Lista V - Gabarito

MAT0134 - INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1.

a) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercício 2. $[T]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercício 3. $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[T]_{can,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.

a) $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 5.

a) -1 e 5;

b) $3 \pm \sqrt{53}$;

c) $-\frac{1}{3}$, 1 e $\frac{1}{2}$.

Exercício 6. $\mathcal{E}_T(\pm\sqrt{2}) = [(1 \pm \sqrt{2}, 1)]$.

Exercício 7.

a) $\mathcal{E}_T(-1) = [(1, 3, -3)]$, $\mathcal{E}_T(2) = [(1, 0, 0)]$, $\mathcal{E}_T(3) = [(5, 1, 1)]$;

b) $\mathcal{E}_T(0) = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$, $\mathcal{E}_T(2) = [(-5, 1, -2)]$.

Exercício 8.

c) $[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\mathcal{E}_T(2) = [\mathrm{e}^{2x}]$.

Exercício 10. $\mathcal{E}_{A^{-1}}(-1) = [(-2, 1)]$, $\mathcal{E}_{A^{-1}}(\frac{1}{2}) = [(1, 1)]$.

Exercício 12. $\lambda = 1$ é autovalor de A com multiplicidade algébrica igual 2 e multiplicidade geométrica igual a 1. Logo, A não é diagonalizável.

Exercício 13.

a) Não é diagonalizável;

b) $\mathcal{E}_A(-2) = [(1, 0)]$, $\mathcal{E}_A(6) = [(1, 1)]$;

c) Não é diagonalizável;

d) $\mathcal{E}_A(3) = [(-\frac{4}{3}, 1)]$, $\mathcal{E}_A(4) = [(1, 0)]$.

Exercício 14.

a) Não existe uma tal base $\mathcal{B}$;

c) $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$.

Exercício 15. $T(x, y) = (-6y, y - x)$.

Exercício 16. $p_T(t) = (t - 5)(t + 1)^2$.

Exercício 17. A é diagonalizável sempre que $a \neq 1$.

Exercício 19.

a) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercício 20. $A^{2023} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \lambda - 2 & \lambda + 1 \\ 2\lambda + 2 & 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$, onde $\lambda = 5^{2023}$.