Lista VI

MAT0134 - INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual. Dados os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$, determine um vetor $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = -1$.

Exercício 2. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto interno. Prove que, para quaisquer $u, v \in V$, têm-se:

a) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$;

b) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(||u + v||^2 - ||u - v||^2)$.

Exercício 3. Seja $\langle \cdot, \cdot\rangle$ um produto interno no $\mathbb{R}$-espaço vetorial V. Dados $u, v \in V$ tais que $||u|| = ||v|| = 1$ e $||u - v|| = 2$, determine $\langle u, v\rangle$.

Exercício 4. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$. Prove que:

a) $||u|| = ||v||$ se, e somente se, $u + v$ e $u - v$ são ortogonais;

b) $||u||v + ||v||u$ e $||u||v - ||v||u$ são ortogonais;

c) $\langle u, v\rangle = 0$ se, e somente se, $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Exercício 5. Seja X um conjunto de geradores do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V, onde está definido um produto interno. Se os vetores $u, v \in V$ são tais que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ para qualquer $w \in X$, prove que $u = v$.

Exercício 6. Seja $\langle \cdot, \cdot\rangle$ um produto interno no $\mathbb{R}$-espaço vetorial U. Dado um isomorfismo linear $T : V \to U$, ponha $[u, v] = \langle Tu, Tv\rangle$ para quaisquer $u, v \in V$. Prove que $[\cdot, \cdot]$ é um produto interno em V.

Exercício 7. Determine os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + ty_1y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 8. Determine o valor de m para que os vetores $u = (2, m, -1)$ e $v = (m - 1, 2, 4)$ sejam ortogonais em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 9. Verifique que $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + z_1z_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$ e determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, 2, 1)$ e $v = (1, 1, 1)$.

Exercício 10. Verifique que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno em $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ nos seguintes casos:

a) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{a}\mathbf{b}^t)$;

b) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$, onde $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

Em cada caso, calcule ainda $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $||\mathbf{a}||$ e $||\mathbf{b}||$, onde $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 11. Verifique que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ nos seguintes casos:

a) $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$;

b) $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)\, dt$.

Em cada caso, determine ainda os valores de $m \in \mathbb{R}$ para que $f(t) = mt^2 - 1$ seja ortogonal a $g(t) = t$.

Exercício 12. Encontre o complemento ortogonal do $\mathbb{R}$-subespaço vetorial S nos seguintes casos:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}$, produto interno usual;

b) $S = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, tp'(t) = p(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$, $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)\, dt$;

c) $S = \{\mathbf{a} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{tr}(\mathbf{a}) = 0\}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{a}\mathbf{b}^t)$.

Exercício 13. Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) e com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente. Seja ainda $T : V \to W$ uma transformação linear. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\langle Tu, Tv \rangle_W = \langle u, v \rangle_V$ para todo $u, v \in V$;

b) T leva *toda* base ortonormal de V em uma base ortonormal de W;

b) T leva *uma* base ortonormal de V em uma base ortonormal de W;

c) $||Tv||_W = ||v||_V$ para todo $v \in V$.

Exercício 14. Prove que, num $\mathbb{R}$-espaço vetorial V munido de produto interno, vale $|\langle u, v \rangle| = ||u|| \cdot ||v||$ se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

Exercício 15. Prove que para quaisquer n-upla de números reais positivos $a_1, \ldots, a_n$, tem-se

$$n^2 \leq \left(\tfrac{1}{a_1} + \tfrac{1}{a_2} + \cdots + \tfrac{1}{a_n} \right) (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Exercício 16. Mostre que $\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \ldots\}$ é um conjunto ortogonal em $C[0, \pi]$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\, dx$.

Exercício 17. Prove que num $\mathbb{R}$-espaço vetorial V com produto interno, todo conjunto ortogonal $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores não nulos é *l.i.*.

Exercício 18. Determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x - y - z = 0,\ z - 2t = 0\}$.

Exercício 19. Determine, em relação ao produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt$, a projeção ortogonal de $f(t) = 2t - 1 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sobre o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial $U = [t]$.

Exercício 20. Determine a projeção ortogonal de $u = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ sobre o $\mathbb{R}$-subespaço $V = [(1, 3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

Exercício 21. Encontre uma base ortonormal para o $\mathbb{R}$-subespaço $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$ de $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 22. Usando o processo de Gram-Schmidt, ortonormalize a base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ e $u_3 = (-1, 0, 1)$.

Exercício 23. Considere em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$.

a) Ortonormalize a base $\{1, 1 + t, 2t^2\}$;

b) Ache o complemento orthogonal do $\mathbb{R}$-subespaço $W = [5, 1 + t]$.