Lista I

MAT0134 - INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2° Semestre de 2023
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Para cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, escreva a forma escalonada da matriz aumentada e resolva o sistema.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + 2y - 3z &= 1, \\ x + z &= 5, \\ 3x + 4y - 7z &= -3. \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 4x + y - 8z &= 1, \\ 3x - 2y + 3z &= 5, \\ -x + 8y - 25z &= -5. \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 3x - 2y + 4w &= 0, \\ -6x + 4y - z + w &= 0, \\ -3x + 2y - z + 5w &= 0. \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x - 2y + z + 3w - u &= 1, \\ -3x + 6y - 4z - 9w + 3u &= -1, \\ -x + 2y - 2z - 4w - 3u &= 3, \\ x - 2y + 2z + 2w - 5u &= 1. \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} y + 2z + 3w &= 1, \\ 2x + y + 3z &= 1, \\ 3x + 4y + 2z &= 1, \\ 4x + 2y + w &= 1. \end{cases}$$

Exercício 2. Em cada caso, encontre (se possível) condições sobre os números a, b e c para que o sistema dado tenha nenhuma solução, uma única solução, ou infinitas soluções.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - 3y - 3z &= a, \\ -x + y + 2z &= b, \\ x - 3y &= c. \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} ax + y &= -1, \\ 2x + y &= b. \end{cases}$$

Exercício 3. Determine os valores de m para os quais o sistema dado possui uma única solução.

$$\text{a)} \begin{cases} -4x + 3y &= 2, \\ 5x - 4y &= 0, \\ 2x - y &= m. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x+2y-z-w &= 1, \\ 2x-2y-2z-3w &= -1, \\ 2x-2y-z-5w &= 9, \\ 3x-y+z-mw &= 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z &= 1, \\ 2x+3y+2z &= 7, \\ y+mz &= 8, \\ x+2y+z &= 6. \end{cases}$

Exercício 4. Um sistema de equações lineares é denominado *homogêneo* se todos os termos constantes forem nulos. Assim, uma equação linear homogênea típica, em n indeterminadas $x_1, x_2, ..., x_n$, tem a forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0.$$

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x & - & 5y & + & 2z & = & 0, \\ x & + & y & + & z & = & 0, \\ 2x & & & + & kz & = & 0. \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução a).

Exercício 5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Verifique que A e A^t tem o mesmo posto.

Exercício 6. Mostre que se A é uma matriz $m \times n$ e o posto de A é m, então $m \leq n$.

Exercício 7. Suponha que um sistema de m equações em n indeterminadas tem pelo menos uma solução. Mostre que se o posto da matriz completa é r, o conjunto de soluções tem exatamente $n - r$ variáveis livres.

Exercício 8. Mostre que todo sistema de equações lineares homogêneo com mais incógnitas do que equações admite uma solução não trivial.

Exercício 9. Uma matriz $E \in M_n(\mathbb{R})$ diz-se elementar quando é obtida de I_n por meio de uma, e somente uma, operação elementar. Se E é elementar, mostre que E^t também é.

Exercício 10. Em cada caso, obtenha a matriz inversa de A:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Exercício 11. Em cada caso, encontre uma matriz inversível U tal que UA é a forma escalonada de A.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 12. Em cada caso, encontre a matriz A.

a) $(2A^t - 3I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $\left(A^t - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 13. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que se A é inversível e comuta com B, então A^{-1} comuta com B.

Exercício 14. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são inversíveis então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercício 15. Dizemos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ possui uma *inversa à esquerda* (respec. *inversa à direita*) quando existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $BA = I_n$ (respec. $AB = I_n$). Mostre que se A possui uma inversa à esquerda B e uma inversa à direita C, então A é inversível e $A^{-1} = B = C$.

Exercício 16. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que se $I_n - AB$ é inversível, então $I_n - BA$ é inversível e sua inversa é dada por

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A.$$

Exercício 17. Dados $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, mostre que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

b) $(A^t)^t = A$;

c) Se $m = n$ então $(AB)^t = B^tA^t$.

Exercício 18. Mostre que $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível se, e somente se, A^t é inversível. Neste caso, tem-se $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Exercício 19. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\det A = 0$.

Exercício 20. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A + A^t = 0$.

a) Prove que $\det A = (-1)^n \det A$;

b) Conclua que se n é ímpar, então A não é inversível.

Exercício 21. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ diz-se *nilpotente* quando existe $k > 1$ para o qual $A^k = 0$. Prove que toda matriz nilpotente não é inversível.

Exercício 22. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ diz-se *idempotente* quando $A^2 = A$. Mostre que se A é idempotente e inversível então $\det A = 1$.

Exercício 23. Em cada caso, calcule $\det A$:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 8 & -11 & 0 & 4 \\ 11 & 2 & -2 & 9 \\ -1 & 12 & 3 & 3 \\ 12 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$.

Exercício 24. Mostre que, para quaisquer valores de a, b e c, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 3 \end{bmatrix}$$

é inversível.

Exercício 25. Em cada caso, determine os valores de c para os quais A possui inversa e encontre A^{-1} para tais valores de c:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 0 & c \\ c & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -c & c \\ 1 & 1 & -1 \\ c & -c & 1 \end{bmatrix}$.