MAT1351 — Lista 3

Prof. Kostiantyn Iusenko

1. Encontre o valor do limite e justifique:

a) $\lim_{y\to 2}(y^3-2y^2+3y-4)$;

b) $\lim_{t\to 3}\dfrac{t^2-5}{2t^3+6}$;

c) $\lim_{s\to 1}\dfrac{s^3-1}{s-1}$;

d) $\lim_{x\to 4}\dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$;

e) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$;

f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$;

g) $\lim_{y\to -2}\dfrac{y^3+8}{y+2}$;

h) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$;

i) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h}$;

j) $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

k) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$;

l) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

m) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

n) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

o) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $n, m\in\mathbb{Z}$.

2. Se $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$, mostre que $\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{6}$, mas $f(0)$ não está definida.

3. Seja $f(x)=\begin{cases}3x+4, \text{ se } x\neq 1,\\ 1, \text{ se } x=1.\end{cases}$

a) Determine $\lim_{x\to 1} f(x)$ e mostre que $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$.

b) Esboce o gráfico de f.

4. Seja $f(x)=\begin{cases}x^2-4, \text{ se } x\neq -2,\\ 1, \text{ se } x=-2.\end{cases}$

a) Determine $\lim_{x\to -2} f(x)$ e mostre que $\lim_{x\to -2} f(x)\neq f(-2)$.

b) Esboce o gráfico de f.

5. Esboce o gráfico e determine o limite indicado, se este existir. Se o limite não existir, dê a razão.

a) $f(x)=\begin{cases}2, \text{ se } x<2,\\ 1, \text{ se } x=2,\\ 0, \text{ se } x>2.\end{cases}$

1) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, 2) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, 3) $\lim_{x\to 2} f(x)$.

b) $f(x)=\begin{cases}2x-2, \text{ se } x\leqslant 1,\\ 2-x, \text{ se } x>1.\end{cases}$

1) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, 2) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, 3) $\lim_{x\to 1} f(x)$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leqslant 2, \\ 8 - 2x, \text{ se } x > 2. \end{cases}$

1) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, 2) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, 3) $\lim_{x \to 2} f(x)$.

d) $f(t) = \begin{cases} 3 + t^2, \text{ se } t < -3, \\ 0, \text{ se } t = -3, \\ 9 - t^2, \text{ se } t > -3. \end{cases}$

1) $\lim_{t \to -3^+} f(t)$, 2) $\lim_{t \to -3^-} f(t)$, 3) $\lim_{t \to -3} f(t)$.

6. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L.$$

Determine c e L.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

a) Supondo que $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ calcule $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x}$.

b) Supondo que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$.

c) Supondo que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

8. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e positiva e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = +\infty.$$

9. Dê exemplos de funções f e g tais que

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$, e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$, e $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = 1$;

c) $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] \neq 0$.