MAT1351 — Lista 3 — Gabarito

Prof. Kostiantyn Iusenko
Monitor: Guilherme C. Cruz

1. Encontre o valor do limite e justifique. Abaixo, estão apenas as respostas (sem os cálculos intermediários):

   a) $\lim_{y\to 2}(y^3-2y^2+3y-4)=2$;

   b) $\lim_{t\to 3}\dfrac{t^2-5}{2t^3+6}=\dfrac{1}{15}$;

   c) $\lim_{s\to 1}\dfrac{s^3-1}{s-1}=\lim_{s\to 1} s^2+s+1=3$;

   d) $\lim_{x\to 4}\dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}=1$;

   e) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}=\dfrac{1}{7}$;

   f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ (Dica: multiplique em cima e embaixo por $(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$);

   g) $\lim_{y\to -2}\dfrac{y^3+8}{y+2}=12$=12 (Dica: realize a divisão do quociente);

   h) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}=\dfrac{11}{17}$ (Dica: Divida em cima e embaixo por $(x-3)$);

   i) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h}=\dfrac{1}{3}$ (Dica: Multiplique em cima e embaixo por $(\sqrt[3]{(h+1)^2}+\sqrt[3]{h+1}+1)$);

   j) $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$ (Dica: Divida em cima e embaixo por $(x-1)$);

   k) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$; o limite não existe, pois um dos limites laterais é $+\infty$ e o outro é $-\infty$.

   l) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\dfrac{-2}{5}$ (Dica: Divida por $(x-2)$ em cima e embaixo);

   m) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=-1$ (Dica: Junte as frações e analise o quociente resultante);

   n) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ (Dica: Idem acima);

   o) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\dfrac{m}{n}$ (Dica: Divida em cima e embaixo por $(x-1)$)

2. Se $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$, mostre que $\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{6}$, mas $f(0)$ não está definida.

   Solução: Multiplicamos pelo conjugado e chegamos em $\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}$. Cortamos o x e depois substituímos o limite chegando em 1/6. Vemos que $f(0)$ não está definida porque seria uma divisão por 0.

3. Seja $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & \text{se } x\neq 1,\\ 1, & \text{se } x=1.\end{cases}$

a) Determine $\lim_{x\to 1} f(x)$ e mostre que $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

Solução: O limite é igual a $3 \cdot 1 + 4 = 7$, enquanto que $f(1)$ resulta em 1.

b) Esboce o gráfico de f.

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \neq -2, \\ 1, & \text{se } x = -2. \end{cases}$

   a) Determine $\lim_{x\to -2} f(x)$ e mostre que $\lim_{x\to -2} f(x) \neq f(-2)$.

   Solução: O limite é igual a $2^2 - 4 = 0$, enquanto que $f(-2)$ resulta em 1.

   b) Esboce o gráfico de f.

5. Esboce o gráfico e determine o limite indicado, se este existir. Se o limite não existir, dê a razão.

   a) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 2, \\ 1, & \text{se } x = 2, \\ 0, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

   Temos que o limite não existe, pois, para tal, é necessário que ele seja igual quando vindo pela esquerda e pela direita, neste caso, temos 2 quando pela esquerda e 0 pela direita

   b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{se } x \leqslant 1, \\ 2 - x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

   O limite novamente não existe pela mesma razão da alternativa anterior mas agora temos 0 quando o 1 vem pela esquerda, e 1 quando pela direita

   c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leqslant 2, \\ 8 - 2x, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

   O limite existe. Quando o 2 vem pela esquerda, temos 4 como resultado, assim como pela direita.

   d) $f(t) = \begin{cases} 3 + t^2, & \text{se } t < -3, \\ 0, & \text{se } t = -3, \\ 9 - t^2, & \text{se } t > -3. \end{cases}$

   O limite não existe. Quando temos -3 pela esquerda, o resultado é 12, enquanto que pela direita temos 0.

6. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L.$$

   Determine c e L.

   Solução: Suponha que 1 não é raiz do numerador do quociente. Nesse caso, temos que o numerador atinge, no limite $x = 1$, um número não-nulo enquanto que o denominador atinge 0. Desse forma, o valor do limite seria $+\infty$ ou $-\infty$, o que não pode acontecer, pois L é um número real. Desse modo, somos forçados a concluir que 1 é raiz do numerador do quociente. Com isso, chegamos que $c = -1$ e, portanto, que $L = 5/2$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

   a) Supondo que $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ então $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = 2$. Dica: Use a propriedade do produto.

   b) Supondo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

c) Supondo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

8. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e positiva e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty.$$
Solução: A afirmativa é falsa. Como contraexemplo temos: seja $g(x) = x$ e $f(x) = 1/x$, todas as exigências são cumpridas mas $f(x)g(x) = 1$. Obs: vale salientar que o limite de $f(x)$ é 0 neste caso

b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
Solução: A afirmativa é verdadeira.

c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então tem-se que
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = +\infty.$$
Solução: A afirmativa é falsa. Como contraexemplo, temos $f(x) = -x$ e $g(x) = -1$ (a função constante igual a 1). Outro contraexemplo é $f(x) = -1/x$ e $g(x) = -1/x^2$.

9. Dê exemplos de funções f e g tais que

a) $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to0} g(x) = +\infty$, e $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
Solução: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x^4}$

b) $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to0} g(x) = +\infty$, e $\lim_{x\to0} [f(x) - g(x)] = 1$;
Solução: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

c) $\lim_{x\to0} [f(x) - g(x)] = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;
Solução: $f(x) = 2x$ e $g(x) = x$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to0} [f(x) - g(x)] \neq 0$.
Solução: $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x$