Lista IV

MAT0134 - INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Decida se as seguintes transformações são lineares:

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $T(x) = |x|$;

b) $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, definido por $(Tp)(t) = p(t+1)$;

c) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definido por $T(A) = \mathrm{Tr}(A)$;

d) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definido por $T(A) = \det(A)$;

e) $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, definido por $T(A) = A^t$.

f) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x^2$.

Exercício 2. Prove que T é linear e determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ e $\ker(T)$ nos seguintes casos:

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = y + 2x$;

c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X$;

d) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $(Tp)(t) = p'(t)$;

e) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $(Tp)(t) = p'(t) + p''(t)$;

f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X + X$;

g) $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = \left(\int_{-1}^{0} p(t)\, dt, \int_{0}^{1} p(t)\, dt \right)$;

h) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $(Tp)(t) = t^2 p''(t)$;

i) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

j) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y, z) = x + 2y + z$;

k) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(a, b)(t) = at^2 + bt + (a + b)$.

Exercício 3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$, $T(1, 1, 0) = (5, 2, 7)$ e $T(1, 1, 1) = (-2, 0, 7)$.

a) Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, encontre $T(x, y, z)$;

b) Decida se T é injetora, sobrejetora ou bijetora.

Exercício 4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $F(0,1,0) = (1,1,2)$, $F(0,0,1) = (0,0,2)$ e $F(1,0,0) = (1,2,0)$.

a) Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, encontre $F(x,y,z)$;

b) Determine uma base para cada um dos seguintes $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

$$\ker(F), \mathrm{Im}(F), \ker(F) \cap \mathrm{Im}(F), \ker(F) + \mathrm{Im}(F).$$

Exercício 5. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathrm{Im}(T) = [(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)], \quad \ker(T) = [(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0)].$$

Exercício 6. Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y=0,\ z+w=0\}, \quad \ker(T) = [(1,0,1,1),(0,-1,-1,-1)].$$

Exercício 7. Mostre que T é um isomorfismo linear e encontre T^{-1} nos seguintes casos:

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = 2x$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (x+2y, 2x-y)$;

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y,z) = (x+2y, y+z, x-z)$;

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y,z) = (x, x-y, 2x+y-z)$;

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y,z) = (x-3y-2z, y-4z, -z)$.

Exercício 8. Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definido por $(Tp)(t) = (b-a) - at$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $p(t) = at + b$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que T é um isomorfismo linear e encontre T^{-1}.

Exercício 9. Seja $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p(0) = 0\}$.

a) Mostre que $\mathcal{S}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$;

b) Mostre que $T : \mathcal{S} \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, definido por $(Tp)(t) = p'(t)$, é um isomorfismo linear;

c) Encontre T^{-1}.

Exercício 10. Verifique se os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais U e V são isomorfos nos seguintes casos:

a) $U = \mathbb{R}^2, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}$;

b) $U = M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad V = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}\}$;

c) $U = \mathbb{R}^3, \quad V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A^t = A\}$;

d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, a \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 11. Sejam U, V dois $\mathbb{R}$-espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Prove que:

a) $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ são respectivamente $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de U e V;

b) Se $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ é *l.i.* em V então $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é *l.i.* em U;

c) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é *l.d.* em U então $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ é *l.d.* em V;

d) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ gera U então $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ gera $\mathrm{Im}(T)$;

e) T é injetora se, e somente se, $\ker(T) = \{0\}$;

f) T é injetora se, e somente se, leva vetores *l.i.* de U em vetores *l.i.* de V;

g) T é sobrejetora se, e somente se, transforma um conjunto gerador de U num conjunto gerador de V;

h) T é bijetora se, e somente se, leva uma base de U numa base de V;

i) Se U e V têm mesma dimensão, Té injetora se, e somente se, T é sobrejetora e portanto é um isomorfismo;

j) Se a dimensão de U é ímpar, então $\dim \mathrm{Im}(T) \neq \dim \ker(T)$;

k) Se T é sobrejetora então $\dim(V) \leq \dim(U)$;

l) Se T é injetora então $\dim(U) \leq \dim(V)$;

m) Se T é um isomorfismo então $\dim(U) = \dim(V)$;

n) Se $\dim(V) = 1$ então $T = 0$ ou T é sobrejetora;

o) Se $\dim(V) = 1$ e $T \neq 0$ então $\dim \ker(T) = \dim(U) - 1$;

p) Se $\dim(U) > \dim(V)$, então existe $u \in U$ não nulo tal que $T(u) = 0$;

q) Se T é inversível então $T^{-1} : V \to U$ é uma transformação linear;

r) T mapeia o vetor nulo de U no vetor nulo de V, isto é, $T(0_U) = 0_V$;

s) Se $U = \mathbb{R}$, então existe $v \in V$ tal que $T(\alpha) = \alpha v$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 12. Sejam U, V dois $\mathbb{R}$-espaços vetoriais. Verifique que o conjunto $\mathcal{L}(U; V)$ de todas as transformações lineares $T, S : U \to V$ se torna um $\mathbb{R}$-espaço vetorial quando se definem a soma $T + S$ de duas transformações lineares e o produto $\alpha \cdot T$ do número α pela transformação T da maneira natural:

$$(T + S)(u) = Tu + Su$$
$$(\alpha \cdot T)(u) = \alpha\, Tu.$$

Quando $U = V$, usaremos a notação $\mathcal{L}(V)$ em vez de $\mathcal{L}(V; V)$.

Exercício 13. Dado V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, considere o *operador identidade* $I : V \to V$, definido por $I(v) = v$ para todo $v \in V$.

a) Prove que se $\dim(V) = 1$, todo operador linear em V é da forma $\alpha \cdot I$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) Conclua que $\mathcal{L}(V) = [I]$.