MAT1351 — Lista 4

Prof. Kostiantyn Iusenko

1. Encontre o valor do limite e justifique:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(kx)}{x}$;

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(mx)}$;

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}$;

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^n)}{\operatorname{sen}(x)^n}$;

f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}$;

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;

h) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}$;

i) $\lim_{h\to 0} \frac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$;

j) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))^2}{\tan^3(x)-\operatorname{sen}^3(x)}$;

k) $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$;

l) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)\tan x$;

m) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$;

n) $\lim_{y\to a} \operatorname{sen}\frac{y-a}{2}\tan\frac{\pi y}{2a}$;

o) $\lim_{\alpha\to \beta} \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\beta)}{\alpha^2-\beta^2}$;

2. Encontre o valor do limite e justifique:

a) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$;

b) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

c) $\lim_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

d) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

e) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$;

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+3}$;

g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$;

h) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-2x+1}{4x^4+3x+2}$;

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+3x+1}$;

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{x^4+2x+3}$;

k) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{5+\frac{2}{x}}$;

l) $\lim_{x\to\infty} (x^4-3x+2)$;

m) $\lim_{x\to\infty} (5-4x+x^2-x^5)$;

n) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$;

o) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-6x+1}{6x^2+x+3}$;

p) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+3}$;

q) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$;

r) $\lim_{x\to\infty} (2x-\sqrt{x^2+3})$;

s) $\lim_{x\to\infty} [\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}]$;

t) $\lim_{x\to\infty} (x-\sqrt[3]{2+3x})$;

u) $\lim_{x\to\infty} \frac{2-3x}{x^2-6x+9}$;

3. Dados
$f(x) = \begin{cases} x^2+3, \text{se } x \leqslant 1 \\ x+1, \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{se } x > 1 \end{cases}$

   a) Mostre que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e portanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe.
   b) Mostre que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ e portanto, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ não existe.
   c) Determine formulas para $f(x)g(x)$.
   d) Prove que $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)g(x))$ existe, mostrando que $\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)g(x))$.

4. Dê o valor $f(p)$, se existir, para que $f = f(x)$ seja contínua em p. Justifique.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, p = 2.$
   b) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x}, p = 0.$
   c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}, p = 0.$
   d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, \text{se } x \neq 3, \\ 4, \text{se } x = 3; \end{cases}, \ p = 3.$

5. Calcule e justifique.

   a) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1};$
   b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x+3};$
   c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3};$
   d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}.$

6. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3}, \text{se } x \neq 3 \\ L, \text{se } x = 3. \end{cases}$
   b) f(x) = $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, \text{se } x \neq 2 \\ L, \text{se } x = 2. \end{cases}$

7. Demonstre que a função $f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

8. Se a e b são números positivos, prove que a equação

$$\frac{a}{x^3+2x^2-1} + \frac{b}{x^3+x-2} = 0$$

   possui no mínimo uma solução no intervalo $(-1, 1)$.
   Dica: use o Teorema do Valor Intermediario.

9. Encontre os valores de a, b, e $c > 0$ que tornam f contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x < 2, \\ ax^2 - bx + 3, & 2 \leqslant x < 3, \\ 2x - a + b, & x \geqslant 3; \end{cases}$$