# Lista II

MAT0134 - INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
*2° Semestre de 2023*
IME-USP

## Prof. Kostiantyn Iusenko

**Exercício 1.** Quando possível, resolva o sistema dado, usando a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 7z &= 1, \\ x + 3z &= 5, \\ 2y - z &= 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + z &= 1, \\ 2x + y &= 3, \\ y - 5z &= 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 5z &= 1, \\ x + 2y + z &= 12, \\ 2x - y + 3z &= 10. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y &= 7, \\ 4x + 2y &= 10. \end{cases}$

**Exercício 2.** Verifique que $\mathbb{R}^n$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial quando munido das operações de soma $\oplus$ e multiplicação por escalar $\odot$ definidas por

$$u \oplus v = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$
$$\lambda \odot u = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n),$$

para quaisquer $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $v = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Exercício 3.** Em $\mathbb{R}^2$, mantenhamos a definição do produto $\lambda \odot u$ acima definido mas modifiquemos, de 3 maneiras diferentes, a definição da soma $u \oplus v$ dos vetores $u = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $v = (\beta_1, \beta_2)$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:

a) $u \oplus v = (\alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$;

b) $u \oplus v = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$;

c) $u \oplus v = (3\alpha_1 + 3\beta_1, 5\alpha_1 + 5\beta_1)$.

**Exercício 4.** Verifique se $\mathbb{R}^2$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial quando munido das operações de soma $\oplus$ e multiplicação por escalar $\odot$ dadas por:

a) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $\quad \lambda \odot (a, b) = (a, \lambda b)$;

b) $(a, b) \oplus (c, d) = (a, b)$, $\quad \lambda \odot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$;

c) $(a,b) \oplus (c,d) = (2a-2d, -c+b), \qquad \lambda \odot (a,b) = (a, \lambda b);$

d) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c-1, b+d-1), \qquad \lambda \odot (a,b) = (\lambda a - \lambda + 1, \lambda b - \lambda + 1);$

**Exercício 5.** Verifique que o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes $m \times n$ torna-se um $\mathbb{R}$-espaço vetorial quando nele se define a soma

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}+b_{ij}]$$

e a multiplicação por escalar

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{d1} & \lambda a_{d2} & \dots & \lambda a_{dn} \end{bmatrix} = [\lambda a_{ij}]$$

quaisquer que sejam $\mathbf{a} = [a_{ij}]$, $\mathbf{b} = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercício 6.** Dada uma matriz $\mathbf{b} \in M_n(\mathbb{R})$, mostre que o conjunto $\{\mathbf{a} \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathbf{ab} = 0\}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

**Exercício 7.** Uma matriz quadrada $\mathbf{a} \in M_n(\mathbb{R})$ chama-se *simétrica* (respect. *anti-simétrica*) quando $\mathbf{a}^t = \mathbf{a}$ (respect. $\mathbf{a}^t = -\mathbf{a}^t$). Prove que o conjunto das matrizes simétricas S e o conjunto das matrizes anti-simétricas A são $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$ e que se tem $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S} \oplus \mathrm{A}$.

**Exercício 8.** Seja $X$ um conjunto qualquer não vazio. Verifique que o conjunto $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ de todas as funções reais $f, g : X \to \mathbb{R}$ se torna um $\mathbb{R}$-espaço vetorial quando se definem a soma $f+g$ de duas funções e o produto $\alpha \cdot f$ do número $\alpha$ pela função $f$ da maneira natural:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x).$$

**Exercício 9.** Fixada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que

$$\mathcal{S}_g = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(g(x)) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

**Exercício 10.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+a) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, diz-se também que $a$ é um *período* de $f$. Mostre que o conjunto das funções periódicas de período $a$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

**Exercício 11.** Seja $X$ um conjunto qualquer não-vazio. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *limitada* quando existe $k > 0$ (dependendo de $f$) tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Prove que o conjunto das funções limitadas é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

**Exercício 12.** Seja $V$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Uma função $f : V \to \mathbb{R}$ chama-se *par* (respect. *ímpar*) quando $f(-v) = f(v)$ (respect. $f(-v) = -f(v)$) para todo $v \in V$. Prove que o conjunto das funções pares P e o conjunto das funções ímpares I são $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(V; \mathbb{R})$ e vale $\mathcal{F}(V; \mathbb{R}) = \mathrm{P} \oplus \mathrm{I}$.

**Exercício 13.** Mostre que o conjunto $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais de grau $n$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

**Exercício 14.** Seja $X$ um conjunto qualquer não vazio. Dado $x_0 \in X$, mostre que o conjunto $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_0) = 0\}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. O que acontece se a condição $f(x_0) = 0$ é substituída por $f(x_0) = 1$?

**Exercício 15.** Mostre que $C^k(\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para todo $k = 0, 1, \ldots, \infty$.

**Exercício 16.** Dados os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais $(X, +_X, \cdot_Y)$ e $(Y, +_Y, \cdot_Y)$, considere o conjunto

$$X \times Y = \{(x, y) \,:\, x \in X \,,\, y \in Y\}$$

(produto cartesiano de $X$ e $Y$). Mostre que, com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas por

$$(x, y) + (x', y') = (x +_X x', y +_Y y'),$$

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot_X x, \alpha \cdot_Y y),$$

$X \times Y$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

**Exercício 17.** Dado $V$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, tomemos $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando os axiomas de espaço vetorial, mostre que:

a) Se $w + u = w + v$ então $u = v$;

b) Se $w + u = w$ então $u = 0$;

c) Se $w + u = 0$ então $u = -w$;

d) $\alpha v = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$ ou $v = 0 \in V$;

e) $(-1)v = -v$.

**Exercício 18.** Sejam $U, W$ dois $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V$. Mostre que:

a) $U \cap W$ e $U + W = \{u + w \,:\, u \in U \,,\, w \in W\}$ são $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de $V$;

b) $U \cup W$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $V$ se, e somente se, $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$;

c) Dê um exemplo de $U, W$ e $V$ em que $U \cup W$ não é um $\mathbb{R}$-subespaço de $V$.

**Exercício 19.** Encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde $U, W$ são $\mathbb{R}$-subespaços de $V$, nos seguintes casos:

a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \,:\, c, d \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = M_2(\mathbb{R});$

b) $U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, p'' = 0\}, \qquad W = \{q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, q' = 0\}, \qquad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$

**Exercício 20.** Em cada caso, verifique se $V = U \oplus W$:

a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + 3y = 0\}, \qquad W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - y = 0\}, \qquad V = \mathbb{R}^2$;

b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y = z\}, \qquad W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y = 0\}, \qquad V = \mathbb{R}^3$;

c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \ : \ e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\},$

$V = M_3(\mathbb{R})$;

d) $U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ p(0) = p(1) = 0\}, \qquad W = \{q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ q' = 0\}, \qquad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

**Exercício 21.** Em cada caso, verifique se $W$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V$:

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\}, \qquad V = \mathbb{R}^3$;

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x, y, z \in \mathbb{Q}\}, \qquad V = \mathbb{R}^3$;

c) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ é inversivel}\}, \qquad V = M_2(\mathbb{R})$;

d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a - b + c = 0 \right\}, \qquad V = M_2(\mathbb{R})$;

e) $W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ p(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}, \qquad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

f) $W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ p(0) = p(1)\}, \qquad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

g) $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \ : \ af''(t) + bf'(t) + c = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}, \qquad V = C^2(\mathbb{R})$;

h) $W = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) \ : \ \int_0^1 f(x)^2 \, dx = 0 \right\}, \qquad V = C(\mathbb{R})$.