MAT1351
IME – Prova 2 – 30/05/2023 – Gabarito

Modelo C

1ª Questão: (3.0 pontos). Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}3x - \tan 3x}{2x^3}$;

Resposta: Temos que

$$\text{sen}3x - \tan 3x = \text{sen}3x \cdot \frac{(\cos 3x - 1)}{\cos 3x} = \frac{\text{sen}3x}{\cos 3x} \cdot (\cos 3x - 1) \cdot \frac{\cos 3x + 1}{\cos 3x + 1} = \frac{-(\text{sen}3x)^3}{\cos 3x(\cos 3x + 1)}.$$

Lembrando, através do limite fundamental, que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}3x}{x} = 3$, concluímos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}3x - \tan 3x}{2x^3} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\text{sen}3x)^3}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos 3x(\cos 3x + 1)} = -\frac{27}{4}$$

(b) $\lim_{x\to\infty} [\sqrt{x + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x-2}]$;

Resposta: Temos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}} + \sqrt{x-2}} &= \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+2\sqrt{x}} + \sqrt{x-2}} \\
&= \frac{2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} + \frac{2}{\sqrt{x+2\sqrt{x}} + \sqrt{x-2}}
\end{aligned}$$

Desse modo, quando $x \to \infty$, temos que o limite é igual a 1 (repare que a parcela da direita tende a zero).

(c) $\lim_{x\to 0} (x^3 + 2x^2)\text{sen}(1/x^2)$.

Resposta: Como $\text{sen}(1/x^2)$ é uma função limitada entre 1 e -1 e $(x^3 + 2x^2)$ tende a zero quando $x \to 0$, então o resultado do limite é zero.

2ª Questão: (2.5 pontos). Calcule $f'(x)$, com $f(x)$ igual a:

(a) $f(x) = \tan(\ln(x))$;

Resposta: $f'(x) = \dfrac{\sec^2(\ln(x))}{x}$

(b) $f(x) = 3^{\frac{2x}{x-2}} \cdot \cos(x^2 - 1)$;

Resposta:

$$(3^{\frac{2x}{x-2}})' = \ln(3)3^{\frac{2x}{x-2}} \cdot \frac{-4}{(x-2)^2}$$
$$(\cos(x^2-1))' = -2x\text{sen}(x^2-1)$$

Logo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3^{\frac{2x}{x-2}})'\cos(x^2-1) + 3^{\frac{2x}{x-2}}(\cos(x^2-1))' \\ &= \ln(3)3^{\frac{2x}{x-2}} \cdot \frac{-4\cos(x^2-1)}{(x-2)^2} - 3^{\frac{2x}{x-2}}2x\text{sen}(x^2-1) \end{aligned}$$

(c) $f(x) = (\text{sen}x)^x$.

Resposta:

$$f(x) = e^{x\ln(\text{sen}x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x\ln(\text{sen}x)} \cdot (x\ln(\text{sen}x))' \\ &= e^{x\ln(\text{sen}x)} \cdot (1 \cdot \ln(\text{sen}x) + x \cdot \frac{1}{\text{sen}x} \cdot \text{cos}x) \\ &= (\text{sen}x)^x(\ln(\text{sen}x) + \frac{x\text{cos}x}{\text{sen}x}) \end{aligned}$$

3ª Questão: (2.0 pontos). Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x < -1, \\ 2ax^2 + x + b, & -1 \leq x < 1, \\ ax + x - 4b, & x \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

Assim, para que f seja contínua, devemos ter que $-2 = f(-1) = 2a - 1 + b$. Além disso, obtemos que:

$$a + 1 - 4b = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2a + 1 + b$$

Assim, simplificando as equações acima, basta resolver o sistema: $\begin{cases} 2a + b = -1 \\ a + 5b = 0 \end{cases}$

Fazendo as contas, chegamos que $b = \dfrac{1}{9}$ e $a = -\dfrac{5}{9}$.

4ª Questão: (2.0 pontos). Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^3 - 18x$ e

(a) paralela à reta $y = 6x + 1$;

Resposta: A reta tangente é dada pela equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

para algum x_0. Lembrando que retas paralelas tem mesmo coeficiente angular, concluímos que $f'(x_0) = 6$. Assim:

$$f'(x_0) = 6x_0 - 18 = 6 \implies x_0 = 4$$

Logo, a equação desejada é

$$y - 56 = 6(x - 4)$$

(b) perpendicular à reta $y = \dfrac{x}{12} + 1$.

Resposta: Para esse caso, devemos lembrar que, para retas perpendiculares, o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. Assim:

$$f'(x_0) \cdot \frac{1}{12} = -1 \implies 6x_0 - 18 = -12 \implies x_0 = 1$$

Logo, a equação desejada é

$$y + 16 = -12(x - 1)$$

5ª Questão: (1.0 ponto). Mostre que a equação:

$$x^4 - x^3 - 2 = 0,$$

tem uma solução no intervalo $[1, 2]$.

Resposta: Sendo $f(x) = x^4 - x^3 - 2$, vale que $f(1) = -2 < 0$ e que $f(2) = 6 > 0$. Como f é contínua, podemos concluir, pelo teorema dos valores intermediários, que $f(x)$ atinge o valor 0 para algum x no intervalo $[1, 2]$. Ou seja, a equação possui uma solução nesse intervalo.