Lista IV - Gabarito

MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1.

a) Não;

b) Sim;

c) Sim;

d) Não;

e) Sim;

f) Não.

Exercício 2. Abaixo, indicamos com $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ respectivamente as bases de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

a) $\mathcal{B} = \varnothing, \mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$;

b) $\mathcal{B} = \{(1,-2)\}, \mathcal{C} = \{1\}$;

c) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$;

d) $\mathcal{B} = \{1\}, \mathcal{C} = \{1,t\}$;

e) $\mathcal{B} = \{1\}, \mathcal{C} = \{1,t\}$;

f) $\mathcal{B} = \varnothing, \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

g) $\mathcal{B} = \{t^3 - \frac{1}{2}t, t^2 - \frac{1}{3}\}, \mathcal{C} = \{(1,1),(-1,1)\}$;

h) $\mathcal{B} = \{1,t\}, \mathcal{C} = \{t^2\}$;

i) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

j) $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(0,1,-2)\}, \mathcal{C} = \{1\}$;

k) $\mathcal{B} = \varnothing, \mathcal{C} = \{t+1, t^2+1\}$.

Exercício 3.

a) $T(x,y,z) = (2x+3y-7z, 3x-y-2z, x+6y)$;

b) T é bijetora.

Exercício 4.

a) $F(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 2y + 2z)$;

b) A base canônica de $\mathbb{R}^3$ é uma base para $\mathrm{Im}(F)$ e $\mathrm{Im}(F) + \ker(F)$, enquanto que $\varnothing$ é uma base para $\ker(F)$ e $\ker(F) \cap \mathrm{Im}(F)$.

Exercício 5. $T(x, y, z, w, t) = (x - y + z - w, y - w, z - w)$.

Exercício 6. $T(x, y, z, w) = (z - x - y, x + y - z, w - z, z - w)$.

Exercício 7.

a) $T^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$;

b) $T^{-1}(x, y) = \frac{1}{5}T(x, y)$;

c) $T^{-1}(x, y) = (-x + 2y + 2z, x - y - z, -x + 2y + z)$;

d) $T^{-1}(x, y) = (x, x - y, 3x - y - z)$;

e) $T^{-1}(x, y) = (x + 3y - 14z, y - 4z, -z)$.

Exercício 8. $T^{-1} = T$.

Exercício 10.

a) Sim;

b) Não;

c) Sim;

d) Sim.

Exercício 11. Dica: use o Teorema do Núcleo e da Imagem.

Exercício 12. Dica: mostre que $T + S : V \to V$ e $\alpha \cdot T : V \to V$, assim definidas, são transformações lineares.

Exercício 13. Dica: use o exercício 11.