Lista II - Gabarito

MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Em cada caso, o conjunto solução S é dado por:

a) $S = \{(-49, 9, 18)\}$;

b) $S = \{\frac{1}{23}(36, -3, -19)\}$;

c) $S = \{(5, 3, 1)\}$;

d) $S = \{(2, 1)\}$.

Exercício 2. Dados $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $w = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in \mathbb{R}$, temos:

comutatividade:

$$u \oplus v = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) = (\beta_1 + \alpha_1, \dots, \beta_n + \alpha_n) = v \oplus u;$$

associatividade:

$$\begin{aligned}(u \oplus v) \oplus w &= (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) \oplus (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\\ &= ((\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1, \dots, (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n)\\ &= (\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \dots, \alpha_n + (\beta_n + \gamma_n))\\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \oplus (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n)\\ &= u \oplus (v \oplus w);\end{aligned}$$

vetor nulo:

$$u \oplus (0, \dots, 0) = (\alpha_1 + 0, \dots, \alpha_n + 0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = u;$$

inverso aditivo:

$$\begin{aligned}u \oplus (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n) &= (\alpha_1 + (-\alpha_1), \dots, \alpha_n + (-\alpha_n))\\ &= (\alpha_1 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_n)\\ &= (0, \dots, 0);\end{aligned}$$

distributividade:

$$\begin{aligned}(r + s) \odot u &= ((r + s)\alpha_1, \dots, (r + s)\alpha_n)\\ &= (r\alpha_1 + s\alpha_1, \dots, r\alpha_n + s\alpha_n)\\ &= (r\alpha_1, \dots, r\alpha_n) \oplus (s\alpha_1, \dots, s\alpha_n)\\ &= (r \odot u) \oplus (s \odot u),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r \odot (u \oplus v) &= r \odot (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \\
&= (r(\alpha_1 + \beta_1), \ldots, r(\alpha_n + \beta_n)) \\
&= (r\alpha_1 + r\beta_1, \ldots, r\alpha_n + r\beta_n) \\
&= (r\alpha_1, \ldots, r\alpha_n) \oplus (r\beta_1, \ldots, r\beta_n) \\
&= (r \odot u) \oplus (r \odot v);
\end{aligned}
$$

multiplicação por 1:

$$1 \odot u = (1 \cdot \alpha_1, \ldots, 1 \cdot \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u.$$

Exercício 3.

a) Comutatividade, associatividade e distributividade (escalar) falham. Além disso, não existe o vetor nulo e, com a maior razão, o inverso aditivo;

b) Distributividade (escalar e vetorial) falham. Nem todo vetor tem inverso aditivo;

c) Associatividade e distributividade (escalar) falham. Existem inúmeros vetores nulos. Todo vetor possui vários inversos aditivos com relação ao vetor nulo $(0, 0)$, e nenhum quanto aos demais vetores nulos.

Exercício 4.

a) Não;

b) Não;

c) Não;

d) Não;

Exercício 5. Seja $\mathbf{n}$ a matriz $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero. Dadas $\mathbf{a} = [a_{ij}]$, $\mathbf{b} = [b_{ij}]$, $\mathbf{c} = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $r, s \in \mathbb{R}$, temos:

comutatividade:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

associatividade:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = \\
&= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c});
\end{aligned}
$$

vetor nulo

$$\mathbf{a} + \mathbf{n} = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = \mathbf{a};$$

inverso aditivo:

$$\mathbf{a} + [-a_{ij}] = [a_{ij} + (-a_{ij})] = [a_{ij} - a_{ij}] = \mathbf{n};$$

distributividade:

$$(r+s)\cdot \mathbf{a} = [(r+s)a_{ij}] = [ra_{ij} + sa_{ij}] = [ra_{ij}] + [sa_{ij}] = r\cdot \mathbf{a} + s\cdot \mathbf{a},$$

$$r\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = r\cdot[a_{ij}+b_{ij}] = [r(a_{ij}+b_{ij})] = [ra_{ij}+rb_{ij}] = [ra_{ij}] + [rb_{ij}] = r\cdot \mathbf{a} + r\cdot \mathbf{b};$$

multiplicação por 1:

$$1\cdot \mathbf{a} = [1\cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = \mathbf{a}.$$

Exercício 6. Seja $\mathcal{W} = \{\mathbf{a} \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, \mathbf{ab} = 0\}$. Então:

$$\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathcal{W} \implies (\mathbf{c}+\mathbf{c}')\mathbf{b} = \mathbf{cb} + \mathbf{c}'\mathbf{b} = 0 + 0 = 0 \implies \mathbf{c}+\mathbf{c}' \in \mathcal{W},$$

$$\alpha \in \mathbb{R}\,,\ \mathbf{c} \in \mathcal{W} \implies (\alpha\mathbf{c})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{cb}) = \alpha\cdot 0 = 0 \implies \alpha\mathbf{c} \in \mathcal{W}.$$

Logo, $\mathcal{W}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercício 7. Dica: Para provar que $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S} + \mathrm{A}$, escreva uma dada matrix $\mathbf{a} \in M_n(\mathbb{R})$ como $\mathbf{a} = \frac{1}{2}[\mathbf{a} + \mathbf{a}^t + \mathbf{a} - \mathbf{a}^t]$.

Exercício 8. Dadas $f, g, h \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $r, s \in \mathbb{R}$, seja $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ a função definida por $\overline{f}(x) = -f(x)$. Seja ainda $n : X \to \mathbb{R}$ a função identicamente nula, isto é, $n(x) = 0$ para todo $x \in X$. Então:

comutatividade:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x),\ \forall x \in X \implies f+g = g+f;$$

associatividade:

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) =$$
$$= f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x),\ \forall x \in X \implies$$
$$\implies (f+g)+h = f+(g+h);$$

vetor nulo

$$(f+n)(x) = f(x) + n(x) = f(x) + 0 = f(x),\ \forall x \in X \implies f+n = f;$$

inverso aditivo:

$$(f+\overline{f})(x) = f(x) + \overline{f}(x) = f(x) - f(x) = 0 = n(x),\ \forall x \in X \implies f + \overline{f} = n;$$

distributividade:

$$((r+s)\cdot f)(x) = (r+s)f(x) = rf(x) + sf(x) = (r\cdot f)(x) + (s\cdot f)(x) =$$
$$= ((r\cdot f) + (s\cdot f))(x),\ \forall x \in X \implies (r+s)\cdot f = r\cdot f + s\cdot f,$$

$$(r\cdot(f+g))(x) = r(f+g)(x) = r(f(x)+g(x)) = rf(x) + rg(x) =$$
$$= (r\cdot f)(x) + (r\cdot g)(x) = (r\cdot f + r\cdot g)(x),\ \forall x \in X \implies$$
$$\implies r\cdot(f+g) = r\cdot f + r\cdot g;$$

multiplicação por 1**:**

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x),\ \forall x \in X \implies 1 \cdot f = f.$$

Exercício 10. Dica: Use o exercício 9.

Exercício 11. Dica: Use a desigualdade triangular.

Exercício 12. Dica: Para provar que $\mathcal{F}(V;\mathbb{R}) = \mathrm{P} + \mathrm{I}$, escreva uma dada função $f \in \mathcal{F}(V;\mathbb{R})$ como $f(v) = \frac{1}{2}[f(v) + f(-v) + f(v) - f(-v)]$.

Exercício 13. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $p, q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ então existem, por definição, escalares $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \qquad q(t) = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0.$$

As funções $p + q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\alpha p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por sua vez, se exprimem como

$$(p+q)(t) = (a_n + b_n)t^n + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$$

e

$$(\alpha p)(t) = (\alpha a_n)t^n + (\alpha a_{n-1})t^{n-1} + \cdots (\alpha a_1)t + (\alpha a_0).$$

Daí vemos que $p + q, \alpha p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Logo, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exercício 14. Seja $\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_0) = 0\}$. Então:

$$g, h \in \mathcal{U} \implies (g+h)(x_0) = g(x_0) + h(x_0) = 0 + 0 \implies g + h \in \mathcal{U},$$

$$\alpha \in \mathbb{R},\ g \in \mathcal{U} \implies (\alpha g)(x_0) = \alpha \cdot g(x_0) = \alpha \cdot 0 = 0 \implies \alpha g \in \mathcal{U}.$$

Logo, $\mathcal{U}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exercício 15. Dica: Uma vez provado que $C^k(\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, conclua que $C^\infty(\mathbb{R})$ também é pois $C^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\mathbb{R})$.

Exercício 16. Basta imitar a solução do exercício 2.

Exercício 17.

a) Dica: Some $-w$ a ambos os membros da igualdade $w + u = w + v$;

b) Dica: Use o item a);

c) Dica: Use o item a);

e) Dica: Use o item c);

Exercício 18.

a) Se $v, v' \in U + W$ então existem $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$ tais que $v = u + w$ e $v' = u' + w'$. Como U, W são $\mathbb{R}$-subespaços, temos $u + u' \in U$ e $w + w' \in W$. Logo

$$v + v' = (u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w') \in U + W.$$

Tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer. Como U, W são $\mathbb{R}$-subespaços, $\alpha u \in U$ e $\alpha w \in W$. Assim,

$$\alpha v = \alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w \in U + W.$$

Logo, $U + W$ é um $\mathbb{R}$-subespaço de V.

Sejam agora $x, y \in U \cap W$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Como U é um $\mathbb{R}$-subespaço e $x, y \in U$, valem $x + y \in U$ e $\alpha x \in U$. Analogemente, temos $x + y \in W$ e $\alpha x \in W$. Portanto $x + y \in U \cap W$ e $\alpha x \in U \cap W$. Segue-se que $U \cap W$ é um $\mathbb{R}$-subespaço.

b) Dica: Suponha, por absurdo, que $U \nsubseteq W$ e $W \nsubseteq U$;

c) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + y = 0\}$.

Exercício 19.

a) $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \, : \, a \in \mathbb{R} \right\}$, $\quad U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \, : \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

b) $U \cap W = W$ e $U + W = U$.

Exercício 20.

a) Sim;

b) Não;

c) Sim;

d) Não.

Exercício 21.

a) Sim;

b) Não;

c) Não;

d) Sim;

e) Não;

f) Sim;

g) W é $\mathbb{R}$-subespaço se, e somente se, $c = 0$;

h) Sim.