)$ por $(a_1\, a_2 \cdots a_s)$, onde $s = o(E_\sigma(x))$; notemos, explìcitamente, que êste elemento pertence ao grupo simétrico $S(E_\sigma(x))$ que, em geral é distinto de S_n.

EXEMPLO 41 - Consideremos o grupo simétrico S_3; para $\sigma = (1\,2)$ temos $E_\sigma(1) = E_\sigma(2) = \{1,2\}$ e $E_\sigma(3) = \{3\}$ e para $\sigma = (1\,2\,3)$ temos $E_\sigma(1) = E_\sigma(2) = E_\sigma(3) = \{1,2,3\}$.

EXEMPLO 42 - Se $\sigma = (a_1\, a_2 \cdots a_r)$ é um r-ciclo de S_n, temos $E_\sigma(a_i) = M(\sigma) = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ para $i = 1,2,\cdots,r$ e $E_\sigma(x) = x$ para todo $x \neq a$.

Seja σ uma permutação qualquer de $E = [1,n]$ e ponhamos

$$E/[\sigma] = \{F_1, F_2, \cdots, F_s\},$$

onde $s = o(E/[\sigma])$, logo, $F_1, F_2, \cdots, F_s$ são as σ-órbitas determinadas por todos os elementos de E. Conforme vimos acima a restrição σ_i' de σ a F_i é uma permutação circular de F_i; consideremos, então, a aplicação $\sigma_i : E \to E$ definida por

$$\sigma_i(x) = \sigma_i'(x) \text{ para todo } x \in F_i$$

e

$$\sigma_i(x) = x \text{ para todo } x \in E - F_i.$$

Notemos que σ_i é uma permutação de E, ou de modo mais preciso, σ_i é um ciclo de comprimento $o(F_i)$ e, além disso, os ciclos $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s$ são disjuntos dois a dois. Afirmamos que $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s$. Com efeito, se x é um elemento qualquer de E, então existe um único índice i, com $1 \leqslant i \leqslant s$, tal que $x \in F_i$ e temos $\sigma(x) = \sigma_i'(x) = \sigma_i(x)$. Por outro lado, notando-se que $\sigma_j(x) = x$ para todo $j \neq i$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ e que $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s$ são permutáveis dois a dois (lema 8), teremos

$$(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s)(x) = \sigma_i(x) = \sigma(x);$$

em resumo, temos $\sigma(x) = (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s)(x)$ para todo x em E, logo, $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s$. Observemos que se $\sigma \neq e$, então existem, necessàriamente, na decomposição $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s$, ciclos de comprimen-

to >1 e é evidente que podemos omitir neste produto todos os ciclos de comprimento 1, logo, σ é um produto de ciclos disjuntos dois a dois e de comprimentos estritamente maiores do que 1. Demonstrámos acima o seguinte

TEOREMA 28 - Todo elemento $\sigma \neq e$ do grupo simétrico S_n pode ser representado como um produto de ciclos disjuntos dois a dois e de comprimento estritamente maiores do que 1.

Suponhamos que $n>1$ e seja $(a_1\, a_2 \cdots a_r)$ um ciclo de comprimento $r>1$; notando-se que

$$(a_1\, a_2 \cdots a_r) = (a_1\, a_r)(a_1\, a_{r-1}) \cdots (a_1\, a_3)(a_1\, a_2) \qquad (7)$$

temos o seguinte

COROLÁRIO 1 - Tôda permutação pertencente a S_n $(n>1)$ é igual a um produto de transposições, ou seja, o conjunto de tôdas as transposições do intervalo inteiro $[1,n]$ é um sistema de geradores de S_n.

Êste resultado também pode ser demonstrado, diretamente, por indução finita sôbre o número de elementos do suporte $M(\sigma)$ de σ:

Se $o(M(\sigma))=0$, então $\sigma = e$ e temos, por exemplo, $\sigma = e = (1\,2)(1\,2)$. Suponhamos que $o(M(\sigma)) = r > 0$ e que a propriedade acima seja verdadeira para tôda permutação $\lambda \in S_n$ tal que $o(M(\lambda)) < r$. Ora, existe um elemento a em $M(\sigma)$ e temos $b = \sigma(a) \neq a$, logo, podemos considerar a transposição $\tau = (a,b)$; vamos, então determinar o suporte de $\lambda = \sigma\tau$. Se $x \in E - M(\tau)$, temos $x \neq a$, $x \neq b$ e $\sigma(x) = x$, logo, $\lambda(x) = x$, de onde concluimos que $M(\lambda) \subset M(\sigma)$; por outro lado, temos $\lambda(b) = (\sigma\tau)(b) = \sigma(\tau(b)) = \sigma(a) \neq b$, logo, $b \notin M(\lambda)$ e então $M(\lambda) \neq M(\sigma)$, de onde vem, $o(M(\lambda)) < r$. Portanto, de acôrdo com a hipótese de indução, λ é um produto de transposições, de onde vem, imediatamente, que σ também é um produto de transposições.

Podemos simplificar o sistema de geradores de S_n $(n>1)$, conforme o seguinte

COROLÁRIO 2 - $S_n = [(1\,2),(1\,3),\cdots,(1\,n)]$.

Basta demonstrar que uma transposição qualquer $(a\,b) \in S_n$ $(a \neq 1$ e $b \neq 1)$ é um produto de transposições acima; ora, isto é imediato, pois, conforme a fórmula (6), temos

$$(a\,b) = (1\,b)(1\,a)(1\,b).$$

EXEMPLO 43 - Consideremos a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 3 & 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

pertencente a S_9. Determinaremos as σ-órbitas do seguinte modo: $1 \to 2 \to 4 \to 9 \to 1$, $3 \to 5 \to 3$, $6 \to 7 \to 8 \to 6$; portanto,

$$\sigma = (1\,2\,4\,9)(3\,5)(6\,7\,8).$$

Observemos que, conforme o lema 8, temos

$$o(\sigma) = mmc(4,2,3) = 12.$$

EXEMPLO 44 - Determinar uma decomposição da permutação anterior como um produto de transposições. Basta, para isso, empregar a fórmula (7) e teremos

$$\sigma = (1\,9)(1\,4)(1\,2)(3\,5)(6\,8)(6\,7).$$

Podemos também representar σ como produto das transposições citadas no corolário 2:

$$\sigma = (1\,9)(1\,4)(1\,2)(1\,5)(1\,3)(1\,5)(1\,8)(1\,6)(1\,8)(1\,7)(1\,6)(1\,7).$$

Consideremos o anel de polinômios $A = \mathbf{Z}[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ nas indeterminadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ e seja σ uma permutação pertencente a S_n; conforme vimos no §3.2 do Capítulo VI, σ determina um único automorfismo $f \mapsto \sigma \cdot f$, de A, tal que $\sigma(X_i) = X_{\sigma(i)}$ para $i = 1,2,\cdots,n$ e temos

$$\sigma \cdot f = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(n)}).$$

Além disso, se σ e τ são dois elementos quaisquer de S_n, então a fórmula (31) do Capítulo VI nos mostra que

$$(\sigma\tau)\cdot f = \sigma \cdot (\tau \cdot f) \qquad (8),$$

para todo f em A.

Suponhamos que $n>1$ e consideremos o polinômio

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i);$$

para todo σ em S_n, temos

$$\sigma \cdot P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)})$$

e como êste produto difere de P apenas pelo sinal, podemos escrever

$$\sigma \cdot P = \varepsilon_\sigma P \qquad (9),$$

onde $\varepsilon_\sigma = 1$ ou $\varepsilon_\sigma = -1$. O número ε_σ é denominado *assinatura* da permutação σ; se $\varepsilon_\sigma = 1$ diremos que σ é *par* e se $\varepsilon_\sigma = -1$ diremos que σ é *ímpar*. Pode-se ver, fàcilmente, que tôda transposição é ímpar.

Sejam agora σ e τ dois elementos quaisquer de S_n; de acôrdo com as fórmulas (8) e (9), temos

$$(\sigma\tau)\cdot P = \sigma \cdot (\tau \cdot P) = \sigma \cdot (\varepsilon_\tau P) = \varepsilon_\tau (\sigma \cdot P) = \varepsilon_\tau (\varepsilon_\sigma P) = (\varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau) P,$$

logo,

$$\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \qquad (10),$$

O corolário 1 do teorema 28 nos mostra que tôda permutação $\sigma \in S_n$ é um produto de transposições: $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$;

como $\varepsilon_{\tau_i} = -1$, teremos, em virtude da fórmula (10), $\varepsilon_\sigma = (-1)^s$. Daqui resulta que σ é par (resp., ímpar) se, e sòmente se, σ é o produto de um número par (resp. ímpar) de transposições. Além disso, se $\sigma = \tau'_1\tau'_2\cdots\tau'_t$ é uma outra decomposição de σ num produto de transposições, temos $s \equiv t \pmod 2$.

Se $\sigma \in S_n$ $(n>2)$ é um r-ciclo, então, em virtude das fórmulas (7) e (10), temos $\varepsilon_\sigma = (-1)^{r-1}$, de onde resulta, em particular, que todo 3-ciclo é uma permutação par.

Uma outra conseqüência importante da fórmula (10) é a seguinte: a aplicação $\sigma \mapsto \varepsilon_\sigma$, de S_n no grupo multiplicativo $U^*(\mathbf{Z}) = \{-1, 1\}$, é um epimorfismo, logo, seu núcleo A_n que é, evidentemente, o conjunto de tôdas as permutações pares, é um subgrupo normal de S_n; além disso, conforme o corolário do teorema do homomorfismo, temos

$$S_n/A_n \cong \{-1, 1\},$$

de onde vem, $(S_n : A_n) = 2$ e $o(A_n) = n!/2$. Reuniremos êstes resultados no seguinte

TEOREMA 29 - O conjunto A_n de tôdas as permutações pares do intervalo inteiro $[1,n]$, onde $n>1$, é um subgrupo normal, de índice 2 e de ordem $n!/2$, do grupo simétrico S_n.

O grupo de permutações $(A_n, \circ)$ é denominado *grupo alternado* do intervalo inteiro $[1,n]$.

TEOREMA 30 - O grupo alternado A_n $(n \geqslant 3)$ é gerado pelos ciclos de comprimento 3.

DEMONSTRAÇÃO - Já sabemos que todo 3-ciclo pertence a A_n. Por outro lado, seja σ um elemento qualquer de A_n, logo, σ é produto de um número par de transposições e basta, então, demonstrar que o produto de duas transposições distintas τ e τ' é um produto de ciclos de comprimento 3. Temos dois casos para examinar: a) os conjuntos suportes das transposições τ e τ' têm um elemento comum e b) τ e τ' são disjuntas.

a) Se $\tau = (a\ b)$ e $\tau' = (a\ c)$, temos

$$\tau\tau' = (a\ b)(a\ c) = (a\ c\ b).$$

b) Se $\tau = (a\ b)$ e $\tau' = (c\ d)$, temos

$$\tau\tau' = (a\ b)(c\ d) = (a\ b)(a\ c)(a\ c)(c\ d) = (a\ c\ b)(a\ d\ c).$$ ∎

Podemos simplificar o sistema de geradores do grupo alternado A_n $(n \geqslant 3)$:

COROLÁRIO - $A_n = [(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \cdots, (1\ 2\ n)]$.

Basta demonstrar que todo ciclo $(a\ b\ c)$ pode ser representado como um produto de ciclos acima de ou de inversos dêstes ciclos. Se dois dos elementos a, b ou c são iguais a 1 e 2 nada temos para demonstrar; suponhamos, então, que $a = 1$, $b>2$ e $c>2$. De acôrdo com a fórmula (6), temos

$$(1\ 2\ c)(1\ b\ c)(1\ 2\ c)^{-1} = (2\ b\ 1) = (1\ 2\ b),$$

logo,

$$(1\ b\ c) = (1\ 2\ c)^{-1}(1\ 2\ b)(1\ 2\ c) \qquad (11).$$

Finalmente, suponhamos que $a>2$, $b>2$ e $c>2$; temos

$$(1\ b\ c)(a\ b\ c)(1\ b\ c)^{-1} = (a\ c\ 1) = (1\ a\ c) \qquad (12),$$

logo,

$$(a\ b\ c) = (1\ b\ c)^{-1}(1\ a\ c)(1\ b\ c)$$

e êstes ciclos são, em virtude de (11), produtos de ciclos do tipo $(1\ 2\ k)$ ou $(1\ 2\ k)^{-1}$, com $k>2$. ∎

LEMA 11 - Se G é um subgrupo normal de A_n $(n \geqslant 3)$ e se existe um ciclo $(a\ b\ c)$ em G, então $G = A_n$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $a \neq 1$ e $b \neq 1$, então a fórmula (12) nos mostra que $(1\ a\ c) \in G$, logo, $(1\ 2\ a) = (1\ 2\ c)(1\ a\ c)(1\ 2\ c)^{-1}$ também é elemento de G; tomando-se $\lambda = (1\ 2)(a\ k)$, teremos $\lambda(1\ 2\ a)\lambda^{-1} = (2\ 1\ k) \in G$, de onde vem, $(1\ 2\ k) \in G$, portanto, em virtude do corolário do teorema 30, temos $G = A_n$. ∎

LEMA 12 - Se G é um subgrupo normal de S_n $(n>2)$ e se existe uma transposição $(a\ b)$ em G, então $G = S_n$.

DEMONSTRAÇÃO - Supondo-se que a e b sejam distintos de 1 e 2, temos $(a\ 1\ 2)(a\ b)(a\ 1\ 2)^{-1} = (1\ b) \in G$:

portanto, para todo $k \in [1,n]$, $k \neq 1$ e $k \neq b$, temos

$$(1\ k\ b)(1\ b)(1\ k\ b)^{-1} = (1\ k) \in G$$

e daqui resulta, conforme o corolário 2 do teorema 28, que $G = S_n$. ∎

TEOREMA 31 - O grupo alternado A_n, com $n>2$ e $n \neq 4$, é simples.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos supor $n>4$, pois, $o(A_3) = 3$, logo, A_3 é simples. Seja $G \neq \{e\}$ um subgrupo normal de A_n; conforme o lema 11 basta demonstrar que existe, em G, um ciclo de comprimento 3. Como $G \neq \{e\}$ existe $\sigma' \in G$, $\sigma' \neq e$, logo, $o(\sigma') = m > 1$; se p é um fator primo positivo de m, o elemento $\sigma = \sigma'^{m/p}$ tem ordem p, logo, existe em G um elemento σ de ordem prima p. Em virtude do teorema 28 e do corolário do lema 8, a permutação σ pode ser representada sob a forma $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_s$, onde $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_s$ são ciclos disjuntos dois a dois e

de mesmo comprimento p. Observemos ainda que se λ é um elemento qualquer de A_n, então, para todo $\tau \in G$, temos $\lambda\tau\lambda^{-1} \in G$ e $\lambda\tau\lambda^{-1}\tau^{-1} \in G$.

Distinguiremos três casos, conforme os valores de p: a) $p=2$; b) $p=3$ e c) $p>3$.

a) Temos, necessàriamente, $s>1$; pondo-se $\tau_1=(a\,b)$, $\tau_2=(c\,d)$ e $\lambda=(a\,b\,c)$, teremos (lema 10)

$$\lambda\sigma\lambda^{-1}=(b\,c)(a\,d)\tau_3\cdots\tau_s,$$

logo,
$$\lambda\sigma\lambda^{-1}\sigma^{-1}=(b\,c)(a\,d)\tau_3\cdots\tau_s\tau_s\cdots\tau_3(a\,b)(c\,d)=$$
$$=(b\,c)(a\,d)(a\,b)(c\,d)=(a\,c)(b\,d)$$

é um elemento σ_1 de G. Pondo-se $\lambda_1=(a\,c\,k)$, onde $k\neq a$, $k\neq b$, $k\neq c$ e $k\neq d$ (o que é possível, pois, $n>4$) temos

$$\lambda_1\sigma_1\lambda_1^{-1}=(c\,k)(b\,d),$$

logo,
$$\lambda_1\sigma_1\lambda_1^{-1}\sigma_1^{-1}=(c\,k)(b\,d)(a\,c)(b\,d)=(a\,k\,c)$$

é um elemento de G. Isto completa a demonstração no caso a).

b) Se $s=1$ nada temos para demonstrar. Suponhamos que $s>1$; pondo-se $\tau_1=(a\,b\,c)$, $\tau_2=(d\,e\,f)$, $\lambda=(b\,c\,d)$, teremos (lema 10)

$$\lambda\sigma\lambda^{-1}=(a\,c\,d)(b\,f\,g)\tau_3\cdots\tau_s,$$

logo,
$$\lambda\sigma\lambda^{-1}\sigma^{-1}=(a\,c\,d)(b\,f\,g)(a\,c\,b)(d\,g\,f)=(a\,d\,b\,c\,f)$$

é um elemento de G. Reduzimos assim o caso b) ao caso c).

c) Pondo-se $\tau_1=(a_1\,a_2\cdots a_p)$ e $\lambda=(a_2\,a_3\,a_4)$, temos

$$\lambda\sigma\lambda^{-1}=(a_1\,a_3\,a_4\,a_2\,a_5\cdots a_p)\tau_2\cdots\tau_s,$$

logo,
$$\lambda\sigma\lambda^{-1}\sigma^{-1}=(a_2\,a_3\,a_5)$$

é um elemento de G. ∎

COROLÁRIO - Os únicos subgrupos normais de S_n, com $n\geq 2$ e $n\neq 4$, são: S_n, A_n e $\{e\}$.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos, evidentemente, deixar de lado o caso $n=2$. Seja $G\neq\{e\}$ um subgrupo normal de S_n ($n>2$ e $n\neq 4$) e consideremos o subgrupo $G\cap A_n$, que é um subgrupo normal de A_n, logo, em virtude do teorema anterior, temos $G\cap A_n=\{e\}$ ou $G\cap A_n=A_n$. Afirmamos que $G\cap A_n\neq\{e\}$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $G\cap A_n=\{e\}$ e seja $\sigma\neq e$ um elemento de G; como σ^2 é par, temos $\sigma^2\in A_n$ e como $\sigma^2\in G$, teremos $\sigma^2=e$, portanto, σ é um produto de transposições disjuntas duas a duas (caso a) do teorema anterior):

$$\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_s.$$

Se $s=1$, temos, conforme o lema 12, $G=S_n$, o que é absurdo; se $s>1$, a demonstração do caso a) nos mostra que

existe em G um ciclo de comprimento 3, logo, $G=A_n$ o que, novamente, é um absurdo. Isto termina a verificação da afirmação acima. Portanto, $G\cap A_n=A_n$; daqui resulta que $A_n\subset G\subset S_n$ e como $(S_n:A_n)=2$ teremos $G=A_n$ ou $G=S_n$. ∎

Daremos ainda alguns resultados parciais sôbre a estrutura do grupo simétrico S_4. Sabemos que o grupo alternado A_4 é um subgrupo normal, de ordem 12, do grupo S_4 (teorema 29). As permutações

$$\lambda_1=(1\,2)(3\,4),\quad \lambda_2(1\,3)(2\,4)\quad \text{e}\quad \lambda_3=(1\,4)(2\,3)$$

são elementos de A_4 e temos $\lambda_i^2=e$ para $i=1,2,3$, logo,

$$V_4=\{e,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$$

é um subgrupo de A_4. Vamos mostrar que V_4 é um subgrupo normal de S_4, logo, V_4 também é normal em A_4. Com efeito, se σ é um elemento qualquer de S_4 temos $\sigma\lambda_i\sigma^{-1}\neq e$ e $o(\sigma\lambda_i\sigma^{-1})=2$, logo, em virtude do teorema 28 e do lema 8, $\sigma\lambda_i\sigma^{-1}$ é um produto de transposições disjuntas duas a duas, de onde vem, $\sigma\lambda_i\sigma^{-1}\in V_4$; portanto, $\sigma V_4\sigma^{-1}\subset V_4$, ou seja, V_4 é normal em S_4. Notemos que $V_2=[(1\,2)(3\,4)]$ é um subgrupo normal, de ordem 2, de V_4; portanto, o grupo simétrico S_4 admite a seguinte cadeia de subgrupos

$$\{e\}\subset V_2\subset V_4\subset A_4\subset S_4$$

sendo que cada um dêles é normal no seguinte. Notemos ainda que os grupos quocientes $V_2/\{e\}$, V_4/V_2, A_4/V_4 e S_4/A_4 têm, respectivamente, ordens iguais a 2, 2, 3 e 2, logo, são grupos cíclicos; esta propriedade exprime o fato que o grupo simétrico S_4 é solúvel (ver o §4.3).

EXEMPLO 45 - Com as notações acima, notemos que V_2 é normal em V_4 e V_4 é normal em A_4, no entanto, V_2 não é normal em A_4, pois,

$$(1\,2\,3)(1\,2)(3\,4)(1\,3\,2)^{-1}=(1\,4)(2\,3)$$

não pertence a V_2.

EXERCÍCIOS

85. Verificar que a relação «G é P-isomorfo de H» (ver a definição 11) é reflexiva, simétrica e transitiva.

86. Demonstrar o corolário do lema 8.

87. Decompor cada uma das seguintes permutações, pertencentes a S_n, num produto de ciclos disjuntos dois a dois:

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&4&1&3&6&5&9&8&7\end{pmatrix}$, $n=9$;

b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&4&2&1&3&6&10&9&7&5\end{pmatrix}$, $n=10$;

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&6&1&2&3&8&7\end{pmatrix}$, $n=8$.

Determinar as ordens e as assinaturas destas permutações.

88. Representar cada um dos seguintes elementos de S_n sob a forma (5):

a) $(1\,2\,3)(6\,7)(4\,5\,8)$; $n=10$;

b) $(2\,4\,6)(1\,3\,5)(7\,8\,9)$, $n=9$;

c) $(1\,3\,5)(2\,5\,3)(1\,4\,7)(6\,7\,2)$, $n=7$.

Determinar os subgrupos gerados por estas permutações.

82. Demonstrar, diretamente, que se $\tau\in S_n$ $(n>1)$ e se $(a\,b)\in S_n$, então $\tau(a\,b)\tau^{-1}=(\tau(a)\,\tau(b))$. A partir desta propriedade dar uma outra demonstração do lema 8.

90. Determinar todos os subgrupos de ordem 2 do grupo simétrico S_4; separar êstes grupos em duas classes conforme êles sejam P-isomorfos ou não.

91. Determinar o subgrupo G de S_4 gerado pelas permutações $(1\,2)$, $(3\,4)$ e $(1\,3)(2\,4)$ e determinar as G-órbitas.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §2

92. Seja H um subgrupo de ordem t de um grupo cíclico G de ordem $n=ts$; mostrar que $H=G^{(s)}=G_{(t)}$ (ver o exercício 63).

93. Seja $G=[a]$ um grupo cíclico de ordem s e seja $G'=[b]$ um grupo cíclico de ordem t; demonstrar que existe um homomorfismo $\sigma: G\to G'$ tal que $\sigma(a)=b^k$ (com $1\leqslant k\leqslant t$) se, e sòmente se, sk é um múltiplo de t. Pondo-se $sk=mt$, mostrar que σ é um monomorfismo se, e sòmente se, $mdc(s,m)=1$.

94. a) Se a e b são dois elementos de ordens finitas de um grupo abeliano G e se $mdc(o(a),o(b))=1$, então $o(ab)=o(a)o(b)$.

c) Se a e b são dois elementos de ordens finitas de um grupo abeliano G, então existe c em G tal que $o(c)=mmc(o(a),o(b))$. Sugestão: Notar que se $x\in G$ tem ordem m e se d é um divisor positivo de m, então $x^{m/d}$ tem ordem d; considerar, a seguir, as decomposições em fatôres primos de $o(a)$ e $o(b)$, aplicar convenientemente a observação acima e a parte b).

95. Seja G um grupo abeliano e suponhamos que exista um elemento a em G de ordem finita e máxima n; demonstrar que se x é um elemento qualquer de G, então $o(x)\mid n$ e, portanto, $x^n=1$. Sugestão: parte c) do exercício anterior.

96. Demonstrar que todo subgrupo finito do grupo multiplicativo K^*, de um corpo K, é cíclico. Sugestão: exercício anterior e teorema 12 do Capítulo VI.

97. Seja K um corpo e seja $n\geqslant 1$ um número natural; demonstrar que o conjunto $G=\{x\in K \mid x^n=1\}$ é um subgrupo cíclico do grupo K^*. O que se pode afirmar sôbre a ordem dêste grupo G?

Observação: No caso particular em que $K=\mathbf{C}$, o polinômio X^n-1 só admite raízes simples e obtemos assim uma outra demonstração do fato que o grupo U_n das raízes n-ésimas complexas da unidade é um grupo cíclico de ordem n (ver o exercício 95 do Capítulo V).

Seja Γ_n $(n>1)$ o grupo dos elementos inversíveis do anel $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$ dos inteiros módulo n e indiquemos por φ o homomorfismo canônico de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}n$. Verificar as seguintes propriedades:

a) Se $n=p$ é um número primo, então Γ_p é um grupo cíclico de ordem $p-1$. Sugestão: exercício 96.

b) Se $n=p^s$, com $p>2$ e $s>1$, então Γ_{p^s} é um grupo cíclico de ordem $p^{s-1}(p-1)$. Sugestão: Mostrar, sucessivamente, que:

1) $o(\Gamma_{p^s})=p^{s-1}(p-1)$ (exercício 78); 2) para todo $k\in\mathbf{N}$, tem-se $(1+p)^{p^k}\equiv 1+p^{k+1}$ (mod. p^{k+2}); 3) utilizando-se a parte anterior mostrar que $\varphi(1+p)\in\Gamma_{p^s}$ e que êste elemento tem ordem p^{s-1}; 4) existe em Γ_{p^s} um elemento b cuja ordem é divisível por $p-1$ (considerar um gerador $\bar{a}$ do grupo cíclico Γ_p e mostrar que $b=\varphi(a)$ tem ordem divisível por $p-1$); 5) $o(b\varphi(1+p))=p^{s-1}(p-1)$ (exercício 94).

c) Se $n=2^s$, com $s>2$, então o grupo Γ_{2^s} não é cíclico. Sugestão: Mostrar, sucessivamente, que: 1) $o(\Gamma_{2^s})=2^{s-1}$ (exercício 78); 2) para todo $k\in\mathbf{N}$ e para todo inteiro ímpar a, tem-se $a^{2^{k+1}}\equiv 1$ (mod. 2^{k+3}); 3) todo elemento de Γ_{2^s} tem ordem $\leqslant 2^{s-2}<2^{s-1}=o(\Gamma_{2^s})$. Observação: Ver também os exercícios 170 e 174 do §5.

99. Demonstrar que se $p>2$ é um número primo e se G é um grupo cíclico de ordem p^s $(s\geqslant 1)$, então $Aut(G)$ é um grupo cíclico de ordem $p^{s-1}(p-1)$. Sugestão: exercícios 84 e 98.

100. Demonstrar que se G é um grupo cíclico de ordem 2^s $(s>2)$, então $Aut(G)$ é um grupo abeliano não cíclico de ordem 2^{s-1}. Sugestão: exercícios 84 e 98.

101. Demonstrar que $Aut(V_4)\cong S_3$.

102. Demonstrar que se G é um grupo não abeliano, então $G/C(G)$ não é cíclico. Sugestão: mostrar que para todo $x\in G$ o subgrupo gerado por $C(G)\cup\{x\}$ é abeliano.

103. Demonstrar que se G é um grupo não abeliano, então $G/C(G)$ não é a reunião de uma cadeia crescente de grupos cíclicos. Sugestão: no caso contrário, existe uma cadeia $C(G)\subset H_1\subset\cdots H_n\subset\cdots$ de subgrupos de G tal que $H_n/C(G)$ seja cíclico, logo, H_n é abeliano (exercício 102); notando-se que G é a reunião da família (H_n) concluir que G é abeliano.

104. Diz-se que uma permutação $\sigma\in S_n$ é regular se, e sòmente se, σ é produto de ciclos disjuntos dois a dois e de mesmo comprimento.

a) Mostrar que se a ordem de σ é um número primo, então, σ é regular.

b) Demonstrar que tôda potência de uma permutação circular é uma permutação regular.

105. Demonstrar que o grupo alternado A_4 não contém um subgrupo de ordem 6 (portanto, a recíproca do teorema de Lagrange não é

em geral, verdadeira). Sugestão: exemplo 36, teorema 28 e exercício 44.

106. As únicas permutações, pertencentes a S_n, que são permutáveis com a permutação circular $(1\,2\cdots n)$ são as potências desta última.

107. Determinar tôdas as permutações pertencentes a S_{10} que são permutáveis com $(1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8\,9\,10)$; demonstrar que elas formam um subgrupo de S_{10} de ordem 50.

108. Demonstrar que

$$S_n = [(1\,2),(2\,3),\cdots,(n\text{-}1\;n)] \quad \text{e} \quad S_n = [(1\,2),(1\,2\cdots n)],$$

onde se supõe $n>1$.

109. Demonstrar que $A_n = [(1\,2\,3),(1\,2\cdots n)]$ se $n \geq 3$ é ímpar e que $A_n = [(1\,2\,3),(2\,3\cdots n)]$ se $n \geq 4$ é par.

110. Mostrar que $[(1\,2\,3\,4\,5),(6\,7\,8),(10\,11\,12)]$ é um subgrupo cíclico, de ordem 60, do grupo simétrico S_{12}.

§3 - TEOREMAS DE SYLOW

3.1 - GRUPO QUE OPERA SÔBRE UM CONJUNTO

Seja $(G,\cdot)$ um grupo e consideremos o grupo simétrico $(S(G),\circ)$ do conjunto G; para todo a em G a translação à esquerda γ_a é um elemento de $S(G)$ e já sabemos que a aplicação $\gamma: G \to S(G)$, definida por $\gamma(a) = \gamma_a$, é um monomorfismo de G em $S(G)$ (teorema de Cayley). Êste resultado permite considerar o grupo G como um grupo de permutações do próprio conjunto G. Procuraremos generalizar êste conceito impondo que a aplicação γ seja um homomorfismo de G em $S(E)$, onde E é um conjunto não vazio (não necessàriamente igual a G); obteremos, dêste modo, a noção geral de grupo que opera sôbre um conjunto e que será destacada pela seguinte

DEFINIÇÃO 12 - Seja G um grupo multiplicativo, seja E um conjunto não vazio e suponhamos que esteja dado um homomorfismo φ de G em $S(E)$; diz-se, neste caso, que *o grupo G opera sôbre o conjunto E por intermédio do homomorfismo φ* e que *φ é uma representação de G em $S(E)$*. Quando φ é um monomorfismo, diremos que *G opera fielmente sôbre o conjunto E* e que *φ é uma representação fiel de G em $S(E)$*.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Um mesmo grupo G pode operar de diversos modos sôbre um conjunto E, pois, a definição acima depende do homomorfismo φ de G em $S(E)$.

2.ª) Se G opera sôbre E por intermédio de um homomorfismo φ e se H é um subgrupo de G, então H também opera, de modo natural, sôbre E bastando para isso considerar a restrição de φ ao subconjunto H.

3.ª) Se G opera sôbre E por intermédio de um homomorfismo φ, então, em virtude do teorema do homomorfismo, o grupo quociente $G/Ker(\varphi)$ opera fielmente sôbre o conjunto E por intermédio do monomorfismo induzido φ^*

4.ª) Todo grupo simétrico $S(E)$ opera sôbre o próprio conjunto E por intermédio, por exemplo, do homomorfismo idêntico de $S(E)$; portanto, conforme a segunda observação, todo subgrupo G de $S(E)$ também opera sôbre E. Já utilizamos esta noção do §2.2 para definir G-órbita e σ-órbita de um elemento do intervalo inteiro $[1,n]$,

5.ª) Quando o homomorfismo $\varphi: G \to S(G)$ está fixado diremos, simplesmente, que o grupo G opera sôbre E.

EXEMPLO 46 - Conforme vimos acima, o grupo $(G,\cdot)$ opera fielmente sôbre o próprio conjunto G por intermédio das translações à esquerda.

EXEMPLO 47 - Seja G um grupo e consideremos a aplicação $\varphi: G \to S(G)$ definida por $\varphi(a) = \sigma_a$, onde σ_a é o automorfismo interno, de G, determinado por a (teorema 19); de acôrdo com a demonstração do teorema 20, φ é um homomorfismo, logo, o grupo G opera sôbre o conjunto G por intermédio dos automorfismos internos de G. Notemos que esta representação não é, em geral, fiel, pois, $Ker(\varphi) = C(G)$ (teorema 20) e podemos ter $C(G) \neq \{1\}$.

EXEMPLO 48 - Seja G um grupo e indiquemos por $\mathcal{G}$ o conjunto de todos os subgrupos de G; para todo automorfismo interno σ_a, de G, consideremos a extensão $\bar{\sigma}_a$ de σ_a ao conjunto $\mathcal{G}$, isto é, $\bar{\sigma}_a(H) = aHa^{-1}$ para todo H em $\mathcal{G}$. É imediato que $\bar{\sigma}_a$ é uma permutação do conjunto $\mathcal{G}$ e que $\bar{\sigma}_{ab} = \bar{\sigma}_a \circ \bar{\sigma}_b$ quaisquer que sejam a e b em G; portanto, o grupo G opera sôbre o conjunto $\mathcal{G}$ de todos os seus subgrupos por intermédio do homomorfismo $a \mapsto \bar{\sigma}_a$. Observemos que ao mesmo tempo fica demonstrado que $\sigma_a \to \bar{\sigma}_a$ é um homomorfismo de $\Delta(G)$ em $S(\mathcal{G})$ portanto, o grupo $\Delta(G)$ dos automorfismos internos de G também opera sôbre o conjunto $\mathcal{G}$.

EXEMPLO 49 - Seja G um grupo e consideremos o conjunto E de tôdas as partes do conjunto G que têm exatamente

m elementos ($m>0$); para todo a em G indiquemos por $\bar{\gamma}_a$ a extensão da translação à esquerda γ_a ao conjunto E, isto é, $\bar{\gamma}_a(X)=aX$ para todo X em E. É fácil verificar que $\bar{\gamma}_a$ é uma permutação de E e é imediato que $\overline{\gamma_{ab}}=\bar{\gamma}_a\circ\bar{\gamma}_b$ quaisquer que sejam a e b em G; portanto, o grupo G opera sôbre E por intermédio do homomorfismo $a\mapsto\bar{\gamma}_a$. Utilizaremos êste exemplo nas demonstrações dos teoremas de Sylow.

Exemplo 50 - Seja H um subgrupo de um grupo G e consideremos o conjunto quociente $E=G/R_H$ (exemplo 18); para todo a em G indiquemos por $\bar{\gamma}_a$ a extensão da translação à esquerda γ_a ao conjunto E, isto é, $\bar{\gamma}_a(xH)=(ax)G$. Verifica-se, fàcilmente, que $\bar{\gamma}_a$ é uma permutação de E e que $\overline{\gamma_{ab}}=\bar{\gamma}_a\circ\bar{\gamma}_b$, logo, o grupo G opera fielmente sôbre E por intermédio do monomorfismo $a\mapsto\bar{\gamma}_a$. Utilizaremos êste exemplo na demonstração do teorema 37.

Seja G um grupo que opera sôbre um conjunto E por intermédio de um homomorfismo φ; para todo par ordenado $(a,x)\in G\times E$ colocaremos

$$a\cdot x=(\varphi(a))(x).$$

Fica assim definida uma aplicação $(a,x)\mapsto a\cdot x$, de $G\times E$ em E; mostraremos que esta aplicação satisfaz as condições:

a) quaisquer que sejam a e b em G e x em E, tem-se

$$(ab)\cdot x=a\cdot(b\cdot x);$$

b) para todo x em E, tem-se $e\cdot x=x$, onde e indica o elemento unidade de G.

Com efeito, temos

$$(ab)\cdot x=(\varphi(ab))(x)=(\varphi(a)\circ\varphi(b))(x)=$$
$$=(\varphi(a))(\varphi(b))(x)=(\varphi(a))(b\cdot x)=a\cdot(b\cdot x)$$

e

$$e\cdot x=(\varphi(e))(x)=1_E(x)=x.$$

Recìprocamente, seja G um grupo e seja E um conjunto não vazio; suponhamos que esteja dada uma aplicação $(a,x)\mapsto a\cdot x$, de $G\times E$ em E, que satisfaça as condições a) e b) acima. Para todo a em G consideremos a aplicação $\varphi_a: E\to E$ definida por $\varphi_a(x)=a\cdot x$; vamos mostrar que φ_a é uma permutação do conjunto E. Com efeito, temos

$$\varphi_a(a^{-1}\cdot x)=a\cdot(a^{-1}\cdot x)=(aa^{-1})\cdot x=e\cdot x=x,$$

logo, φ_a é sobrejetora; por outro lado, de $a\cdot x=a\cdot y$ resulta

$$x=e\cdot x=(a^{-1}a)\cdot x=a^{-1}\cdot(a\cdot x)=a^{-1}\cdot(a\cdot y)=(a^{-1}a)\cdot y=e\cdot y=y,$$

logo, φ_a é injetora.

Fica assim definida uma aplicação $\varphi: G\to S(E)$ e temos

$$(\varphi\circ\varphi_b)(x)=\varphi_a(\varphi_b(x))=\varphi_a(b\cdot x)=a\cdot(b\cdot x)=(ab)\cdot x=\varphi_{ab}(x),$$

logo, $\varphi_{ab}=\varphi_a\circ\varphi_b$, ou seja, φ é um homomorfismo de G em $S(E)$. Em resumo, nas condições acima, o grupo G opera sôbre o conjunto E por intermédio do homomorfismo φ e, além disso, $(\varphi(a))(x)=a\cdot x$ para todo par $(a\cdot x)\in G\times E$. Portanto, pode-se introduzir a noção de grupo G que opera sôbre o conjunto E por intermédio de uma aplicação $(a,x)\mapsto a\cdot x$, de $G\times E$ em E, que satisfaz os axiomas a) e b). No que se segue adotaremos esta definição que tem a vantagem de simplificar as notações.

Observação - Quando $E=G$ é essencial distinguir a lei de composição externa $(a,x)\mapsto a\cdot x$ da multiplicação definida sôbre o conjunto G; no caso particular em que o grupo G opera sôbre o conjunto G por intermédio das translações à esquerda (ver o exemplo 46), temos $a\cdot x=ax$ quaisquer que sejam a e x em G.

Seja G um grupo que opera sôbre um conjunto E e consideremos a relação G, definida sôbre E, do seguinte modo: quaisquer que sejam x e y em E, tem-se xGy se, e sòmente se, existe a em G tal que $y=a\cdot x$. Levando-se em conta que G é um grupo e que valem os axiomas a) e b), é fácil verificar que a relação G é de equivalência. A classe de equivalência, módulo G, determinada por um elemento x de E será indicada por $G\cdot x$, logo,

$$G\cdot x=\{a\cdot x\in E \mid a\in G\};$$

diremos também que $G\cdot x$ é a *G-órbita do elemento x*. O conjunto quociente E/G que é, então, o conjunto de tôdas as G-órbitas, é uma partição de E; daqui resulta, em particular, que todo elemento de E pertence a uma e sòmente uma G-órbita. As G-órbitas também são chamadas *classes de intransitividade* e se existir uma única G-órbita diremos que o grupo G *opera transitivamente* sôbre o conjunto E. Por exemplo, o grupo simétrico S_n opera transitivamente sôbre o intervalo $[1,n]$.

Exemplo 51 - Já sabemos que todo subgrupo G do grupo simétrico S_n opera sôbre $[1,n]$; obtêm-se, neste caso, as G-órbitas que foram difinidas no §2.2. Se, em particular, $G=[\sigma]$, com σ em S_n, obteremos as σ-órbitas.

Exemplo 52 - Conforme o exemplo 47, o grupo $A(G)$ dos automorfismos internos de um grupo G, opera sôbre o con-

junto G; a $\Delta(G)$-órbita de um elemento x de G é o conjunto

$$\Delta(G)\cdot x = \{axa^{-1}\in G \mid a\in G\},$$

ou seja, é o conjunto de todos os conjugados do elemento x. Notemos que se $x\in C(G)$, então $\Delta(G)\cdot x = \{x\}$.

EXEMPLO 53 - Conforme o exemplo 48, o grupo $\Delta(G)$ também opera sôbre o conjunto $\mathcal{G}$ de todos os subgrupos de G; a $\Delta(G)$-órbita de um subgrupo H de G é, então, o conjunto de todos os subgrupos de G que são conjugados de H:

$$\Delta(G)\cdot H = \{aHa^{-1}\in\mathcal{G} \mid a\in G\}.$$

Notemos que $\Delta(G)\cdot H = \{H\}$ se, e sòmente se, H é um sub-grupo normal de G.

DEFINIÇÃO 13 - Seja G um grupo que opera sôbre um conjunto E e seja x um elemento de E; o subconjunto

$$G_x = \{a\in G \mid a\cdot x = x\}$$

é denominado *estabilizador* do elemento x.

LEMA 13 - a) G_x é um subgrupo de G.

b) $G_{a\cdot x} = aG_xa^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO

a) É imediato que G_x não é vazio, pois, $e\cdot x = x$; por outro lado, se a e b são dois elementos quaisquer de G_x, temos

$$(ab)\cdot x = a\cdot(b\cdot x) = a\cdot x = x$$

e

$$a^{-1}\cdot x = a^{-1}\cdot(a\cdot x) = (a^{-1}a)\cdot x = e\cdot x = x,$$

logo, ab e a^{-1} são elementos de G_x.

b) Temos

$$b\in G_{a\cdot x} \Longleftrightarrow b\cdot(a\cdot x) = a\cdot x \Longleftrightarrow (a^{-1}ba)\cdot x \equiv x \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow a^{-1}ba\in G_x \Longleftrightarrow b\in aG_xa^{-1},$$

logo, $G_{a\cdot x} = aG_xa^{-1}$. ∎

A parte b) do lema acima nos mostra que o conjunto dos estabilizadores dos elementos de uma mesma G-órbita $G\cdot x$ coincide com o conjunto de todos os subgrupos de G que são conjugados de G_x.

EXEMPLO 54 - O grupo $\Delta(G)$ opera sôbre o conjunto $\mathcal{G}$ de todos os subgrupos de G (exemplo 48); se $H\in\mathcal{G}$, então, o estabilizador de H é o conjunto

$$N(H) = \{a\in G \mid a^{-1}Ha = H\},$$

de onde vem, $H\subset N(H)$ e, além disso, H é um subgrupo normal de $N(H)$. É fácil verificar que se K é um subgrupo normal de G tal que H seja normal em K, então K é um subgrupo de $N(H)$; portanto, $N(H)$ é o maior subgrupo de G que satisfaz esta condição. $N(H)$ é denominado *normalizador de H em G*.

TEOREMA 32 - Seja G um grupo finito que opera sôbre um conjunto finito e não vazio E; para todo x em E, tem-se:

$$o(G\cdot x) = o(G)/o(G_x).$$

DEMONSTRAÇÃO - Sejam $a\cdot x$ e $b\cdot x$ dois elementos quaisquer de G-órbita $G\cdot x$; temos $a\cdot x = b\cdot x$ se, e sòmente se, $b^{-1}a\in G_x$, ou seja, $aG_x = bG_x$, logo, $o(G\cdot x) = (G:G_x)$ e em virtude do teorema de Lagrange êste número é igual a $o(G)/o(G_x)$. ∎

Suponhamos ainda que G e E sejam finitos e consideremos uma G-órbita $G\cdot x$; se $a\cdot x$ e $b\cdot x$ são dois elementos quaisquer desta G-órbita colocaremos, por definição, $(a\cdot x)S(b\cdot x)$ se e sòmente se, $G_{a\cdot x} = G_{b\cdot x}$. É imediato que S é uma relação de equivalência sôbre $G\cdot x$; indicaremos por r o número de elementos do conjunto quociente $(G\cdot x)/S$ e por $U_1, U_2, \cdots, U_r$ as classes de equivalência módulo S. Observemos que dois elementos de uma mesma classe de equivalência U_i têm o mesmo estabilizador e que r é o número de estabilizadores de G-órbita $G\cdot x$, ou seja, r é o número de subgrupos de G que são conjugados do subgrupo G_x (parte b) do lema 13). Ora, temos

$$G_{a\cdot x} = G_{b\cdot x} \Longleftrightarrow aG_xa^{-1} = bG_xb^{-1} \Longleftrightarrow (b^{-1}a)G_x =$$
$$= G_x(b^{-1}a) \Longleftrightarrow b^{-1}a\in N(G_x) \Longleftrightarrow aN(G_x) = bN(G_x),$$

logo, $r = (G:N(G_x))$.

Mostraremos, a seguir, que tôdas as classes de equivalência $U_1, U_2, \cdots, U_r$ têm o mesmo número s de elementos e que $s = (N(G_x):G_x)$, de onde resultará que $o(G\cdot x) = rs$. Com efeito, suponhamos que $x\in U_1$ e seja $s = o(U_1)$; para todo elemento $a\cdot x$ de U_1, temos

$$G_{a\cdot x} = G_x \Longleftrightarrow aG_xa^{-1} = G_x \Longleftrightarrow aG_x = G_xa \Longleftrightarrow a\in N(G_x),$$

logo, $U_1 = N(G_x)\cdot x$. Se a e b são dois elementos quaisquer de $N(G_x)$ temos $aG = bG_x$ se, e sòmente se, $a\cdot x = b\cdot x$, logo,

$$s = o(U_1) = (N(G_x):G_x).$$

Finalmente, se $c\cdot x\in U_i$ $(i>1)$ temos, em virtude da fórmula acima,

$$o(U_i) = (N(G_{c\cdot x}):G_{c\cdot x});$$

mas $N(G_{c\cdot x}) = cN(G_x)c^{-1}$ e $G_{c\cdot x} = cG_xc^{-1}$, logo, (exercício 38)

$$(N(G_{c\cdot x}):G_{c\cdot x}) = (N(G_x):G_x),$$

de onde concluímos que $s = o(U_1) = o(U_i)$.

Demonstramos assim o seguinte

TEOREMA 33 - Seja G um grupo finito que opera sôbre um conjunto finito e não vazio E; para todo x em E consideremos a G-órbita $G\cdot x$, o estabilizador G_x e o normalizador $N(G_x)$. Nestas condições, temos:

a) $r=(G:N(G_x))$ é o número de estabilizadores dos elementos de $G\cdot x$, ou seja, é o número de subgrupos de G que são conjugados do subgrupo G_x;

b) cada subgrupo $G_{a\cdot x}$ é o estabilizador de $s=(N(G_x):G_x)$ elementos de $G\cdot x$;

c) $o(G\cdot x)=rs=o(G)/o(G_x)$.

EXERCÍCIOS

111. Seja G um grupo que opera sôbre um conjunto E; verificar que a relação G definida por xGy se, e sòmente se, existe a em G tal que $y=a\cdot x$, é uma relação de equivalência sôbre E.

112. Demonstrar que se H e K são subgrupos de um grupo G e se H é normal em K, então K é um subgrupo de $N(H)$.

113. Seja $E=K[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $X_1,X_2,\cdots,X_n$ e com coeficientes num corpo K e consideremos o grupo simétrico S_n. Para todo par $(\sigma,f)\in S_n\times E$, ponhamos

$$\sigma\cdot f=f(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(n)}).$$

a) Mostrar que S_n opera sôbre E.

b) Descrever as S_n-órbitas.

c) Supondo-se que $n=4$ e que a característica de K seja igual a zero, determinar os estabilizadores dos seguintes polinômios:

1) X_1-X_2;

2) $2X_1-X_2$;

3) $X_1X_2+X_3X_4$;

4) $X_1+X_2+X_3+X_4$;

5) $X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2$;

6) $X_1X_2X_3X_4$;

7) $(X_1+X_2-X_3-X_4)^2$.

d) Qual é o conjunto dos elementos de E que têm S_n como estabilizador? (Sugestão: considerar os polinômios simétricos elementares em $X_1,X_2,\cdots,X_n$).

e) Se $n=7$, mostrar que a ordem do estabilizador de

$$X_1X_2X_4+X_2X_3X_5+X_3X_4X_6+X_4X_5X_7+X_1X_4X_5+X_2X_6X_7+X_1X_3X_7$$

é igual a 168.

3.2 - TEOREMAS DE SYLOW

Seja $n>1$ um número natural e seja p um número natural primo; existe, então, um único número inteiro $m\geq 0$ tal que $p^m|n$ e $p^{m+1}|n$ e, neste caso, diremos que p^m divide exatamente n. É evidente que p^m divide exatamente n se, e sòmente se, $n=p^ma$, com $p\nmid a$. Na demonstração do primeiro teorema de Sylow precisamos do seguinte resultado sôbre coeficientes binomiais (onde usaremos as notações acima):

LEMA 14 - Se um número natural $n>1$ é exatamente divisível por p^m e se t é um número inteiro tal que $0\leq t\leq m$, então o coeficiente binomial $N=\binom{n}{p^t}$ é exatamente divisível por p^{m-t}.

DEMONSTRAÇÃO - Temos

$$N=\frac{n(n-1)\cdots(n-p^t+1)}{p^t(p^t-1)\cdots 2\cdot 1}=p^{m-t}a\prod_{i=1}^{p^t-1}\frac{p^ma-i}{p^t-i},$$

logo, $p^{m-t}|N$. Falta, então, demonstrar que o número inteiro

$$\prod_{i=1}^{p^t-1}\frac{p^ma-i}{p^t-i}$$

não é divisível por p e para isso basta demonstrar que $p^s|(p^ma-i)$ (com $s\geq 1$) se, e sòmente se, $p^s|(p^t-i)$. Ora, se $p^s|(p^ma-i)$, temos $s\leq m$, logo, $p^s|i$ e então $s<t$, de onde vem, $p^s|(p^t-i)$; reciprocamente, se $p^s|(p^t-i)$ temos $s<t$, logo, $p^s|i$ e então $p^s|(p^ma-i)$.

COROLÁRIO - Se $n>1$ é exatamente divisível por p^m, então o coeficiente binomial $\binom{n}{p^m}$ não é divisível por p.

Introduziremos algumas denominações que serão utilizadas nas demonstrações dos teoremas de Sylow. Todo grupo finito $G\neq\{e\}$ cuja ordem é igual a uma potência de um número natural primo p é denominado *p-grupo*. Se G é um grupo qualquer, então todo subgrupo de G que também é um p-grupo é chamado *p-subgrupo de G*. Finalmente, todo p-subgrupo de G cuja ordem divide exatamente a ordem de G é denominado *p-subgrupo de Sylow do grupo G*.

TEOREMA 34 (*primeiro teorema de Sylow*) - Se G é um grupo finito de ordem $n>1$ e se p é um fator primo de n, então, para todo número natural $t\geq 1$ tal que $p^t|m$, existe em G pelo menos um p-subgrupo de ordem p^t.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto E de tôdas as partes de G que têm exatamente p^t elementos e ponhamos

$n = p^m a$, onde $p \nmid a$; conforme o lema 14, o número $o(E) = \binom{n}{p^t}$ é exatamente divisível por p^{m-t}. De acôrdo com o exemplo 49, o grupo G opera sôbre o conjunto E por intermédio das translações à esquerda, logo, E é a reunião de um número finito de G-órbitas disjuntas duas a duas e como $p^{m-t+1} \nmid o(E)$ resulta que existe uma G-órbita $G \cdot A$ ($A \in E$) cuja ordem não é divisível por p^{m-t+1}. O teorema 32 nos mostra que

$$o(G \cdot A) \cdot o(G_A) = o(G) = p^m a,$$

onde G_A é o estabilizador de A; daqui concluímos que

$$p^t \mid o(G_A) \qquad (13).$$

Considerando-se um elemento a_0 de A e notando-se que para todo b em G_A tem-se $ba_0 \in A$ resulta que $b \mapsto ba_0$ é uma aplicação de G_A em A e como esta aplicação é, evidentemente, injetora, concluímos que

$$o(G_A) \leqslant o(A) = p^t;$$

portanto, em virtude de (13), temos

$$o(G_A) = p^t. \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO - Se G é um grupo finito de ordem $n > 1$ e se p é um fator primo de n, então G contém pelo menos um p-subgrupo de Sylow.

TEOREMA 35 (*segundo teorema de Sylow*) - Se G é um grupo finito de ordem $n > 1$ e se p é um fator primo de n, então todos os p-subgrupos de Sylow do grupo G são conjugados entre si.

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $n = p^m a$, onde $p \nmid a$ e consideremos o conjunto E de tôdas as partes de G que têm exatamente p^m elementos; conforme vimos na demonstração do teorema anterior, existe uma G-órbita $G \cdot A$ tal que $p \nmid o(G \cdot A)$ e $o(G_A) = p^m$. Seja H um p-subgrupo de Sylow do grupo G; o grupo G opera sôbre a G-órbita $G \cdot A$, logo, o subgrupo H também opera sôbre esta G-órbita (exemplo 49 e 2.ª observação); portanto, $G \cdot A$ é a reunião de um número finito de H-órbitas disjuntas duas a duas e como $p \nmid o(G \cdot A)$ resulta que existe uma H-órbita $H \cdot B$, com $B = bA$ e b em G, tal que $p \nmid o(H \cdot B)$. De acôrdo com o teorema 32, temos

$$o(H \cdot B) \cdot o(H_B) = o(H) = p^m,$$

onde H_B é o estabilizador de B em H; daqui resulta $o(H \cdot B) = 1$ e $o(H_B) = p^m$, logo, $H_B = H$. Por outro lado, temos $H_B \subset G_B$ e

$$o(G_B) = o(G_{bA}) = o(bG_A b^{-1}) = o(G_A) = p^m,$$

logo, $H = G_B$. Fica assim demonstrado que todo p-subgrupo de Sylow do grupo G é o estabilizador de um elemento de E, de onde vem, conforme a parte b) do lema 13, que os p-subgrupos de Sylow do grupo G são conjugados entre si. $\blacksquare$

TEOREMA 36 (*terceiro teorema de Sylow*) - Seja G um grupo finito de ordem $n > 1$, seja p um fator primo de n e ponhamos $n = p^m a$, onde $p \nmid a$; nestas condições, o número r de p-subgrupos de Sylow do grupo G satisfaz as condições

$$r \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{e} \quad r \mid a.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja E o conjunto de tôdas as partes de G que têm exatamente p^m elementos; conforme vimos na demonstração do teorema 34 existe uma G-órbita $G \cdot A$ tal que $p \nmid o(G \cdot A)$ e $o(G_A) = p^m$. Seja H um p-subgrupo de Sylow do grupo G; de acôrdo com a demonstração do teorema 35, existe B em $G \cdot A$ tal que $H = G_B$ e, além disso, $H \cdot B = \{B\}$. Ora, o subgrupo H é o estabilizador de $s = (N(H) : H)$ elementos $B_1, B_2, \cdots, B_s$ de $G \cdot A$ (teorema 33) e para cada B_i temos $H \cdot B_i = \{B_i\}$. Notemos ainda que se $C \in G \cdot A$ e se $C \neq B_i$ para $i = 1, 2, \cdots, s$, então H_C não é um p-subgrupo de Sylow e como

$$o(H \cdot C) o(H_C) = o(H) = p^m$$

concluímos que $p \mid o(H \cdot C)$. Portanto, $G \cdot A$ é a reunião de um número finito de H-órbitas disjuntas duas a duas sendo que existem s H-órbitas formadas por um único elemento e tôdas as outras têm ordens divisíveis por p, logo,

$$o(G \cdot A) \equiv s \pmod{p}$$

e como $p \nmid o(G \cdot A)$ resulta que $p \nmid s$. Conforme o teorema 33 temos $o(G \cdot A) = rs$, onde $r = (G : N(H))$ é o número de p-subgrupos de Sylow do grupo G, logo, $rs \equiv s \pmod{p}$, de onde vem, $r \equiv 1 \pmod{p}$. Finalmente, de $o(G \cdot A) o(G_A) = o(G)$ resulta $rsp^m = p^m a$, ou, $rs = a$ e então $r \mid a$. $\blacksquare$

Os teoremas de Sylow simplificam a determinação das estruturas de grupo que podem ser definidas sôbre um conjunto finito. Por exemplo, se G é um grupo não abeliano de ordem 6, então existe em G um subgrupo H de ordem 3, logo, H é cíclico: $H = [a]$. Tomando-se $b \in G$, $b \notin H$ e notando-se que $(G : H) = 2$, temos $G = H \cup Hb = \{e, a, a^2, b, ab, a^2 b\}$; daqui se obtém novamente a tábua de G conforme foi construída no exemplo 36. Notemos ainda que, em virtude do teorema 36, o número r de subgrupos de ordem 3 satisfaz as condições $r \mid 2$ e $r \equiv 1 \pmod{3}$, logo, $r = 1$; portanto, H é um subgrupo normal de G. Aliás,

êste resultado também pode ser obtido diretamente de $(G:H)=2$ (ver o exercício 44).

EXEMPLO 57 - Seja G um grupo de ordem 42; de acôrdo com o teorema 35, G contém um subgrupo H de ordem 7 e o número r dêstes subgrupos é um divisor de 6 e $r \equiv 1 \pmod 7$, logo, $r=1$ e então H é um subgrupo normal de G. O grupo quociente G/H tem ordem 6, logo, existe neste grupo um subgrupo normal H_1/H de ordem 3 e é imediato que $o(H_1)=21$ e H_1 é normal em G. Obtivemos assim uma cadeia de subgrupos $\{e\} \subset H \subset H_1 \subset G$, sendo que cada um dêles é normal no seguinte e os grupos quocientes $H/\{e\}$, H_1/H e G/H são cíclicos, pois, suas ordens são 7, 3 e 2; esta propriedade nos mostram que todo grupo de ordem 42 é solúvel (ver o §4.3).

EXEMPLO 58 - Utilizando-se o primeiro teorema de Sylow, a demonstração do teorema 31 se reduz sòmente ao caso c). Com efeito, de $n \geqslant 5$ e $o(A_n)=n!/2$ concluímos que $5 \mid o(A_n)$, logo, existe em A_n um subgrupo H de ordem 5, ou seja, existe um elemento $\sigma \in A_n$ tal que $o(\sigma)=5$ e êste elemento é um produto de ciclos disjuntos dois a dois e de comprimento 5.

TEOREMA 37 - Se G é um p-grupo de ordem p^m $(m \geqslant 1)$, então todo subgrupo de G, de ordem p^{m-1}, é normal em G.

DEMONSTRAÇÃO - Observemos que, em virtude do primeiro teorema de Sylow, existe um subgrupo H de G tal que $o(H)=p^{m-1}$. Conforme o exemplo 50 o grupo G opera sôbre o conjunto quociente $E=G/R_H$ por meio do monomorfismo $a \mapsto \bar{\gamma}_a$, logo, H também opera sôbre o conjunto E. Daqui resulta que E é a reunião de um número finito de H-órbitas $W_1, W_2, \cdots, W_r$ disjuntas duas e duas e como $o(E)=p$, temos

$$p = o(W_1)+o(W_2)+\cdots+o(W_r) \qquad (14).$$

O elemento H pertence a uma destas H-órbitas, por exemplo, $H \in W_1$ e é imediato que $W_1=\{H\}$, de onde concluímos, em virtude de (14), que $r>1$. Consideremos agora um elemento qualquer a de G tal que $a \notin H$; de $aH \neq H$ e $aH \in E$ resulta que existe uma H-órbita W_i $(i>1)$ tal que $aH \in W_i$. É fácil verificar que o estabilizador K do elemento aH é $H \cap (aHa^{-1})$; conforme o teorema 32, temos

$$o(W_i)o(K)=o(H)=p^{m-1},$$

logo, em virtude de (14), concluímos que $o(W_i)=1$. Daqui resulta $o(K)=o(H)$, logo, $aHa^{-1}=H$ e fica assim demonstrado que H é um subgrupo normal de G. ∎

EXEMPLO 59 - Seja G um p-subgrupo de ordem p^m $(m \geqslant 1)$; procedendo-se por indução finita sôbre m, com o auxílio do teorema anterior, conclui-se que existe uma cadeia de subgrupos de G

$$H_0=\{e\} \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_{m-1} \subset H_m = G,$$

onde cada H_i tem ordem p^i e H_i é um subgrupo normal de H_{i+1} $(i<m)$. Notemos que cada um dos grupos quocientes H_{i+1}/H_i $(i<m)$ tem ordem p, logo, cada um dêstes grupos é cíclico. Estas propriedades exprimem o fato que todo p-grupo é solúvel (ver o §4.3).

EXERCÍCIOS

114. Determinar todos os subgrupos de Sylow do grupo alternado A_4. Observação: tem-se um único subgrupo de ordem 4 e quatro subgrupos cíclicos de ordem 3.

115. Mostrar que se um grupo finito $G \neq \{e\}$ tem um único p-subgrupo de Sylow N, então N é normal em G.

116. Demonstrar que todo grupo de ordem 200 não é simples. Sugestão: segundo teorema de Sylow.

117. Determinar, a menos de um isomorfismo, todos os grupos de ordem 10.

118. Demonstrar que o grupo simétrico S_4 contém três 2-subgrupos de Sylow e quatro 3-subgrupos de Sylow.

119. Demonstrar que não existe um grupo simples de ordem 28 ou 312.

120. Demonstrar que não existe um grupo simples de ordem 12 ou 56.

121. Mostrar que todo grupo de ordem 231 contém subgrupos normais de ordens 7 e 11.

122. Determinar todos os 7-subgrupos de Sylow do subgrupo

$$[(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7),(2\,4)(5\,6)]$$

do grupo simétrico S_7.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §3

123. Sejam G e H dois grupos de permutações sôbre um mesmo conjunto E; demonstrar que se G opera transitivamente sôbre E e se G é P-isomorfo a H, então H também opera transitivamente sôbre E. O mesmo resultado é verdadeiro quando se supõe que G seja isomorfo a H?

124. Seja G um grupo de permutações sôbre um conjunto finito E e seja N um subgrupo normal de G; demonstrar que se G opera transitivamente sôbre E, então duas classes de intransitividade, determinadas por N, têm o mesmo número de elementos.

125. Seja E um conjunto finito e com q elementos, onde q é um número primo e seja G um grupo de permutações sôbre E; demonstrar que se G opera transitivamente sôbre E e se $H \neq \{e\}$ é um subgrupo normal de G, então H também opera transitivamente sôbre E.

126. Demonstrar que se H é um p-subgrupo de Sylow de um grupo G e se H é normal em G, então para todo $\sigma \in End(G)$ tem-se $\sigma(H) \subset H$.

127. Se $G \neq \{e\}$ é um p-grupo finito, então $C(G) \neq \{e\}$. Sugestão: $A(G)$ opera sôbre G (exemplo 48).

128. Demonstrar que se G é um p-grupo não abeliano de ordem p^n $(n>1)$, então $o(C(G)) \neq p^{n-1}$. Sugestão: exercício 102.

129. Seja H um p-subgrupo normal de um grupo finito G de ordem $n>1$; demonstrar que H está contido em todo p-subgrupo de Sylow do grupo G.

130. Seja H um subgrupo normal de um grupo finito G de ordem $n>1$ e seja p um fator primo de n; demonstrar que se $p \nmid (G:H)$, então H está contido em todo p-subgrupo de Sylow do grupo G.

131. Seja G um grupo de ordem pq, onde p e q são números naturais primos, $p>q$ e $p \not\equiv 1 \pmod{q}$; demonstrar que G é cíclico. Sugestão: existem subgrupos normais H e K tais que $o(H)=p$ e $o(K)=q$; mostrar que $H \cap K = \{e\}$ e que $G = HK$ (considerar aqui as classes laterais aK com a em H); portanto, todo elemento x de G pode ser representado de modo único sob a forma $x=ab$, com a em H e b em K; concluir daí que G é abeliano e utilizar o exercício 94.

132. Demonstrar que todo p-grupo de ordem p^2 é abeliano e $G \cong F_{p^2}$ ou $G \cong F_p \times F_p$ (F_n indica o grupo aditivo dos inteiros módulo n).

§4 - SEQÜÊNCIAS DE COMPOSIÇÃO

4.1 - SEQÜÊNCIAS NORMAIS

Seja G um grupo e consideremos o conjunto $\mathcal{G}$, ordenado por inclusão, de todos os subgrupos de G. No §4.2 do Capítulo VII introduzimos os conceitos de cadeia crescente ou decrescente, a condição maximal ou minimal, etc., num conjunto parcialmente ordenado; aplicaremos estas noções para certas cadeias de elementos de $\mathcal{G}$ onde a ordem considerada será sempre a inclusão.

DEFINIÇÃO 14 - Diz-se que uma cadeia decrescente $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$ (com $s \geq 1$), de subgrupos de G, é uma *seqüência normal* se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) $G_0 = G$ e $G_s = \{1\}$;

b) para todo $i \in [0, s-1]$, G_{i+1} é um subgrupo normal de G_i.

Representaremos a seqüência normal $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$ por

$$G_0 = G \supset G_1 \supset \cdots \supset G_{s-1} \supset G_s = \{1\} \tag{15}$$

ou, simplesmente, por (G_i). O número s é denominado *comprimento* da seqüência normal $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$ e $(G_i/G_{i+1})_{0 \leq i \leq s-1}$ é chamada *seqüência dos fatôres* da seqüência normal (G_i). Se $G_i \neq G_{i+1}$ para $i = 0, 1, \cdots, s-1$ diremos que a seqüência normal (G_i) é *estritamente decrescente*.

Seja

$$G'_0 = G \supset G'_1 \supset \cdots \supset G'_{t-1} \supset G'_t = \{1\} \tag{16}$$

uma outra seqüência normal do grupo G; se (15) é uma subseqüência (resp., subseqüência própria) de (15) diremos que a seqüência normal (G_i) é *mais fina* (resp., *estritamente mais fina*) do que a seqüência normal (G'_j) ou que (G_i) é um *refinamento* (resp., *refinamento próprio*) de (G'_j).

A definição 14 pode ser estendida para uma cadeia decrescente $(G_i)_{i \in I}$ de subgrupos de G, onde I é um conjunto finito totalmente ordenado e $o(I) \geq 2$; notemos que, neste caso, impõe-se que $G_a = G$ e $G_b = \{1\}$, onde $a = min\, I$ e $b = max\, I$.

DEFINIÇÃO 15 - Diz-se que a seqüência normal (15) é *equivalente* à seqüência normal (16) se, e sòmente se, são válidas as seguintes condições:

a) $s = t$;

b) existe uma permutação σ do intervalo inteiro $[0, s-1]$ tal que

$$G_i/G_{i+1} \cong G'_{\sigma(i)}/G'_{\sigma(i)+1}$$

para $i = 0, 1, \cdots, s-1$.

Verifica-se, fàcilmente, que a relação introduzida pela definição acima é de equivalência. Deixaremos a cargo do leitor a extensão da definição 15 para duas seqüências normais $(G_i)_{i \in I}$ e $(G'_j)_{j \in J}$, onde I e J são conjuntos finitos totalmente ordenados.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se o grupo M é comutativo, então tôda seqüência decrescente $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$, de subgrupos de G, com $G_0 = G$ e $G_s = \{1\}$, é normal.

2.ª) Como a relação «A é subgrupo normal de B», sôbre o conjunto $\mathcal{G}$, não é, em geral, transitiva (exemplo 45) resulta que G_{i+1} $(i>1)$ nem sempre é um subgrupo normal de G_{i-1}; portanto, nem tôda subseqüência $(G'_j)_{0 \leq j \leq t}$ da seqüência normal $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$ é normal, mesmo quando $G'_0 \neq G$ e $G'_t \neq \{1\}$.

EXEMPLO 60 - Para todo grupo G, a seqüência $G \supset \{1\}$ é normal; se G é simples, então, esta é a única seqüência normal estritamente decrescente de G.

EXEMPLO 61 - Consideremos um grupo cíclico $G=[a]$ de ordem 6; conforme o teorema 27, os únicos subgrupos de G são: G, $[a^2]$, $[a^3]$ e $\{1\}$. Portanto, existem em G sòmente duas seqüências normais estritamente decrescentes e de comprimento 2:

$$[a] \supset [a^2] \supset \{1\} \quad \text{e} \quad [a] \supset [a^3] \supset \{1\}.$$

Notemos que estas seqüências normais são equivalentes, pois,

$$[a]/[a^2] \cong [a^3]/\{1\} \quad \text{e} \quad [a^2]/\{1\} \cong [a]/[a^3].$$

EXEMPLO 62 - Conforme vimos na parte final do §2.2, o grupo simétrico S_4 admite a seguinte seqüência normal

$$S_4 \supset A_4 \supset V_4 \supset V_2 \supset \{e\} \tag{17},$$

onde A_4 é o grupo alternado, $V_4 = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ e $V_2 = \{e, (1\,2)(3\,4)\}$. Notemos que V_2 é normal em V_4 mas não é normal em A_4 (exemplo 45), logo, a subseqüência

$$S_4 \supset A_4 \supset V_2 \supset \{e\},$$

de (17), não é normal.

EXEMPLO 63 - De acôrdo com o teorema 31 e seu corolário, as únicas seqüências normais estritamente decrescentes do grupo simétrico S_n, com $n \geq 5$, são

$$S_n \supset \{e\}$$

e

$$S_n \supset A_n \supset \{e\} \tag{18}.$$

O principal teorema desta secção é devido a O. Schreier e sua demonstração é baseada no lema de Zassenhaus (§1.5):

TEOREMA 38 (Schreier) - Duas seqüências normais, de um mesmo grupo G, têm refinamentos equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam (15) e (16) duas seqüências normais de G e para cada par (i,j), com $0 \leq i \leq s-1$ e $0 \leq j \leq t$, ponhamos

$$G_{ij} = G_{i+1}(G_i \cap G_j);$$

observemos que G_{ij} é um subgrupo de G_i, pois, $G_i \cap G'_j$ é um subgrupo de G_i e G_{i+1} é normal em G_i. Temos

$$G_{i,0} = G_i, \quad G_{it} = G_{i+1}$$

e

$$G_{ij} \supset G_{i,j+1} \text{ para } j = 0,1,\cdots,t-1$$

e conforme a parte a) do lema de Zassenhaus (onde se escolhe $A = G_i$, $A' = G_{i+1}$, $B = G'_j$ e $B' = G'_{j+1}$), $G_{i,j+1}$ é um subgrupo normal

de G_{ij}. Portanto, entre G_i e G_{i+1} temos a seguinte cadeia decrescente

$$G_{i,0} \neq G_i \supset G_{i1} \supset \cdots \supset G_{ij} \supset G_{i,j+1} \supset \cdots \supset G_{i,t-1} \supset G_{it} \neq G_{i+1}$$

sendo que cada $G_{i,j+1}$ $(0 \leq j < t)$ é um subgrupo normal de G_{ij}. Anàlogamente, pondo-se

$$G'_{ij} = G'_{j+1}(G'_j \cap G_i)$$

teremos

$$G'_{0,j} \neq G_j \supset G'_{ij} \supset \cdots \supset G'_{ij} \supset G'_{i+1,j} \supset \cdots \supset G'_{s-1,j} \supset G'_{sj} = G_j$$

onde cada $G'_{i+1,j}$ $(0 \leq i < s)$ é um subgrupo normal de G'_{ij}.

Consideremos, então, a cadeia decrescente (G_{ij}), onde $0 \leq j \leq t-1$ se $0 \leq i < s-1$ e $0 \leq j \leq t$ se $i \neq s-1$; de acôrdo com o que vimos acima, (G_{ij}) é uma seqüência normal de G de comprimento st e, além disso, é um refinamento de (G_i). Anàlogamente, a cadeia decrescente (G'_{ij}), onde $0 \leq i \leq s-1$ se $0 \leq j < t-1$ e $0 \leq i \leq s$ se $j = t-1$, é uma seqüência normal de G de comprimento st e, além disso, é um refinamento de (G'_j). Em virtude da parte c) do lema de Zassenhaus (onde se escolhe $A = G_i$, $A' = G_{i+1}$, $B = G'_j$ e $B' = G_{j+1}$) temos

$$G_{ij}/G_{i,j+1} = G_{i+1}(G_i \cap G'_j)/G_{i+1}(G_i \cap G'_{j+1}) \cong$$
$$\cong G'_{j+1}(G_i \cap G'_j)/G'_{j+1}(G'_j \cap G_{i+1}) = G'_{ij}/G'_{i+1,j},$$

o que termina a demonstração do teorema de Schreier. ∎

EXERCÍCIOS

133. Determinar tôdas as seqüências normais estritamente decrescentes do grupo simétrico S_3 e do grupo alternado A_4.

134. Determinar tôdas as seqüências normais estritamente decrescentes do grupo aditivo $Z/Z \cdot 20$ e separá-las segundo a equivalência introduzida pela definição 15. Verificar em alguns casos o teorema de Schreier.

135. Mostrar que as seqüências normais (17) e (18) não admitem refinamentos próprios estritamente decrescentes.

136. Seja $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$ uma seqüência normal de um grupo G, seja H um subgrupo de G e ponhamos $H_i = H \cap G_i$ para $i = 0,1,\cdots,s$. Mostrar que (H_i) é uma seqüência normal de H cujos fatôres são isomorfos a subgrupos dos fatôres da seqüência (G_i). Sugestão: segundo teorema do isomorfismo.

4.2 - SEQÜÊNCIAS DE COMPOSIÇÃO

DEFINIÇÃO 16 - Diz-se que uma seqüência normal estritamente decrescente $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$, de um grupo G, é uma *seqüencia de composição* de G, se, e sòmente se, esta seqüência não admite refinamento próprio estritamente decrescente.

Seja N um subgrupo normal de um grupo G e consideremos o grupo quociente $G'=G/N$; em virtude da parte a) do primeiro teorema do isomorfismo, todo subgrupo normal de G' é da forma N'/N, onde $N\subset N'$ e N' é um subgrupo normal de G logo, a seqüência normal $G\supset N'\supset N\supset\{1\}$ é um refinamento de $G\supset N\supset\{1\}$. Daqui resulta, imediatamente, o seguinte.

TEOREMA 39 – Uma seqüência normal estritamente decrescente, de um grupo $G\neq\{1\}$, é uma seqüência de composição de G se, e sòmente se, todos os seus fatôres são grupos simples.

Em virtude do lema 6 êste teorema pode ser enunciado sob a forma:

COROLÁRIO - Uma sequência normal estritamente decrescente $(G_i)_{0\leq i\leq s}$, de um grupo G, é uma seqüência de composição de G se, e sòmente se, cada G_{i+1} $(0\leq i<s)$ é um subgrupo normal maximal de G_i.

EXEMPLO 64 - Um grupo $G\neq\{1\}$ é simples se, e sòmente se, G admite uma seqüência de composição de comprimento 1.

EXEMPLO 65 - As seqüências normais (17) e (18) são seqüências de composição.

EXEMPLO 66 - A seqüência normal construída no exemplo 59 é uma seqüência de composição do p-grupo G.

TEOREMA 40 - Todo grupo finito $G\neq\{1\}$ admite uma seqüência de composição.

DEMONSTRAÇÃO - O teorema é trivial se $o(G)=2$; suponhamos, então, que $o(G)\geq 2$ e que o teorema seja verdadeiro para todo grupo finito de ordem m, com $2\leq m<n$. De acôrdo com o lema 6, existe em G um subgrupo normal maximal G_1; se $G_1=\{1\}$, então, G é simples e, neste caso, $G\supset G_1$ é uma seqüência de composição de G. Se $G_1=\{1\}$, temos $2\leq o(G_1)<n$, logo, existe em G_1 uma sequência de composição $(G_i)_{1\leq i\leq s}$ e é imediato que $(G_i)_{0\leq i\leq s}$, onde $G_0=G$, é uma seqüência de composição de G. ∎

Seja $(G_i)_{0\leq i\leq s}$ uma seqüência de composição de um grupo abeliano $G=\{1\}$; ora, cada fator G_i/G_{i+1} $(0\leq i<s)$ é um grupo abeliano simples, logo, G_i/G_{i+1} é finito de ordem prima (corolário do teorema 27) e daqui resulta que G é finito (exercício 30). Demonstramos assim o seguinte

COROLÁRIO - Um grupo abeliano $G\neq\{1\}$ admite uma seqüência de composição se, e sòmente se, G é finito.

Em particular, temos o

EXEMPLO 67 - Todo grupo cíclico infinito não admite uma seqüência de composição.

TEOREMA 41 (Jordam Hölder) - Se um grupo $G\neq\{1\}$ admite uma seqüência de composição, então, duas quaisquer seqüências de composição de G são equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos duas seqüências de composição $(G_i)_{0\leq i\leq s}$ e $(H_j)_{0\leq j\leq t}$ do grupo G; conforme o teorema de Schreier existem seqüências normais equivalentes $(G'_p)_{0\leq p\leq m}$ e $(H'_j)_{0\leq q\leq m}$ que são, respectivamente, mais finas do que (G_i) e (H_j), logo, $m=n$ e existe uma permutação σ do intervalo inteiro $[0,m-1]$ tal que

$$G'_p/G'_{p+1}\cong H'_{\sigma(p)}/H'_{\sigma(p)+1} \tag{19}$$

para $p=0,1,\cdots,m-1$. Indiquemos por J o conjunto de todos os índices $p\in[0,m-1]$ tais que

$$G'_p/G'_{p+1}\neq\{1\};$$

como (G_i) é uma seqüência de composição e como (G'_p) é mais fina do que (G_i) resulta que $(G'_p/G'_{p+1})_{p\in J}$ é a seqüência dos fatôres de (G_i), logo, $o(J)=s$. De acôrdo com (19) temos $H'_{\sigma(p)}/H'_{\sigma(p)+1}\neq\{1\}$ se, e sòmente se, $p\in J$, logo, $(H'_{\sigma(p)}/H'_{\sigma(p)+1})_{p\in J}$ é a seqüência dos fatôres de (H_j) e daqui concluímos que $s=o(J)=t$; finalmente, a fórmula (19), para $p\in J$, nos mostra que as seqüências de composição (G_i) e (H_j) são equivalentes. ∎

COROLÁRIO - Se um grupo $G\neq\{1\}$ admite uma seqüência de composição $(G_i)_{0\leq i\leq s}$ e se $(H_j)_{0\leq j\leq t}$ é uma seqüência normal estritamente decrescente de G, então existe uma seqüência de composição em G que é mais fina do que (H_j).

Basta aplicar o teorema de Schreier às seqüências normais (G_i) e (H_j) e notar que os refinamentos obtidos (após a eliminação dos têrmos repetidos) são seqüências de composição do grupo G. ∎

Se um grupo $G\neq\{1\}$ admite uma seqüência de composição $(G_i)_{0\leq i\leq s}$, então, o número de fatôres desta seqüência é denominado *comprimento do grupo* G e diremos que $(G_i/G_{i+1})_{0\leq i\leq s-1}$ é a *seqüência dos fatôres* de G ou que G_0/G_1, $G_1/G_2,\cdots,G_{s-1}/\{1\}$ são os *fatôres do grupo* G; em virtude do teorema de Jordan-

Hölder, a noção de comprimento de um grupo não depende da particular seqüência de composição (G_i) considerada em G e, além disso, os fatôres de G são determinados de modo único (a menos de isomorfismos). O corolário do teorema 41 nos mostra que se $(H_j)_{0\leqslant j\leqslant t}$ é uma seqüência normal estritamente decrescente de G, então $t\leqslant s$ e temos $t=s$ se, e sòmente se, (H_j) é uma seqüência de composição de G.

É imediato que se G é um grupo de comprimento s e se G' é um grupo isomorfo a G, então G' também tem comprimento s. No entanto, convém observar que dois grupos não isomorfos G e G' podem ter o mesmo comprimento; obtém-se um exemplo escolhendo-se G e G' como grupos cíclicos de ordens primas e distintas.

EXERCÍCIOS

137. Determinar tôdas as seqüências de composição dos grupos S_3, S_4, A_4 e $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\cdot 20$; verificar, em cada caso, o teorema de Jordan-Hölder.

138. Seja $G\neq\{1\}$ um grupo que admite uma seqüência de composição e seja N um subgrupo normal próprio de G; verificar as seguintes propriedades:

a) existe uma seqüência de composição de G que passa por N;

b) N admite uma seqüência de composição;

c) o grupo quociente G/N admite uma seqüência de composição;

d) a soma dos comprimentos de N e de G/N é igual ao comprimento de G.

4.3 - GRUPOS SOLÚVEIS

Seja G um grupo multiplicativo e sejam a e b dois elementos quaisquer do conjunto G; o elemento

$$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$$

é denominado *comutador do par* (a,b) ou *comutador dos elementos* a *e* b (nesta ordem).

As seguintes propriedades dos comutadores são de verificação imediata:

LEMA 15 - a) $[a,b]=1$ se, e sòmente se, $ab=ba$.

b) $[a,b]^{-1}=[b,a]$.

c) Se G' é um grupo qualquer e se $\varphi\in Hom(G,G')$, então $\varphi([a,b])=[\varphi(a),\varphi(b)]$; em particular, para todo $\sigma\in End(G)$, tem-se $\sigma([a,b])=[\sigma(a),\sigma(b)]$.

Indicaremos por $D(G)$ o subgrupo de G gerado pelo conjunto de todos os comutadores de elementos de G; todo elemento de $D(G)$ é um produto de comutadores ou de inversos de comutadores, logo, em virtude da parte b) do lema acima, todo elemento de $D(G)$ é um produto de comutadores. O subgrupo $D(G)$ é denominado *grupo dos comutadores de* G ou *grupo derivado de* G.

LEMA 16 - a) $D(G)=\{1\}$ se, e sòmente se, G é abeliano.

b) Se N é um subgrupo completamente invariante de G, isto é, se $\sigma(N)\subset N$ para todo $\sigma\in End(G)$, então $D(N)$ também é um subgrupo completamente invariante de G.

c) $D(G)$ é um subgrupo completamente invariante de G e, em particular, $D(G)$ é um subgrupo normal de G.

As verificações das propriedades acima serão deixadas a cargo do leitor.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A operação colchetes $(a,b)\mapsto[a,b]$, definida sôbre um grupo G, não é, em geral, associativa; pode-se demonstrar que esta operação é associativa se, e sòmente se, $D(G)\subset C(G)$ (ver o exercício 153).

2.ª) O produto de dois comutadores não é, em geral, um comutador, isto é, nem todo elemento de $D(G)$ é um comutador (ver o exercício 154).

TEOREMA 42 - Se φ e um epimorfismo de um grupo G num grupo G', então $\varphi(D(G))=D(G')$; portanto, G' é abeliano se, e sòmente se, $D(G)\subset Ker(\varphi)$.

A primeira parte do teorema acima resulta do fato que φ transforma comutador em comutador (lema 15) e que φ é um epimorfismo; a segunda parte é uma conseqüência imediata do lema 16, a). ∎

COROLÁRIO 1 - Se N é um subgrupo normal de um grupo G, então o grupo quociente G/N é abeliano se, e sòmente se, $D(G)\subset N$.

Portanto, o grupo dos comutadores $D(G)$ é o menor subgrupo normal N, de G, tal que G/N seja abeliano.

COROLÁRIO 2 - Se H é um subgrupo qualquer de G e se $D(G)\subset H$, então, H é normal em G e, portanto, o grupo quociente G/H é abeliano.

Com efeito, se φ é o homomorfismo canônico de G em $D(G)$, então, $\varphi(H)$ é normal em $G/D(G)$ e como $\overline{\varphi}^1(\varphi(H)) = H$ resulta que H é normal em G; a última afirmação dêste corolário é, então, uma conseqüência imediata do corolário anterior. ∎

Para todo número natural $i \geq 1$, colocaremos

$$D^i(G) = D(D^{i-1}(G)),$$

onde $D^0(G) = G$; conforme o lema 16, $D^i(G)$ é um subgrupo completamente invariante de G, logo, $D^i(G)$ é normal em G. Diremos que $D^i(G)$ é o *i-ésimo grupo derivado de* G. Notemos ainda que se H é um subgrupo de G, então $D^i(H) \subset D^i(G)$ para todo número natural i.

Fica assim definida uma cadeia descendente $(D^i(G))_{i \in N}$, de subgrupos de G, sendo que cada $D^{i+1}(G)$ é normal em $D^i(G)$ e cada grupo quociente $D^i(G)/D^{i+1}(G)$ é abeliano (corolário 2 do teorema 38). Observemos que, em geral, não existe uma subseqüência normal desta cadeia, pois pode acontecer que $D^i(G) \neq \{1\}$ para todo $i \in N$ (ver o teorema 43 ou o exemplo 71).

DEFINIÇÃO 17 - Diz-se que um grupo G é *solúvel* se, e sòmente se, existe em G uma seqüência normal cujos fatôres são abelianos.

EXEMPLO 68 - Todo grupo abeliano é solúvel.

EXEMPLO 69 - Conforme o exemplo 62 o grupo simétrico S_4 é solúvel; notemos ainda que S_3 e S_2 também são solúveis.

EXEMPLO 70 - Em virtude do exemplo 59, todo p-grupo finito é solúvel.

TEOREMA 43 - Um grupo G é solúvel se, e sòmente se, existe um número natural k tal que $D^k(G) = \{1\}$.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos, evidentemente, supor que $G \neq \{1\}$. Se $D^k(G) = \{1\}$, então a cadeia decrescente $(D^i(G))_{0 \leq i \leq k}$ é uma seqüência normal cujos fatôres são grupos abelianos. Recìprocamente, suponhamos que G seja solúvel e seja $(H_j)_{0 \leq j \leq t}$ uma seqüência normal de G cujos fatôres sejam abelianos; em virtude do corolário 1 do teorema 38, temos $D(H_i) \subset H_{i+1}$ para $i = 0, 1, \cdots, t-1$, de onde vem, $D^t(H_0) \subset H_t = \{1\}$; logo, $D^t(G) = \{1\}$. ∎

COROLÁRIO 1 - Todo subgrupo H de um grupo solúvel G também é solúvel.

Basta notar que $D^i(H) \subset D^i(G)$ para todo número natural i. ∎

COROLÁRIO 2 - Se G é um grupo solúvel e se φ é um epimorfismo de G num grupo G', então G' também é solúvel.

É uma conseqüência imediata do teorema acima e da igualdade $\varphi(D^i(G)) = D^i(G')$. ∎

COROLÁRIO 3 - Se N é um subgrupo normal de um grupo G, então G é solúvel se, e sòmente se, N e G/N são solúveis.

DEMONSTRAÇÃO - Os corolários 1 e 2 nos mostram que se G é solúvel, então N e G/N são solúveis. Recìprocamente, suponhamos que N e $G' = G/N$ sejam solúveis, logo, existem números naturais s e t tais que $D^s(G') = \{N\}$ e $D^t(N) = \{1\}$; da primeira igualdade vem $D^s(G) \subset N$, de onde concluímos que $D^{s+t}(G) \subset D^t(N) = \{1\}$ e então $D^{s+t}(G) = \{1\}$. ∎

EXEMPLO 71 - Consideremos o grupo simétrico S_n, com $n \geq 5$; sabemos que os únicos subgrupos normais de S_n são $\{e\}$, A_n e S_n e como todo elemento de $D(S_n)$ é uma permutação par resulta que $D(S_n) = A_n$. Ora, $D(A_n)$ é um subgrupo normal de A_n e A_n é não comutativo e simples (teorema 31), logo, $D(A_n) = A_n$; portanto, $D^i(S_n) = A_n$ para todo $i \geq 1$ e fica assim demonstrado que S_n não é solúvel.

EXEMPLO 72 - Se G é um grupo simples e solúvel, então $D(G) = \{1\}$, logo, G é abeliano e, neste caso, o corolário do teorema 27 nos mostra que G é finito de ordem prima.

Seja $G \neq \{1\}$ um grupo solúvel e suponhamos que exista em G uma seqüência de composição $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$. Conforme os corolários 1 e 3 do teorema 43 o grupo quociente G_i/G_{i+1} $(0 \leq i < s)$ é solúvel e como êste grupo é simples resulta que êle é abeliano; em virtude do exemplo 72 concluímos que G_i/G_{i+1} é um grupo finito de ordem prima, logo, G também é finito (exercício 30). Recìprocamente, se um grupo $G \neq \{1\}$ admite uma seqüência de composição cujos fatôres sejam grupos cíclicos de ordens primas, então G é finito e G é solúvel pela própria definição 17. Demonstramos acima o seguinte

TEOREMA 44 - Um grupo solúvel G admite uma seqüência se composição se, e sòmente se, G é finito e um grupo finito $G \neq \{1\}$ é solúvel se, e sòmente se, seus fatôres são grupos cíclicos de ordens primas.

EXERCÍCIOS

139. Demonstrar os lemas 15 e 16.

140. Verificar as seguintes propriedades dos comutadores, onde a, b e c são elementos quaisquer de um grupo G:

a) $[a,b^{-1}] = b^{-1}[b,a]b$;

b) $[a^{-1},b] = a^{-1}[b,a]a$;

c) $[ab,c] = a[b,c]a^{-1}[a,c]$;

d) $[a,bc] = [a,b]b[a,c]b^{-1}$.

141. Mostrar que $D(S_n) = A_n$ para $n = 2,3,4$. Observação: o exemplo 71 nos mostra que $D(S_n) = A_n$ para todo $n \geqslant 5$.

142. Sejam A e B duas partes não vazias de um grupo G e indiquemos por $[A,B]$ o subgrupo, de G, gerado por todos os comutadores $[a,b]$ com a em A e b em B. Verificar as seguintes propriedades:

a) $[G,G] = D(G)$;

b) se $G_{n+1} = [G_n,G]$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$ e $G_0 = G$, então (G_n) é uma seqüência decrescente e cada G_n é completamente invariante em G.

143. Demonstrar que se $D(G) \subset C(G)$, então valem as seguintes propriedades, onde a, b e c são elementos quaisquer de G:

a) $[ab,c] = [a,c][b,c]$;

b) $[a,bc] = [a,b][a,c]$;

c) $[a^n,c] = [a,c]^n = [a,c^n]$ para todo número inteiro n.

144. Demonstrar que todo grupo G de ordem pq, onde p e q são números naturais primos é solúvel. Sugestão: exercícios 131 e 132.

145. Se A e B são subgrupos normais solúveis, de um grupo G, então AB também é solúvel.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §4

146. Demonstrar que todo p-grupo cíclico tem uma única seqüência de composição.

147. Se um p-grupo G tem uma única seqüência de composição, então G é cíclico.

148. Diz-se que uma seqüência normal $(G_i)_{0 \leqslant i \leqslant s}$, de um grupo G, passa por um subgrupo A de G se, e sòmente se, existe um índice i tal que $G_i = A$. Diz-se que um subgrupo A de G é *accessível* se, e sòmente se, existe uma seqüência normal de G que passa por A. Indicaremos por $\mathcal{A}$ o conjunto, ordenado por inclusão, de todos os subgrupos accessíveis de G. Verificar as seguintes propriedades:

a) Se $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant t}$ é uma seqüência decrescente de elementos de $\mathcal{A}$, então existe uma seqüência normal de G mais fina do que (A_i).

b) Se o grupo $G \neq \{1\}$ admite uma seqüência de composição, então o conjunto $\mathcal{A}$ satisfaz os axiomas CCC e CCD (ver o §4.2 do Capítulo VII).

c) Se o conjunto $\mathcal{A}$ satisfaz os axiomas CCC e CCD, então G admite uma seqüência de composição. Sugestão: Mostrar, inicialmente, que se $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \{1\}$, então existe em A um subgrupo normal maximal (utilizar o axioma MAX); concluir daí, por intermédio do princípio de definição por recorrência, que existe uma seqüência de composição em G.

149. Mostrar que o conjunto $\mathcal{A}$, ordenado por inclusão, de todos os subgrupos de um grupo cíclico infinito G, satisfaz o axioma CCC mas não satisfaz CCD.

150. Seja $U_{(p)}$ o grupo das raizes complexas da unidade cujas ordens são potências de um número natural primo p.

a) Demonstrar que todo subgrupo próprio de $U_{(p)}$ é finito e cíclico.

b) Concluir daí que o conjunto $\mathcal{A}$, ordenado por inclusão, de todos os subgrupos de $U_{(p)}$, satisfaz o axioma CCD mas não satisfaz CCC.

151. Seja $S(\boldsymbol{N}^*)$ o grupo simétrico do conjunto $\boldsymbol{N}^*$ de todos os números naturais não nulos e seja $A(\boldsymbol{N}^*)$ seu grupo alternado.

a) Mostrar que $A(\boldsymbol{N}^*)$ é simples (portanto, admite uma única seqüência de composição).

b) Mostrar que o subgrupo de $A(\boldsymbol{N}^*)$ gerado pelas permutações $(4n\text{-}3\ 4n\text{-}2)(4n\text{-}1\ 4n)$ $(n \in \boldsymbol{N}^*)$ é abeliano e infinito (portanto, não admite uma seqüência de composição).

152. Seja G um grupo e sejam a e b dois elementos quaisquer de G tais que $[a,b] \in C(G)$; demonstrar que

$$(ab)^n = [a,b]^{\frac{1}{2}n(n-1)}a^n b^n$$

para todo número inteiro n.

153. Demonstrar que $[[a,b],c] = [a,[b,c]]$ quaisquer que sejam os elementos a, b e c de um grupo G se, e sòmente se, $D(G) \subset C(G)$. Sugestão: supondo-se que a igualdade acima seja verdadeira, mostrar que $[a,b] = [a^{-1},b^{-1}]$; calcular $[[a,b],c]$ e $[a,[b,c]]$ e chegar à relação $[[a,b^{-1}c],b] = 1$.

154. Consideremos o grupo simétrico $S(E)$ do conjunto

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

e seja A o subgrupo gerado pelas permutações $(1\ 3)(2\ 4)$, $(5\ 7)(6\ 8)$, $(a\ b)(8\ c)$, $(e\ g)(f\ h)$, $(1\ 3)(5\ 7)(a\ c)$, $(1\ 2)(3\ 4)(e\ h)$, $(5\ 6)(7\ 8)(e\ f)(g\ h)$, $(a\ b)(c\ d)$.

a) Mostrar que $o(A) = 256$.

b) $D(A)$ é um subgrupo de ordem 16 gerado pelas 4 primeiras permutações acima.

c) O elemento $(a\ c)(b\ d)(e\ g)(f\ h)$ pertence a $D(A)$ e não é um comutador.

§5 - PRODUTOS DE GRUPOS

5.1 - PRODUTO DIRETO DE UMA FAMÍLIA FINITA DE SUBGRUPOS

Seja $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ uma família não vazia de grupos multiplicativos e seja $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ o produto cartesiano dos conjuntos $G_1, G_2, \cdots, G_n$; se $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ são dois elementos quaisquer de G colocaremos, por definição,

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n) \qquad (20).$$

Fica assim definida uma operação de multiplicação sôbre o conjunto G e é fácil verificar que esta operação define uma estrutura de grupo sôbre G; diremos, então que $(G,\cdot)$ é o *grupo produto da família* $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ ou que $(G,\cdot)$ é o *grupo produto dos grupos* $(G_1,\cdot),(G_2,\cdot),\cdots,(G_n,\cdot)$. Notemos, simplesmente, que o elemento unidade de G é a n-upla $e=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ onde cada e_i é o elemento unidade de G_i e que, para todo elemento $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ de G tem-se

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{-1}=(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1}).$$

É imediato que $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ é comutativo se, e sòmente se, cada G_i é comutativo; além disso, se cada G_i é finito de ordem S_i, então G é finito de ordem $s_1s_2\cdots s_n$. Verifica-se ainda que se H_i é um subgrupo (resp., subgrupo normal) de G_i, então, $H=H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$ é um subgrupo (resp., subgrupo normal) do grupo produto G.

No caso em que cada G_i é um grupo aditivo é natural substituir (20) pela notação aditiva e dizer que $(G,+)$ é o *grupo soma da família* $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ ou que $(G,+)$ é o *grupo soma dos grupos* $(G_1,+),\cdots,(G_n,+)$.

Consideremos, novamente, o grupo produto G da família $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ de grupos multiplicativos. Para cada índice j, com $1\leq j\leq n$ e para todo $a_j\in G_j$ ponhamos

$$a_j'=(e_1,\cdots,e_{j-1},a_j,e_{j+1},\cdots,e_n);$$

é fácil verificar que a aplicação $f_j\colon G_j\to G$ definida por $f(a_j)=a_j'$ é um monomorfismo de G_j em G, logo, $Im(f_j)=G_j'$ é um subgrupo de G isomorfo ao grupo G_j e, além disso, é imediato que G_j' é normal em G. Para tôda n-upla $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in G$, temos

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1'a_2'\cdots a_n',$$

logo,

$$G=G_1'G_2'\cdots G_n' \tag{21}$$

Finalmente, mostraremos que

$$G_i'\cap(G_1'\cdots G_{i-1}'G_{i+1}'\cdots G_n')=\{e\} \tag{22}$$

para $i=1,2,\cdots,n$, de onde resulta, em particular, que

$$G_i'\cap G_j'=\{e\}$$

se $i\neq j$ $(1\leq i,j\leq n)$. Com efeito, um elemento de $G_1'\cdots G_{i-1}'G_{i+1}'\cdots G_n'$ é da forma

$$a_1'\cdots a_{i-1}'a_{i+1}'\cdots a_n'=(a_1,\cdots,a_{i-1},e_i,a_{i+1},\cdots,a_n)$$

e se êste elemento pertence a G_i' devemos ter $a_j=e_j$ para todo $j\neq i$, logo, $a_1'\cdots a_{i-1}'a_{i+1}'\cdots a_n'=e$, o que termina a verificação de (21).

As considerações acima serão utilizadas para definir a noção de produto direto de uma família de subgrupos:

DEFINIÇÃO 18 - Diz-se que um grupo multiplicativo G é *produto direto* de uma família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ de subgrupos de G se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

a) cada H_i é normal em G;

b) $G=H_1H_2\cdots H_n$;

c) $H_i\cap(H_1\cdots H_{i-1}H_{i+1}\cdots H_n)=\{1\}$ para $i=1,2,\cdots,n$.

Notemos que se G é comutativo, então a condição a) é supérflua; se G é aditivo e se estiverem verificadas as condições b) e c) (com as evidentes mudanças de notação) diremos que G é *soma direta* da família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$.

EXEMPLO 73 - Se $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ é uma família de grupos multiplicativos e se G é o grupo produto desta família, então as fórmulas (21) e (22) nos mostram que G é o produto direto da família $(G_i)_{1\leq i\leq n}$, onde G_i' é o conjunto de todos os elementos $(e_1,\cdots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\cdots,e_n)$ com a_i em G_i.

TEOREMA 45 - Um grupo multiplicativo G é o produto direto de uma família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ de subgrupos de G se, e sòmente se, estiverem verificadas as seguintes condições:

1) todo elemento de H_i é permutável com qualquer elemento de H_j se $i\neq j$;

2) todo elemento x de G pode ser representado de modo único sob a forma $x=a_1a_2\cdots a_n$, onde $a_i\in H_i$ para $i=1,2,\cdots,n$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que G seja o produto direto da família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$; em virtude da condição c) temos $H_i\cap H_j=\{1\}$ se $i\neq j$, pois, $H_j\subset H_1\cdots H_{j-1}H_{j+1}\cdots H_n$. Consideremos um elemento qualquer a de H_i e um elemento qualquer b de H_j $(i\neq j)$; conforme a condição a), o comutador

$$[a,b]=(aba^{-1})b^{-1}=a(ba^{-1}b^{-1})$$

pertence tanto a H_i como a H_j, logo, $[a,b]\in H_i\cap H_j=\{1\}$, de onde vem, $ab=ba$, o que termina a verificação de 1). A condição b) nos mostra que para todo x em G existem elementos $a_1,a_2,\cdots,a_n$, com $a_i\in H_i$, tais que $x=a_1a_2\cdots a_n$; falta, portanto, verificar que esta representação de x é única, isto é, se $x=b_1b_2\cdots b_n$, com $b_i\in H_i$, então $a_i=b_i$ para $i=1,2,\cdots,n$. Ora, utilizando-se 1), temos

$$b_1^{-1}a_1=(b_2\cdots b_n)(a_2\cdots a_n)^{-1}=(b_2\cdots b_n)(a_2^{-1}\cdots a_n^{-1})=(b_2a_2^{-1})\cdots(b_na_n^{-1}),$$

logo, $b_1^{-1}a_1\in H_1\cap(H_2\cdots H_n)=\{1\}$, de onde vem, $a_1=b_1$. De modo

análogo conclui-se que $a_i = b_i$ para $i = 2,\cdots,n$, o que termina a verificação de 2).

Reciprocamente, suponhamos que as condições 1) e 2) estejam satisfeitas; de 2) resulta que todo elemento x de G pode ser representado sob a forma $x = a_1a_2\cdots a_n$, com $a_i \in H_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, logo, $G = H_1H_2\cdots H_n$, isto é, vale a condição b) da definição 18. Além disso, se $y = b_1b_2\cdots b_n$, com $b_i \in H_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, é um outro elemento qualquer de G temos, em virtude de 1),

$$xy = (a_1b_1)(a_2b_2)\cdots(a_nb_n) \qquad (23).$$

Verificaremos, a seguir, as condições a) e c) da definição 18.

c) Se $x \in H_i \cap (H_1\cdots H_{i-1}H_{i+1}\cdots H_n)$ temos $x = a_i$ e

$$x = a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n,$$

com $a_j \in H_j$ para $j = 1,2,\cdots,n$, logo,

$$1\cdots 1a_i 1\cdots 1 = a_1\cdots a_{i-1}1a_{i+1}\cdots a_n,$$

onde cada j-ésimo fator dêstes produtos pertence a H_j; portanto, conforme a condição 2), temos $a_i = 1$ e então, $x = 1$.

a) Seja a um elemento qualquer de H_i e seja $x = a_1a_2\cdots a_n$ um elemento qualquer de G; de acôrdo com (23), temos

$$xax^{-1} = (a_1a_2\cdots a_n)a(a_1a_2\cdots a_n)^{-1} = (a_1a_2\cdots a_n)a(a_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_n^{-1}) =$$
$$= (a_1a_1^{-1})\cdots(a_{i-1}a_{i-1}^{-1})(a_iaa_i^{-1})(a_{i+1}a_{i+1}^{-1})\cdots(a_na_n^{-1}) = a_iaa_i^{-1} \in H_i,$$

logo, H_i é normal em G. ∎

A condição c) da definição 18 pode ser dada sob a forma

$$(H_1\cdots H_i)\cap H_{i+1} = \{1\} \qquad (24),$$

para $i = 1,2,\cdots,n-1$; precisamente, demonstraremos o resultado mais geral

TEOREMA 46 - Se uma família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ de subgrupos normais de G é tal que

$$(H_1\cdots H_i)\cap H_{i+1} = \{1\},$$

para $i = 1,2,\cdots,n-1$, então $H_1H_2\cdots H_n$ é um subgrupo normal de G que é o produto direto da família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$.

DEMONSTRAÇÃO - Por indução finita sôbre n basta considerar o caso em que $n = 2$; já sabemos que H_1H_2 é um subgrupo normal de G e vamos, então, verificar as condições 1) e 2) do teorema 45.

1) Esta condição resulta, imediatamente, da hipótese $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

2) Suponhamos que $a_1a_2 = b_1b_2$, com a_i e b_i em H_i $(i = 1,2)$; desta relação vem

$$b_1^{-1}a_1 = b_2a_2^{-1},$$

logo, $b_1^{-1}a_1 \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$, de onde resulta, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. ∎

COROLÁRIO - Para que um grupo G seja o produto direto de uma família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$, de subgrupos de G, é necessário e suficiente que estejam verificadas as condições a) e b) da definição 18 e a seguinte

c') $(H_1\cdots H_i)\cap H_{i+1} = \{1\}$, para $i = 1,2,\cdots,n-1$.

Suponhamos que o grupo multiplicativo G seja o produto direto da família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$, de subgrupos de G e consideremos a aplicação $f_i: G \to H_i$ definida por $f_i(x) = a_i$ para todo $x = a_1a_2\cdots a_n$. É imediato que f_i é um homomorfismo, logo, f_i é um epimorfismo e, além disso, temos

$$Ker(f_i) = H_1\cdots H_{i-1}H_{i+1}\cdots H_n,$$

logo, de acôrdo com o corolário do teorema do homomorfismo, temos

$$G/(H_1\cdots H_{i-1}H_{i+1}\cdots H_n) \cong H_i,$$

para $i = 1,2,\cdots,n$. No caso particular em que $n = 2$, temos os seguintes isomorfismos

$$(H_1H_2)/H_1 \cong H_2 \quad \text{e} \quad (H_1H_2)/H_2 \cong H_1.$$

Finalmente, suponhamos que G seja o produto direto da família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ de subgrupos de G e consideremos o grupo produto $H = H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$ desta família. Todo elemento x, de G, pode ser representado de um único modo sob a forma $x = a_1a_2\cdots a_n$, onde $a_i \in H_i$, para $i = 1,2,\cdots,n$; fazendo-se corresponder a êste elemento a n-upla $(a_1,a_2,\cdots,a_n) \in H$, obtém-se uma aplicação bijetora f de G em H e a fórmula (23) nos mostra que f é um homomorfismo. Demonstramos assim o seguinte

TEOREMA 47 - Se um grupo G é o produto direto de uma família $(H_i)_{1\leq i\leq n}$, de subgrupos de G, então G é isomorfo ao grupo produto $H = H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$ da família (H_i).

EXERCÍCIOS

155. Mostrar que o grupo de Klein V_4 é isomorfo ao produto do grupo aditivo $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\cdot 2$ por si mesmo.

156. Seja G o grupo produto da família $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ de grupos multiplicativos e seja $x_i \in G_i$ um elemento de ordem finita: demonstrar que $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$ tem ordem finita e

$$o(x) = mmc(o(x_1),o(x_2),\cdots,o(x_n)).$$

157. Com as notações do exercício anterior, supondo-se que cada G_i seja um grupo cíclico finito, demonstrar que o grupo produto G é cíclico se, e sòmente se, $mdc(o(G_i),o(G_j)) = 1$ se $i \neq j$ $(1 \leq i,j \leq n)$.

158. Demonstrar que se A e B são subgrupos normais de um grupo G e se $A \cap B = \{1\}$, então $xy = yx$ para todo x em A e para todo y em B.

159. Suponhamos que um grupo G seja o produto direto de dois subgrupos A e B de G; verificar as seguintes propriedades:

a) Se A' é um subgrupo normal de A, então A' é normal em G;

b) $D(G)$ é o produto direto de $D(A)$ por $D(B)$;

c) $C(G)$ é o produto direto de $C(A)$ por $C(B)$.

160. Demonstrar que um grupo G é o produto direto de dois subgrupos A e B de G se, e sòmente se, as seguintes condições estiverem verificadas: a) para todo x em G existe $a \in A$ e existe $b \in B$ tais que $x = ab$; b) se $a \in A$ e se $b \in B$, então $ab = ba$.

5.2 - GRUPOS DECOMPONÍVEIS E INDECOMPONÍVEIS

Todo grupo multiplicativo $G \neq \{1\}$ é o produto direto dos subgrupos G e $\{1\}$; um grupo que só admite esta decomposição como produto direto é denominado grupo indecomponível. Precisamente, daremos a seguinte

DEFINIÇÃO 19 - Diz-se que um grupo multiplicativo $G \neq \{1\}$ é *decomponível* se, e sòmente se, G é o produto direto de dois subgrupos distintos de G; caso contrário, diz-se que G é *indecomponível*.

Portanto, se $G \neq \{1\}$ é decomponível, existem dois subgrupos normais H_1 e H_2, com $H_i \neq G$ $(i = 1,2)$, tais que G seja o produto direto de H_1 e H_2; notemos que, neste caso, temos $H_i \neq \{1\}$, para $i = 1,2$. Observemos que se $G \neq \{1\}$ é o produto direto de uma família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subgrupos próprios e se $n \geq 2$, então G é decomponível, pois, conforme o teorema 46, G é o produto direto de H_1 e $H_2 \cdots H_n$.

EXEMPLO 74 - O grupo de Klein $V_4 = \{1, a, b, ab\}$ (ver o exemplo 35) é decomponível, pois, V_4 é o produto direto dos subgrupos $\{1, a\}$ e $\{1, b\}$.

EXEMPLO 75 - O grupo $(\mathbf{Z}, +)$ é indecomponível. Com efeito, se H_1 e H_2 são dois subgrupos próprios de $\mathbf{Z}$, temos $H_i = \mathbf{Z} \cdot m_i$, com $m_i > 1$ $(i = 1,2)$, logo, $H_1 \cap H_2 = \mathbf{Z} \cdot m \neq \{0\}$, pois, $m = mmc(m_1, m_2)$.

EXEMPLO 76 - Todo grupo cíclico infinito é indecomponível.

EXEMPLO 77 - Todo grupo simples é indecomponível; em particular, todo grupo finito de ordem prima é indecomponível.

EXEMPLO 78 - Seja $G = [a]$ um grupo cíclico finito de ordem p^s (p é um número natural primo e $s \geq 1$); conforme o teorema 27, os únicos subgrupos de G são $[a], [a^p], \cdots, [a^{p^{s-1}}], \{1\}$ e temos

$$[a] \supset [a^p] \supset \cdots \supset [a^{p^{s-1}}] \supset \{1\},$$

logo, G é indecomponível.

TEOREMA 48 - Todo grupo cíclico $G = [a]$, de ordem

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_s^{a_s},$$

onde cada p_i é um número natural primo, $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq s)$ e $s \geq 2$, é o produto direto de uma família de subgrupos (cíclicos) de ordens $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \cdots, p_s^{a_s}$.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com o teorema 27, para cada índice i $(1 \leq i \leq s)$, existe um único subgrupo H_i de ordem $p_i^{a_i}$ e temos

$$H_i = [a_i^{n_i}],$$

onde $n_i = n/p_i^{a_i}$; ponhamos $G' = H_1 H_2 \cdots H_s$. G' é um subgrupo de G e sua ordem é divisível por $p_i^{a_i}$, pois, $G' \supset H_i$, logo, a ordem de G' é divisível por $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s} = n$, de onde vem, $G = H_1 H_2 \cdots H_s$. Se x é um elemento qualquer de $H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_s$, então sua ordem divide n_i, logo, se $x \in H_i$ temos $o(x) | p_i^{a_i}$, de onde vem, $o(x) | mdc(n_i, p_i^{a_i})$, ou seja, $o(x) = 1$; portanto, $H_i \cap (H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_s) = \{1\}$, para $i = 1, 2, \cdots, s$. Ficam assim verificadas as condições da definição 18. ∎

COROLÁRIO - Todo grupo cíclico finito $G \neq \{1\}$, que não é um p-grupo, é decomponível.

DEFINIÇÃO 20 - Diz-se que um grupo multiplicativo $G \neq \{1\}$ é *semi-simples* se, e sòmente se, G é o produto direto de uma família de subgrupos simples.

Suponhamos que o grupo G seja semi-simples, logo, existe uma família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subgrupos simples tal que G seja o produto direto desta família. Pondo-se $K_i = H_1 \cdots H_i$ resulta, conforme o teorema 46, que K_{i+1} é o produto direto de K_i e H_{i+1}, para $i = 1, 2, \cdots, n-1$ e, além disso, temos $K_n = G$ e $K_{i+1} \supset K_i$, K_i é subgrupo normal de K_{i+1} e $K_{i+1}/K_i \cong H_i$, logo, a cadeia de subgrupos

$$G = K_n \supset K_{n-1} \supset \cdots K_1 \supset \{1\}$$

é uma seqüência de composição de G (teorema 39); portanto, em virtude do teorema de Jordan-Hölder, temos o seguinte

TEOREMA 49 - Se um grupo semi-simples G é o produto direto de duas famílias $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(H_j)_{1 \leq j \leq m}$ de grupos simples, então $n = m$ e existe uma permutação σ do conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $G_i \cong H_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

EXERCÍCIOS

161. Mostrar que o grupo aditivo $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\cdot 6$ é decomponível e que o grupo S_3 é indecomponível.

162. Mostrar que o grupo $(\mathbf{R}^*,\cdot)$ é decomponível.

163. Mostrar que o grupo $(\mathbf{C},+)$ é decomponível.

164. Demonstrar que o grupo $(\mathbf{Q},+)$ é indecomponível.

165. Demonstrar que todo grupo de ordem pq, onde p e q são números naturais primos, $p>q$ e $p\not\equiv 1$ (mod. q) é decomponível. Sugestão: exercício 131.

EXERCÍCIOS SÔBRE O §5

166. Sejam G_1 e G_2 dois grupos multiplicativos, seja $G_1\times G_2$ o grupo produto de G_1 e G_2 e seja $x=(x_1,x_2)$ um elemento qualquer de $G_1\times G_2$, consideremos as aplicações $f_1\colon G_i\to G_1\times G_2$, $q_i\colon G_1\times G_2\to G_i$ $(i=1,2)$; $0_{1,2}\colon G_1\to G_2$ e $0_{2,1}\colon G_2\to G_1$, definidas por

$$f_1(x_1)=(x_1,e_2),\quad f_2(x_2)=(e_1,x_2),\quad q_i(x)=x_i,$$
$$0_{1,2}(x_1)=e_2\quad\text{e}\quad 0_{2,1}(x_2)=e_1.$$

Verificar as seguintes propriedades:

a) $f_i\in Hom(G_i,G_1\times G_2)$, $q_i\in Hom(G_1\times G_2,G_i)$, $0_{1,2}\in Hom(G_1,G_2)$ e $0_{2,1}\in Hom(G_2,G_1)$;

b) $q_i\circ f_i=1_{G_i}$ $(i=1,2)$;

c) $q_1\circ f_2=0_{2,1}$ e $q_2\circ f_1=0_{1,2}$;

d) $Im(f_i)$ é um subgrupo normal de $G_1\times G_2$;

e) $G_1\times G_2=Im(f_1)\cdot Im(f_2)$;

f) $Im(f_1)\cap Im(f_2)=\{(e_1,e_2)\}$.

167. Sejam G, G_1 e G_2 três grupos multiplicativos e suponhamos que existam aplicações g_i e p_i $(i=1,2)$ tais que

1) $g_i\in Hom(G_i,G)$ e $p_i\in Hom(G,G_i)$;

2) $p_i\circ g_i=1_{G_i}$;

3) $p_1\circ g_2=0_{2,1}$ e $p_2\circ g_1=0_{1,2}$;

4) $G=Im(g_1)\cdot Im(g_2)$.

Nestas condições, demonstrar que existe um isomorfismo $\varphi\colon G\to G_1\times G_2$ tal que $f_i=\varphi\circ g_i$ e $p_i=q_i\circ\varphi$ para $i=1,2$, onde f_i e q_i são os homomorfismos definidos no exercício anterior. Sugestão: para todo x em G colocar $\varphi(x)=[(f_1\circ p_1)(x)]\cdot[(f_2\circ p_2)(x)]$.

168. Demonstrar que todo subgrupo normal $N\neq\{1\}$, de um grupo semi-simples, também é semi-simples.

169. Suponhamos que um grupo multiplicativo G seja o produto direto de uma família $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ de subgrupos de G; seja $(n_i)_{0\leq i\leq r}$ uma família de números naturais tais que $n_0=0<n_1<n_2<\cdots<n_{r-1}<n_r=n$ e ponhamos $H_1=G_1G_2\cdots G_{n_1}$, $H_2=G_{n_1+1}\cdots G_{n_2},\cdots$, $H_r=G_{n_{r-1}+1}\cdots G_n$. Verificar as seguintes propriedades:

a) H_{j+1} $(0\leq j\leq r\text{-}1)$ é o produto direto dos subgrupos
$$G_{n_j+1},G_{n_j+2},\cdots,G_{n_{j+1}};$$

b) G é o produto direto de $H_1,H_2,\cdots,H_r$.

Nos exercícios 170-174 utilizaremos as mesmas notações que foram introduzidas no exercício 98.

170. Demonstrar que o grupo Γ_n dos elementos inversíveis do anel $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\cdot n$, onde $n=2^s$ e $s\geq 3$, é o produto direto de um grupo cíclico de ordem 2^{s-2} por um grupo cíclico de ordem 2. Sugestão: mostrar que para todo $k\in\mathbf{N}$ tem-se $3^{2^k}\equiv 1+2^{k+2}$ (mod. 2^{k+3}) e concluir daí que existe em Γ_{2^s} um elemento de ordem 2^{s-2}.

171. Sejam r e s dois números naturais tais que $r>1$, $s>1$ e $mdc(r,s)=1$; demonstrar que $\Gamma_{rs}\cong\Gamma_r\times\Gamma_s$. Sugestão: mostrar, inicialmente, que $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(rs)\cong\mathbf{Z}/\mathbf{Z}r\times\mathbf{Z}/\mathbf{Z}s$ (como anéis) e utilizar o exercício 16 do Capítulo IV. (Observação: a noção de anel produto está definida no exercício 3 do Capítulo IV).

172. Com as hipóteses do exercício anterior, mostrar que
$$\Phi(rs)=\Phi(r)\,\Phi(s),$$
onde Φ é o indicador de Euler. Concluir daí que se $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_t^{a_t}$, onde cada p_i é um número natural primo, $p_i\neq p_j$ se $i\neq j$ $(1\leq i,j\leq t)$ e $a_i\geq 1$, então
$$\Phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_t}).$$
Sugestão: exercício 171.

173. Com as notações do exercício anterior, demonstrar que
$$\Gamma_n\cong\Gamma_{p_1^{a_1}}\times\Gamma_{p_2^{a_2}}\times\cdots\times\Gamma_{p_t^{a_t}}$$
Sugestão: exercício 171.

174. Demonstrar qne o grupo Γ_n $(n>1)$ é cíclico se, e sòmente se, n assume um dos seguintes valores: 2, 4, p^s ou $2p^s$, onde p é um número natural primo ímpar e $s\geq 1$. Sugestão: exercícios 173, 170, 156 e 98.

§6 - GRUPOS ABELIANOS FINITOS

Neste parágrafo usaremos a notação aditiva, pois todos os grupos que consideraremos serão abelianos. O principal resultado que estabeleceremos é o teorema 54, que nos dará a decomposição de um grupo abeliano finito como soma direta de p-subgrupos cíclicos.

Seja G um grupo aditivo finito de ordem $n>1$ e seja
$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$$
a decomposição de n em fatôres primos ($p_i>1$ é primo, $p_i\neq p_j$ se $i\neq j$ e $a_i\geq 1$). Inicialmente, observemos que se p é um número natural primo e se $p|n$, então existe em G um elemento de ordem p. Êste resultado é uma conseqüência imediata do

primeiro teorema de Sylow e no caso em questão também pode ser demonstrado diretamente. Observemos ainda que se x é um elemento qualquer de G e se existem números inteiros a e b tais que $mdc(a,b)=1$, $o(x)|a$ e $o(x)|b$, então $x=0$.

Para cada índice i, com $1\leqslant i\leqslant s$, ponhamos

$$H_i=\{x\in G \mid p_i^{a_i}x=0\};$$

temos o seguinte

LEMA 17 - H_i é um p_i-subgrupo de G e $H_i\neq\{0\}$.

DEMONSTRAÇÃO - De acôrdo com a observação feita acima existe em G um elemento x_0 de ordem p_i e é imediato que $x_0\in H_i$, logo, $H_i\neq\{0\}$. Se x e y são dois elementos quaisquer de H_i, temos

$$p_i^{a_i}(x-y)=p_i^{a_i}x-p_i^{a_i}y=0-0=0,$$

logo, $x-y\in H_i$; portanto, H_i é um subgrupo de G. Finalmente, suponhamos por absurdo que a ordem de H_i não seja uma potência de p_i; como $o(H_i)|n$ resulta que existe um fator primo p_j de n, com $p_j\neq p_i$, tal que $p_j|o(H_i)$ e então existe z em H_i tal que $o(z)=p_j$. Para êste elemento z temos $p_i^{a_i}z=0$ e $p_jz=0$, onde $mdc(p_i^{a_i},p_j)=1$, logo, $z=0$ e chegamos assim a uma contradição. ∎

Com as notações acima demonstraremos o seguinte

TEOREMA 50 - O grupo G é a soma direta da família $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta verificar as condições b) e c) da definição 18.

b) Pondo-se $n_i=n/p_i^{a_i}$ e notando-se que $n_1,n_2,\cdots,n_s$ são primos entre si resulta que existem números inteiros $h_1,h_2,\cdots,h_s$ tais que

$$h_1n_1+h_2n_2+\cdots+h_sn_s=1 \qquad (25).$$

Seja x um elemento qualquer de G e ponhamos

$$x_i=(h_in_i)x$$

para $i=1,2,\cdots,s$; temos

$$p_i^{a_i}x_i=p_i^{a_i}[(h_in_i)x]=(h_in)x=h_i(nx)=0,$$

logo, $x_i\in H_i$. Além disso, em virtude de (25), temos

$$x=1\cdot x=(h_1n_1+h_2n_2+\cdots+h_sn_s)x=x_1+x_2+\cdots+x_s,$$

logo, $H=H_1+H_2+\cdots+H_s$.

c) Seja x um elemento qualquer de $H_i\cap(\sum_{j\neq i}H_j)$, logo,

$$p_i^{a_i}x=0 \quad \text{e} \quad x=\sum_{j\neq i}y_j,$$

onde $y_j\in H_j$; como $p_j^{a_j}|n_i$ $(j\neq i)$, temos $n_iy_j=0$, de onde vem, $n_ix=0$.

Em resumo, valem as igualdades $p_i^{a_i}x=0$ e $n_ix=0$, onde $p_i^{a_i}$ e n_i são primos entre si, logo, $x=0$. ∎

COROLÁRIO - $o(H_i)=p_i^{a_i}$ para $i=1,2,\cdots,s$.

DEMONSTRAÇÃO - Conforme o lema 25, temos $o(H_i)=p_i^{b_i}$; por outro lado, o teorema acima nos mostra que

$$n=o(G)=o(H_1+H_2+\cdots+H_s)=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_s^{b_s}$$

e daqui concluímos, em virtude do teorema fundamental da Aritmética, que $b_i=a_i$ para $i=1,2,\cdots,s$. ∎

Podemos completar o teorema 50 demonstrando que a decomposição obtida do grupo G é única a menos da ordem das parcelas:

TEOREMA 51 - Se o grupo G é a soma direta de uma família $(H'_j)_{1\leqslant j\leqslant t}$ de q_j-subgrupos não nulos (q_j número primo; $q_1,q_2,\cdots,q_t$ distintos dois a dois), então $s=t$ e, usando-se uma notação conveniente, temos $H_i=H'_i$ para $i=1,2,\cdots,s$.

DEMONSTRAÇÃO - Ponhamos $o(H'_j)=q_j^{b_j}$ para $j=1,2,\cdots,t$; como G é a soma direta da família (H'_j) temos

$$n=o(G)=q_1^{b_1}q_2^{b_2}\cdots q_t^{b_t},$$

logo, em virtude do teorema fundamental da Aritmética, temos $s=t$, $q_i=p_i$ e $b_i=a_i$ para $i=1,2,\cdots,s$ (usando-se uma notação conveniente). Se x é um elemento qualquer de H'_i, temos $p_i^{a_i}x=0$, pois, $o(H'_i)=p_i^{a_i}$; portanto, $H'_i\subset H_i$ e como $o(H'_i)=o(H_i)$ concluímos que $H'_i=H_i$. ∎

Os teoremas 50 e 51 nos mostram que todo grupo abeliano finito e não nulo pode ser representado de modo único (a menos da ordem das parcelas) como soma direta de uma família finita de p-subgrupos não nulos. Para completar êste resultado precisamos estudar a decomposição de um p-subgrupo abeliano finito $G\neq\{0\}$. Demonstraremos, inicialmente, o seguinte

LEMA 18 - Se $G\neq\{0\}$ é um p-grupo abeliano, e se d é um elemento de G de ordem máxima p^k, então G é a soma direta do subgrupo cíclico $[d]$ e de um subgrupo N de G.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto $\mathcal{F}$ de todos os subgrupos H de G tais que $H\cap[d]=\{0\}$ e ordenemos $\mathcal{F}$ por inclusão; é imediato que $\mathcal{F}$ é finito e $\mathcal{F}\neq\emptyset$, pois, $\{0\}\cap[d]=\{0\}$, logo, existe em $\mathcal{F}$ um elemento maximal N (exemplo 22, Capítulo VII). Notemos que se N' é um subgrupo qualquer de G

e se $N \subset N'$, com $N \neq N'$, então $N' \cap [d] \neq \{0\}$; isto resulta do fato que N é elemento maximal de $\mathcal{F}$.

De acôrdo com o teorema 46, o subgrupo $G_0 = N + [d]$ é a soma direta de N e $[d]$; se demonstrarmos que $G_0 = G$ obteremos a tese do lema. Suponhamos, por absurdo, que $G_0 \neq G$; afirmamos, neste caso, que existe x em G tal que $x \notin G_0$ e $px \in G_0$. Com efeito, existe por hipótese um elemento x' em G que não pertence a G_0 e para êste elemento x' temos $o(x') = p^i$, com $i \geqslant 1$, logo, existe um menor número natural não nulo j tal que $p^j x' \in G_0$; se $j = 1$ basta escolher $x = x'$ e se $j > 1$ escolheremos $x = p^{j-1}x'$.

De $px \in G_0$ resulta que $px = md + h$, com m inteiro e h em N, logo,

$$0 = p^k x = p^{k-1}(px) = p^{k-1}md + p^{k-1}h,$$

de onde vem, $p^{k-1}md = 0$, pois, $N \cap [d] = \{0\}$; daqui concluímos que $p^k | (p^{k-1}m)$, logo, $m = pm'$. Por outro lado, temos

$$h = px - md = p(x - m'd),$$

onde $x - m'd \notin N$, pois, $x \notin G_0$, logo,

$$N' = N + [x - m'd] \supset N \quad \text{e} \quad N' \neq N$$

e daqui resulta que $N' \cap [d] \neq \{0\}$, ou seja, existe $rd \in N'$, com $r \in \mathbf{Z}$ e $rd \neq 0$. Para êste elemento rd temos $rd = h_0 + s(x - m'd)$, com h_0 em N e s inteiro, logo, $sx \in N + [d] = G_0$. Observemos ainda que $p \nmid s$, pois, no caso contrário, teríamos $s(x - m'd) \in N$, logo, $rd \in N$, contra o fato que $N \cap [d] = \{0\}$. Fica assim demonstrado que $sx \in G_0$ e $px \in G_0$ com s e p primos entre si; notando-se que existem números inteiros u e v tais que $us + vp = 1$ concluímos que $x = u(sx) + v(px)$ e então $x \in G_0$, contra a definição do elemento x. ∎

Com o auxílio dêste lema podemos agora demonstrar o seguinte

TEOREMA 52 - Todo p-grupo abeliano $G \neq \{0\}$ é a soma direta de uma família finita de grupos cíclicos.

DEMONSTRAÇÃO - Seja p^s a ordem de G e vamos fazer a demonstração por indução finita sôbre o número natural $s \geqslant 1$; se $s = 1$, então G é cíclico e nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que $s > 1$ e que o teorema seja verdadeiro para todo p-grupo abeliano finito de ordem p^t, com $1 \leqslant t < s$. Seja d um elemento de G de ordem máxima p^k; se $k = s$, então G é cíclico e, neste caso, nada temos a demonstrar. Se $k < s$, então o lema 18 nos mostra que G é a soma direta de $N_1 = [d]$ com um

subgrupo N de G; temos $N \neq \{0\}$ e $N \neq G$, logo, $o(N) = p^t$ e $1 \leqslant t < s$, de onde vem, conforme a hipótese de indução, que N é a soma direta de uma família $(N_i)_{2 \leqslant i \leqslant m}$ de subgrupos cíclicos e é imediato que G é a soma direta da família $(N_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, onde cada N_i é um grupo cíclico. ∎

Não temos para o teorema acima a parte de unicidade análoga a do teorema 51; vejamos um exemplo. Seja $H_1 = [a]$ um grupo cíclico de ordem 8, seja $H_2 = [b]$ um grupo cíclico de ordem 4 e consideremos o grupo soma $H = H_1 \times H_2$, que tem ordem 32. Sabemos que H é a soma direta dos 2-subgrupos $H_1' = [a_0]$ e $H_2' = [b_0]$, onde $a_0 = (a, 0)$ e $b_0 = (0, b)$; pondo-se $c = a_0 + b_0$ e $d = 4a_0 + b_0$, é fácil verificar que H também é a soma direta dos 2-subgrupos cíclicos $H_1'' = [c]$ e $H_2'' = [d]$ e é imediato que os quatro grupos H_1', H_2', H_1'' e H_2'' são distintos dois a dois. Observemos que, no entanto, o número de parcelas destas decomposições de H é igual a 2 e que $o(H_i') = o(H_i'')$ para $i = 1, 2$. Tendo em vista uma generalização dêste resultado demonstraremos, inicialmente, o seguinte

LEMA 19 - Se $H = [a] \neq \{0\}$ é um p-grupo cíclico de ordem p^s, então o conjunto $H_1 = \{x \in H \mid px = 0\}$ é um subgrupo de ordem p.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que os elementos $ip^{s-1}a$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ pertencem a H_1 e são distintos dois a dois. Por outro lado, seja $x = ja$, com $1 \leqslant j \leqslant p^s - 1$, um elemento qualquer de H e suponhamos que $x \in H_1$, logo, $pja = 0$, de onde vem, $p^s | (pj)$, ou, $p^{s-1} | j$ e então $j = ip^{s-1}$, onde $1 \leqslant i \leqslant p-1$. ∎

TEOREMA 53 - Se um p-grupo abeliano $G \neq \{0\}$ é a soma direta de duas famílias $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ e $(H_j')_{1 \leqslant j \leqslant s}$ de subgrupos cíclicos de G e se $H_i \neq \{0\}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ e $H_j' \neq \{0\}$ $(j = 1, 2, \cdots, s)$, então $r = s$ e, usando-se uma notação conveniente, temos $o(H_i) = o(H_i')$ para $i = 1, 2, \cdots, r$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja p^d a ordem de G e vamos fazer a demonstração por indução finita sôbre o número natural $d \geqslant 1$ notando, inicialmente, que o teorema é trivial para $d = 1$; suponhamos, então, que $d > 1$ e que o teorema acima seja verdadeiro para todo p-grupo de ordem $p^{d'}$, onde $1 \leqslant d' < d$. Ponhamos $H_i = [a_i]$ e $o(H_i) = p^{e_i}$ para $i = 1, 2, \cdots, r$ e suponhamos que

$e_1 \geqslant e_2 \geqslant \cdots \geqslant e_r \geqslant 1$ (usando-se uma notação conveniente); seja

$$G_p = \{x \in G \mid px = 0\}$$

e

$$G^{(p)} = \{py \mid y \in G\}.$$

É fácil verificar que G_p e $G^{(p)}$ são subgrupos de G (ver o exercício 63); afirmamos que $o(G_p) = p^r$. Com efeito, um elemento x de G pode ser representado de um único modo (a menos da ordem das parcelas) sob a forma $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, onde $x_i \in H_i$ para $i = 1, 2, \cdots, r$ e temos $px = 0$ se, e sòmente se, $px_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$, pois, G é a soma direta da família $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ e $px_i \in H_i$; portanto, em virtude do lema 19, temos $o(G_p) = p^r$, o que termina a verificação da afirmação feita acima.

Pondo-se $H'_j = [b_j]$ e $o(H'_j) = p^{f_j}$ para $j = 1, 2, \cdots, s$ e supondo-se que $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_s \geqslant 1$ (com uma notação conveniente) o cálculo acima nos mostra que $o(G_p) = p^s$, logo, $r = s$.

Se $e_1 = 1$ temos $G = G_p$ e daqui resulta, imediatamente, que $f_1 = 1$; portanto, $o(H_i) = o(H'_i) = 1$ para $i = 1, 2, \cdots, r$ e, neste caso, o teorema está demonstrado.

Suponhamos que exista um $e_i > 1$ e indiquemos por m $(1 \leqslant m \leqslant r)$ o maior índice i tal que $e_i > 1$; de acôrdo com o que vimos no caso anterior, temos $f_1 > 1$, logo, existe um maior índice n $(1 \leqslant n \leqslant r)$ tal que $f_n > 1$. É fácil verificar que $G^{(p)}$ é a soma direta das famílias $(pH_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ e $(pH'_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de subgrupos cíclicos; daqui resulta, em particular, que $o(G^{(p)}) = p^{d'}$, onde

$$d' = (e_1 - 1) + \cdots + (e_m - 1) = (f_1 - 1) + \cdots + (f_n - 1) < d.$$

Em virtude da hipótese de indução temos $m = n$ e $e_i = f_i$ para $i = 1, 2, \cdots, m$; em resumo, demonstramos que $r = s$ e $e_i = f_i$ para $i = 1, 2, \cdots, r$. ∎

LEMA 20 - Sejam G e G' dois grupos abelianos finitos; suponhamos que G seja a soma direta de uma família $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de subgrupos cíclicos e que G' seja a soma direta de uma família $(G'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de subgrupos cíclicos. Nestas condições, se $o(G_i) = o(G'_i)$ para $i = 1, 2, \cdots, r$, então $G \cong G'$.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese, G_i e G'_i são grupos cíclicos de ordens iguais, logo, existe um isomorfismo $h_i : G_i \longrightarrow G'_i$ (teorema 25). Consideremos, então, a aplicação $h : G \longrightarrow G'$ definida por

$$h(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_r(x_r),$$

onde $x = x_1 + x_2 + \cdots x_r$ é um elemento qualquer de G e $x_i \in G_i$ para $i = 1, 2, \cdots, r$; é fácil verificar que h é um isomorfismo de G em G'. ∎

O teorema 50 nos mostra que todo grupo abeliano finito $G \neq \{0\}$ é a soma direta de p-subgrupos abelianos e o teorema 52 nos mostra que todo p-grupo abeliano (não nulo) é a soma direta de p-subgrupos cíclicos não nulos; levando-se em conta o exercício 169 concluímos que todo grupo abeliano finito $G \neq \{0\}$ é a soma direta de p-subgrupos cíclicos não nulos. Além disso, os teoremas 51 e 53 nos mostram que o número de parcelas desta decomposição, assim como suas ordens, são determinadas de modo único (a menos da ordem das parcelas) pelo grupo G. Finalmente, o lema 20 nos mostra que se dois grupos abelianos finitos têm o mesmo tipo de decomposição, então êles são isomorfos. Ficam assim determinados (a menos de um isomorfismo e a menos da ordem das parcelas) todos os grupos abelianos finitos de uma dada ordem.

Reuniremos os resultados acima no seguinte

TEOREMA 54 - (*teorema fundamental dos grupos abelianos finitos*) - Todo grupo abeliano finito $G \neq \{0\}$ é a soma direta de uma família $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de p-subgrupos cíclicos não nulos; além disso, o número dêstes grupos cíclicos e suas ordens são determinadas de modo único pelo grupo G.

Para determinar todos os grupos abelianos finitos de uma dada ordem $n > 1$ introduziremos o conceito de partição de um número natural $k \geqslant 1$: chama-se *partição* de k a tôda n-upla $(k_1, k_2, \cdots, k_r)$, de números naturais não nulos, tal que $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r$ e $k = \sum_{i=1}^{r} k_i$. Indicando-se por $P(k)$ o número de partições de k e considerando-se a decomposição de n em fatôres primos

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$$

concluímos, em virtude do teorema 52, que o número de grupos abelianos de ordem n (a menos de isomorfismos) é $P(a_1)P(a_2)\cdots P(a_s)$.

EXEMPLO 79 - Para $n = 6 = 2^1 3^1$ temos $P(1) = 1$, logo, existe um único grupo abeliano de ordem 6 (a menos de um isomorfismo); aliás, êste resultado já foi mencionado no exemplo 36.

EXEMPLO 80 - Determinar, a menos de um isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem $1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$. Para isso devemos determinar as partições dos expoentes 4, 1 e 2; temos

$$4 \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 3\ 1 \\ 2\ 2 \\ 2\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \right. \qquad 1 \left\{ 1 \right. \qquad 2 \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1\ 1 \end{array} \right.$$

logo, existem $5 \cdot 1 \cdot 2 = 10$ grupos abelianos de ordem 1200. A tabela abaixo, onde F_n indica o grupo aditivo dos inteiros módulo $n>1$, nos dá um exemplo de cada um dêstes grupos

$$F_{16} \times F_3 \times F_{25}$$
$$F_8 \times F_2 \times F_3 \times F_{25}$$
$$F_4 \times F_4 \times F_3 \times F_{25}$$
$$F_4 \times F_2 \times F_2 \times F_3 \times F_{25}$$
$$F_2 \times F_2 \times F_2 \times F_2 \times F_3 \times F_{25}$$
$$F_{16} \times F_3 \times F_5 \times F_5$$
$$F_8 \times F_2 \times F_3 \times F_5 \times F_5$$
$$F_4 \times F_4 \times F_3 \times F_5 \times F_5$$
$$F_4 \times F_2 \times F_2 \times F_3 \times F_5 \times F_5$$
$$F_2 \times F_2 \times F_2 \times F_2 \times F_3 \times F_5 \times F_5$$

EXERCÍCIOS

175. Demonstrar (sem utilizar o primeiro teorema de Sylow) que se G é um grupo abeliano finito de ordem $n>1$ e se p é um fator primo de n, então existe em G um elemento de ordem p. Sugestão: colocar $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $o(x_1) = m_i$ e considerar todos os elementos da forma $r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n$, onde $0 \leqslant r_i < m_i$; utilizando a aplicação $(r_1, r_2, \cdots, r_n) \mapsto r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n$ concluir que p divide algum m_i e mostrar que $x = x_i^{m_i/p}$ tem ordem p.

176. Seja G um grupo cíclico de ordem p^s $(s \geqslant 1)$; demonstrar que o conjunto H de todos os elementos de G que têm ordem $\leqslant p^t$ $(1 \leqslant t \leqslant s)$ é um subgrupo de ordem p^t.

177. Seja G um grupo abeliano de ordem p^s $(s \geqslant 1)$; demonstrar que G é cíclico se, e sòmente se, o conjunto $H = \{x \in G \mid px = 0\}$ tem ordem p. Sugestão: lema 19 e teorema 53.

178. Seja G um grupo abeliano de ordem $n>1$ e seja $m \geqslant 1$ um divisor de n; demonstrar que existe em G um subgrupo de ordem m. Sugestão: teorema 54. Observação: êste resultado não é, em geral, verdadeiro se G é não comutativo (ver o exercício 105).

179. Determinar, a menos de isomorfismos, o número de grupos abelianos das seguintes ordens: a) 1440; b) 6400; c) 15625; d) 288000; e) 1000000. Nos casos a) e c) dar um exemplo de cada um dos grupos obtidos (exemplo 80).

180. Demonstrar que existe um único grupo abeliano, a menos de um isomorfismo, de ordem: a) 15; b) 30; c) 210; d) 2310; e) 259377.

181. Seja G um grupo abeliano de ordem $n>1$; demonstrar que G é a soma direta de uma família $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant t}$, de subgrupos de G, onde a ordem n_i de G_i divide a ordem n_{i+1} de G_{i+1} para $i = 1, 2, \cdots, t-1$. Sugestão: teorema 54 e exercício 157.

182. Demonstrar que os números naturais $n_1, n_2, \cdots, n_t$, definidos no exercício anterior, são determinados de modo único pelo grupo G. Observação: êstes números são denominados *coeficientes de torsão do grupo* G.

183. Determinar os coeficientes de torsão do grupo

$$F_2 \times F_8 \times F_3 \times F_9 \times F_{11} \times F_{11} \times F_{121}.$$

184. Seja G um grupo abeliano e consideremos o conjunto S de todos os elementos de G que têm ordens finitas; demonstrar que S é um subgrupo de G e que todo elemento do grupo quociente G/S, exceto zero, tem ordem infinita.

BIBLIOGRAFIA

[1] BEAUMONT, R. A. - PIERCE, R. S. - *The Algebraic Foundations of Mathematics,* Addison-Wesley Publishing Company, Reading (1963)

[2] BIRKHOFF, G. D. - MACLANE, S. - *A Survey of Modern Algebra,* The Macmillan Company, New York (1941)

[3] BOURBAKI, N. - *Théorie des Ensembles, Fascicule des Résultats,* Hermann et Cie, Paris (1939)

[4] BOURBAKI, N. - *Algèbre, Chapitre I, Structures Algèbriques,* Hermann et Cie, Paris, Paris (1942)

[5] BOURBAKI, N. - *Algèbre, Chapitres IV et V, Polynômes et Fractions Rationelles, Corps Commutatifs,* Hermann et Cie, Paris (1950)

[6] CARMICHAEL, R. D. - *Introduction to the Theory of Groups of Finite Order,* Ginn and Company, New York (1937)

[7] CHEVALLEY, C. - *Fundamental Concepts of Algebra,* Academic Press, New York (1956)

[8] COHEN, L. W. - EHRLICH, G. - *The Structure of the Real Number System,* D. Van Nostrand Company, Princeton (1963)

[9] COHN, H. - *A second Course in Number Theory,* John Wiley & Sons, New York (1962)

[10] COURANT, R. and ROBBINS, H. - *What is Mathematics?,* Oxford University Press (1941)

[11] DESKINS, W. E. - Abstract Algebra, The Macmillan Company, New York (1964)

[12] DIEUDONNÉ, J. A. - Teoria dos Corpos Comutativos, volumes I-III, Publicações da Sociedade de Matemática de São Paulo (1947)

[13] DUBREIL, P. - DUBREIL, M. L. - JACOTIN, *Leçons d'Algèbre Moderne,* Dunod, Paris (1964)

[14] FARAH, E. - *Teoria dos Conjuntos,* São Paulo (1961)

[15] FUCHS, L. - *Abelian Groups,* Publishing House of the Fungarian Academy of Sciences, Budapest (1958)

[16] GODEMENT, R. - *Cours d'Algèbre,* Hermann, Paris (1963)

[17] HALL, M. - *The Theory of Groups,* The Macmillan Company, New York (1951)

[18] HARDY, G. H. and WRIGHT, E. M. - *An Introduction to the Theory of Numbers,* Clarendon, Oxford (1938)

[19] JACOBSON, N. - *Lectures in Abstract Algebra,* volume I, D. Van Nostrand Company, New York (1951)

[20] KUROSCH, A. G. - *The Theory of Groups,* volumes I-II, Chelsea Publishing Company, New York (1955)

[21] LANDAU, E. G. H. - *Foundations of Analysis: The Whole, Rational, Irrational and Complex Numbers* (trans. by F. Steinhardt), Chelsea Publishing Company, New York (1951)

[22] LEFORT, G. - *Algèbre et Analyse, Exercises,* Dunod, Paris (1961)

[23] LeVÈQUE, W. J. - *Topics in Number Theory,* volumes I-II, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (1956)

[24] MOSTOW, G. D. - SAMPSON, J. H. - MEYER, J. P. - *Fundamental structures of Algebra,* McGraw-Hill Book Company, Reading (1956)

[25] NIVEN, I. and ZUCKERMANN, H. S. - *An Introduction to the Theory of Numbers,* Second Edition, John Wiley & Sons, New York (1966)

[26] ORE, O. - *Number Theory and its History,* McGraw-Hill Book Company, New York (1948)

[27] PERLIS, S. - *Introduction to Algebra,* Blaisdell Publishing Company, Waltham (1966)

[28] RÉDEI, L. - *Algebra,* Band I, Academische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig, K.-G., Leipzig (1959)

[29] SAMUEL, P. - *Anneaux Factoriels* (Rédaction de A. Micali), Publicações da Sociedade de Matemática de São Paulo, N. 1. São Paulo (1963)

[30] SCOTT, W. R. - *Group Theory,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1965)

[31] SHANKS ,D. - *Solved and Unsolved Problems in Number Theory,* volume I, Spartan Books, Washington D. C. (1962)

[32] VAN DER WAERDEN, B. L. - Moderne Algebra, Band I, Springer-Verlag, Berlin (1936)

[33] WARNER, S. - *Modern Algebra,* volumes I-II, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1965)

[34] ZARISKI, O. and SAMUEL, P. - *Commutative Algebra,* volume I, D. Van Nostrand Company, New York (1959)

[35] The USSR Olympiad Problem Book, W. H. Freeman and Company (1962)

ÍNDICE ALFABÉTICO