Lista V

MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Em cada caso, determine a matriz associada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação a base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$.

a) $T(x,y) = (2x, y)$;

b) $T(x,y) = (-y, x)$;

c) $T(x,y) = (2x+y, x-y)$;

d) $T(x,y) = (x, y+x)$;

e) $T(x,y) = (0,0)$;

f) $T(x,y) = (3x-4y, 2x-5z)$;

g) $T(x,y) = (y-2x, x)$.

Exercício 2. Dadas as bases $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(0,1,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, encontre $[T]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é a transformação linear dada por

$$T(x,y) = (2x+y, 3x-y, -y).$$

Exercício 3. Seja $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$T(1) = t^2+t+1, \quad T(1+t) = t^3+t+2, \quad T(t^2+t) = -t^3+t^2-1, \quad T(t^3+t+1) = t^3-2t^2-t.$$

Ache as matrizes $[T]_{can,\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{can}$, onde $\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t, t^3+t+t+1\}$.

Exercício 4. Seja $T : \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ z-w & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ache as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{can}$, onde $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

b) Dê a matriz $M \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1}[T]_{can}M$.

Exercício 5. Encontre os autovalores das matrizes abaixo.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercício 6. Ache os autovalores e autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

Exercício 7. Ache os autovalores e os autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

a) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$;

b) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.

Exercício 8. Em $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, considere $S \subset V$ o subespaço gerado por $\mathcal{B} = \{e^{2x} \sin(x), e^{2x} \cos(x), e^{2x}\}$ e defina $D : S \to S$ pondo $D(f) = f'$.

a) Mostre que a função D é bem definida, isto é, se $f \in S$ então $f' \in S$;

b) Mostre que D é um operador linear em S;

c) Encontre $[D]_{\mathcal{B}}$;

d) Ache os autovalores e os autovetores de D.

Exercício 9. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear inversível. Prove que:

a) Se λ é um autovalor de T então $\lambda \neq 0$;

b) λ é um autovalor de T se, e somente se, λ^{-1} é um autovalor de T^{-1}.

Exercício 10. Dado $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ache os autovalores e autovetores de A^{-1}.

Exercício 11. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, prove que:

a) A é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

b) A não é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

Exercício 12. Para $c \neq 0$, mostre que $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizavel.

Exercício 13. Decida se as seguintes matrizes são diagonalizáveis. Em caso afirmativo, encontre uma base de autovetores.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

a) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercício 14. Em cada caso, obtenha (se possível) uma base $\mathcal{B}$ tal que $[T]_\mathcal{B}$ seja uma matriz diagonal.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, y - x)$;

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$.

Exercício 15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear com autovetores $(3, 1)$ e $(-2, 1)$ associados aos autovalores -2 e 3, respectivamente. Determine $T(x, y)$.

Exercício 16. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ um operador linear diagonalizável cujos autovalores são -1 e 5. Se o autoespaço de T associado ao valor -1 é $\{a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, a = b\}$, qual é o polinômio característico de T?

Exercício 17. Determine todos os valores de a, b e c para os quais $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é diagonalizavel.

Exercício 18. Dados $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, prove que:

a) AB e BA têm os mesmos autovalores;

b) Se A e B são matrizes triangulares e $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, então $p_A(t) = p_B(t)$;

c) Se A e B são *semelhantes*, isto é, se existe $U \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $A = U^{-1}BU$, então $p_A(t) = p_B(t)$;

d) Conclua que duas matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

Exercício 19. Verifique se $A \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ é semelhante a uma matriz diagonal nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 20. Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcule A^{2023}.

Exercício 21. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, encontre $B \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^n = A$.

Exercício 22. Seja $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz nilpotente não nula. Prove que se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de A então $\lambda = 0$. Conclua que A não é diagonalizável.

Exercício 23. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear de posto 1. Prove que, ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.