Lista I - Gabarito

MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. As matrizes na forma escalonada (reduzida) da matriz aumentada e os respectivos conjuntos soluções são:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad S = \{(5-z, \frac{5}{2}z - \frac{9}{2}, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \in \mathbb{R}\}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13/11 & 15/11 \\ 0 & 1 & -36/11 & -5/11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $\quad S = \varnothing$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad S = \{(\frac{2}{3}y - \frac{4}{3}w, y, 9w, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y, w \in \mathbb{R}\}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -13 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad S = \{(9 + 2y + 13u, y, -2, -2 - 4u, u) \in \mathbb{R}^5 \,:\, y, u \in \mathbb{R}\}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{bmatrix}$, $\quad S = \{(\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$;

Exercício 2.

a) Se $a \neq \frac{1}{2}(c - 3b)$, o sistema não possui solução. Se $a = \frac{1}{2}(c - 3b)$, o sistema possui infinitas soluções;

b) Se $a = 2$ e $b \neq -1$, o sistema não possui solução. Se $a = 2$ e $b = -1$, o sistema possui infinitas soluções. Se $a \neq 2$, o sistema possui uma única solução;

Exercício 3.

a) $m = -6$;

b) $m \neq \frac{73}{6}$;

c) $m \neq 0$.

Exercício 4.

a) $x_1 = \cdots = x_n = 0$;

b) $k = 2$.

Exercício 5. A e A^t tem posto 3.

Exercício 6. Dica: Use que o posto de uma matriz $m \times n$ qualquer é menor ou igual a $\min\{m, n\}$.

Exercício 7. Dica: Se o posto da matriz aumentada é r, a matriz na forma escalonada reduzida possui exatamente r linhas não nulas, ou seja, r indeterminadas completamente descritas pelo sistema linear. Agora, quantas indeterminadas estão livres como parâmetros?

Exercício 8. Dica: Use o exercício anterior.

Exercício 9. Dica: Considere os três tipo de matrizes elementares:

$$D_i(m) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & m & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

onde m é um escalar diferente de zero. [A matriz $D_i(m)$ é obtida quando multiplicamos a i-ésima linha de I_n por m. Obtém-se T_{ij} trocando a linha i com a linha j da matriz identidade I_n. Finalmente, S_{ij} é obtida adicionando-se a linha i à linha j de I_n.]

Exercício 10.

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 11.

a) $U = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}$;

b) Não existe uma tal U.

Exercício 12. Em cada caso, encontre a matriz A.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 7/2 & 11/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$.

Exercício 13. Dica: Multiplique $BA = AB$ à esquerda e à direita por A^{-1}.

Exercício 14. Dica: Mostre que $C(AB) = (AB)C = I_n$, onde $C = B^{-1}A^{-1}$.

Exercício 15. Dica: Use que $DI_n = D$ para toda matriz $D \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercício 16. Dica: Pondo $C = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$, verifique que $C(I_n - BA) = (I_n - BA)C = I_n$.

Exercício 17. Dica: Para cada $i, j = 1, \ldots, n$, compare a entrada (i, j) das matrizes:

a) $(A + B)^t$ e $A^t + B^t$;

b) $(A^t)^t$ e A;

c) $(AB)^t$ e B^tA^t.

Exercício 18. Dica: Supondo A inversível, mostre que $CA^t = A^tC = I_n$, onde $C = (A^{-1})^t$.

Exercício 19. Dica: Usando a fórmula $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$, mostre que a soma da primeira coluna com a terceira é um múltiplo da segunda.

Exercício 20. Dica: Aplique $\det(\cdot)$ em ambos lados da igualdade $A^t = -A$.

Exercício 21. Dica: Aplique $\det(\cdot)$ em ambos lados da igualdade $A^k = 0$.

Exercício 22. Dica: Aplique $\det(\cdot)$ em ambos lados da igualdade $A^2 = A$.

Exercício 23.

a) $\det A = 9$;

b) $\det A = 1$;

c) $\det A = -7672$;

d) $\det A = 1$.

Exercício 24. $\det A = 3(a^2 + 1) + b^2 + c^2 > 0$, logo A é inversível para quaisquer valores $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercício 25.

a) Para $c \notin \{0, 1, -1\}$, temos $A^{-1} = \dfrac{1}{c^3 - c} \begin{bmatrix} c & -c & c^2 \\ c^2 - 2 & 1 & -c \\ -2 & c^2 + 1 & -2c \end{bmatrix}$;

b) Para $c \notin \{1, -1\}$, temos $A^{-1} = \dfrac{1}{c^2 - 1} \begin{bmatrix} 1 - c & c - c^2 & 0 \\ -(1 + c) & 1 - c & c - 1 \\ -2c & c - c^2 & c + 1 \end{bmatrix}$.