MAT1351 — Lista 6

Prof. Kostiantyn Iusenko

1. Verifique que o Teorema do Valor Médio (versão 1) vale para a função:

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

2. A função $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ tem raiz se $x = -1$ ou $x = 1$, mas $f'(x) \neq 0$ se $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Explique porque isso não contradiz o TVM.

3. Na curva $y = x^3$ encontre o ponto onde a reta tangente é paralela a reta passando pelos pontos $A = (-1,-1)$ e $B = (2,8)$.

4. Mostre as desigualdades:

   a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x-y|$;
   b) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$, se $0 < y < x$ e $p > 1$.
   c) $|\arctan a - \arctan b| \leqslant |a-b|$;
   d) $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a-b}{b}$, se $0 < b < a$.

5. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos num intervalo:

   a) $f(x) = |x-2|$ em $[1,4]$;
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$ em $[2,3]$;
   c) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ em $[1,3]$;
   d) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ em $[-3,10]$;
   e) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$ em $[0,4]$;
   f) $f(x) = \sqrt{5-4x}$ em $[-1,1]$;
   g) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ em $[-10,10]$.

6. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico. Calcule os limites necessários.:

   a) $f(x) = 2 + x - x^2$;
   b) $f(x) = x + |\operatorname{sen} x|$;
   c) $f(x) = 3x - x^3$;
   d) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$;
   e) $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$;
   f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;
   g) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$;
   h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;
   i) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$;
   j) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$;
   k) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$;
   l) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;
   m) $f(x) = 2 - e^{-x}$;
   n) $f(x) = e^{-x^2}$;

o) $f(x) = e^{2x} - e^x$;

p) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

q) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$;

r) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$;

s) $f(x) = xe^x$;

t) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$;

u) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2(x-1)}$;

v) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

w) $f(x) = x - e^x$.

7. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$;

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$;

c) $f(x) = 3x^2 - x^3$;

d) $f(x) = x + x^{5/3}$;

e) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$;

f) $f(x) = xe^{-2x}$;

g) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$;

h) $g(x) = e^{-x} - e^{-2x}$;

i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$;

j) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

k) $g(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$;

l) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$;

m) $f(x) = x \ln x$.

n) $f(x) = e^{-x^2}$.

o) $f(x) = x^x$.

8. Mostre as desigualdades:

a) $\dfrac{x^n + y^n}{2} > (\dfrac{x+y}{2})^n$, se $x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$;

b) $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$, se $x \neq y$;

c) $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \dfrac{x+y}{2}$, se $x > 0, y > 0$.

9. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos locais e globais:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

b) $f(x) = xe^{-2x}$;

c) $f(x) = e^x - e^{-3x}$;

d) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$;

e) $f(x) = x^2 + 3x + 2$;

f) $g(t) = te^{-t}$;

g) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$;

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$;

10. Esboce o gráfico:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$;

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$;

c) $f(t) = \sqrt{t^2 - 4}$;

d) $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$;

e) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$;

f) $h(x) = xe^{-3x}$;

g) $f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$;

h) $g(x) = e^{-x^2}$;

i) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$;

j) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$.

k) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$;

l) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$;

m) $h(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$;

n) $f(x) = e^x - e^{3x}$;

o) $g(x) = x^4 - 2x^2$;

p) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$;

q) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$.