Lista III

MAT0134 - INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Para cada $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e $S \subseteq V$ indicado abaixo, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.

a) $S = \{(1,0),(2,-1)\}, \quad V = \mathbb{R}^2;$

b) $S = \{(1,1,1),(2,2,0)\}, \quad V = \mathbb{R}^3;$

c) $S = \{1, t, t^2, 1+t^3\}, \quad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R});$

d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = M_2(\mathbb{R}).$

Exercício 2. Encontre um conjunto finito S tal que $[S] = W$ nos seguintes casos:

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y = 0\};$

b) $W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\};$

c) $W = \{X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \,:\, AX = 0\}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix},$$

com a, b, c e d não nulos.

Exercício 3. Encontre um conjunto gerador finito para os $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais U, W, $U \cap W$ e $U + W$ do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V nos seguintes casos:

a) $U = [(1,0,0),(1,1,1)], \quad W = [(0,1,0),(0,0,1)], \quad V = \mathbb{R}^3;$

b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 0\}, \quad W = [(1,3,0),(0,4,6)], \quad V = \mathbb{R}^3;$

c) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A^t = A\}, \quad W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \quad V = M_2(\mathbb{R});$

d) $U = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3], \quad W = [t^3 + 4t, t - 1, 1], \quad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$

Exercício 4. Verifique se o subconjunto $S \subseteq V$ do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V é *l.i.* ou *l.d.* nos seguintes casos:

a) $S = \{(1,2),(-3,1)\}, \quad V = \mathbb{R}^2;$

b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}, \quad V = P_2(\mathbb{R});$

c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = M_2(\mathbb{R});$

d) $S = \{(1,2,2,-3), (-1,4,-2,0)\}, \quad V = \mathbb{R}^4;$

e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = M_3(\mathbb{R});$

f) $S = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}, \quad V = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});$

g) $S = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}\}, \quad V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$

Exercício 5. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $S_1, S_2 \subseteq V$ subconjuntos quaisquer. Mostre que:

a) Se $S_1 \subseteq S_2$ então $[S_1] \subseteq [S_2]$;

b) Se S_1 e S_2 são $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de V então $[S_1 \cup S_2] = S_1 + S_2$;

c) Se S_1 é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de V então $[S_1] = S_1$;

d) Para todo $v \in V$, tem-se $[v] = \{\alpha v \in V \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$;

Exercício 6. Seja A uma matriz não quadrada. Mostre que ou as linhas ou as colunas de A são *l.d.*

Exercício 7. Encontre os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais $\mathcal{B} = \{(a,1,0), (1,a,1), (0,1,a)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 8. Verifique se o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base para o $\mathbb{R}$-espaço vetorial V nos seguintes casos:

a) $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}, \quad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R});$

b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = M_2(\mathbb{R});$

c) $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}, \quad V = \mathbb{R}^4.$

Exercício 9. Encontre uma base e determine a dimensão do $\mathbb{R}$-subespaço vetorial W do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V nos seguintes casos:

a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x - y = 0, e\, x + 2y + t = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^4;$

b) $W = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = X \right\}, \quad V = M_2(\mathbb{R});$

c) $W = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p''(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}, \quad V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$

Exercício 10. Encontre uma base e determine a dimensão dos $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais $U, W, U+W$, $U \cap W$ do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V nos seguintes casos:

a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z = 0\}, \quad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^3;$

b) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Tr}(A) = 0\}, \quad W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A = -A^t\}, \quad V = M_2(\mathbb{R});$

c) $U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p(0) = p(1) = 0\}, V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$

Exercício 11. Determine as coordenadas de $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ com relação as seguintes bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

b) $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$;

c) $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

Exercício 12. Determine as coordenadas do polinômio $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$ com relação as seguintes bases $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

a) base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

b) $\mathcal{B} = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\}$;

c) $\mathcal{B} = \{4 + t, 2, 2 - t^2, t + t^3\}$.

Exercício 13. Determine as coordenadas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ com relação as seguintes bases $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$:

a) base canônica de $M_2(\mathbb{R})$;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercício 14. Mostre que o conjunto solução de um sistema linear homogêneo com n incógnitas é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 15. Encontre uma base e determine a dimensão para o conjunto solução dos seguintes sistemas lineares homogêneos:

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z - w &= 0, \\ x - 2y + 4z + 3w &= 0, \\ x - 5y - 2z - 9w &= 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5y - 3z + 2w &= 0, \\ x + 6y + 2z - 3w &= 0, \\ x + 3y - 13z + 12w &= 0. \end{cases}$

Exercício 16. Seja $S = \left\{ X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = 4X \right\}$.

a) Mostre que S é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$;

b) Determine uma base e a dimensão de S;

c) Complete a base encontrada no item anterior à uma base de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercício 17. Sejam $S = \{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)\}$ e $v = (0, m, -m, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$.

a) Ache uma base para $[S]$;

b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais $v \in [S]$;

c) Se $v \notin [S]$, vale $[S \cup \{v\}] = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \; : \; x = 0\}$?

Exercício 18. Seja $S = \{x^2-1, x+1, x^2+x\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e considere o polinômio $p(x) = mx^2+nx+r$.

a) Ache uma base para $[S]$;

b) Determine os valores de m, n e r para os quais $p \in [S]$;

c) Se $p \notin [S]$, vale $[S \cup \{p\}] = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Exercício 19. Sejam $S_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \; : \; f(1) = 0\}$, $S_2 = [x^3 - x, x^2 - 1, x - 1]$ e considere o polinômio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$.

a) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$;

b) Verifique se $p \in S_1 \cap S_2$. Em caso afirmativo, determine as coordenadas de p em relação a base encontrada no item anterior.

Exercício 20. Sejam $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \; : \; x - y + z = 0 \right\}$ e

$$S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

a) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$;

b) Seja $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Verifique se $M \in S_1 \cap S_2$. Em caso afirmativo, determine as coordenadas de M em relação a base encontrada no item anterior.

Exercício 21. Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 2, 0), (0, 0, -1, 0, 1), (2, 1, 0, -3, -5)\}$.

a) Mostre que $\mathcal{B}$ é *l.i.*;

b) Ache uma base de $\mathbb{R}^5$ que contém $\mathcal{B}$.

Exercício 22. Determine os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais o polinômio $p(t) = 4t^2 + 2t + 4$ pertença ao $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $p_1(t) = b(t + 1)$, $p_2(t) = 1 - bt^2$ e $p_3(t) = 1 + bt + bt^2$.

Exercício 23. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e U, W dois $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de V. Se $\mathcal{B}$ é uma base de U, $\mathcal{C}$ é uma base de W e $V = U \oplus W$, prove que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma base de V.

Exercício 24. Seja X um conjunto qualquer. Para cada $a \in X$, seja $f_a : X \to \mathbb{R}$ a função tal que $f_a(a) = 1$ e $f_a(x) = 0$ se $x \neq a$.

a) Prove que o conjunto $Y \subset \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ formado por estas funções é *l.i.*;

b) Se X é infinito, prove que Y não gera $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$.

Exercício 25. Mostre que os monômios $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$ formam uma base para $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Exercício 26. Verifique se os seguintes subconjuntos de $C^\infty(\mathbb{R})$ são *l.i.*:

a) $\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{4x}\}$;

b) $\{e^x, e^{2x}, x^3, x^2, x\}$.

Exercício 27. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2\}$ as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (2, 3)$, $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (1, 4)$.

a) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$;

b) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$;

c) Verifique que $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ são inversas uma da outra.

d) Seja $w = (0, 1)$. Encontre $[w]_{\mathcal{B}}$ e use a matriz $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ para calcular $[w]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[w]_{\mathcal{B}}$;

e) Seja $w = (2, 5)$. Encontre $[w]_{\mathcal{C}}$ e use a matriz $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ para calcular $[w]_{\mathcal{B}}$ a partir de $[w]_{\mathcal{C}}$.

Exercício 28. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ as bases de $\mathbb{R}^3$ dadas por $u_1 = (-3, 0, -3)$, $u_2 = (-3, 2, -1)$, $u_3 = (1, 6, -1)$, $v_1 = (-6, -6, 0)$, $v_2 = (-2, -6, 4)$ e $v_3 = (-2, -3, 7)$.

a) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$;

b) Seja $w = (-5, 8, -5)$. Encontre $[w]_{\mathcal{B}}$ e use a matriz $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ para calcular $[w]_{\mathcal{C}}$;

c) Confira seu resultado na parte b) calculando $[w]_{\mathcal{C}}$ diretamente.