MAT1351 — Lista 7 — Gabarito

Prof. Kostiantyn Iusenko
Monitor: Guilherme C. Cruz

Para os exercícios de limites, consulte o site WolframAlpha e, para os de gráficos, utilize o Geogebra (ou o WolframAlpha).

Polinômio de Taylor

1. (a) O polinômio é $x - \dfrac{x^2}{2}$

   (b) O polinômio é $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

   (c) O polinômio é $1 + \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{(x-1)^2}{9}$

   (d) O polinômio é $1 + x^2$

   (e) O polinômio é $2 + \dfrac{x-4}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{64}$

2. Para $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, temos $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

   Para $f(x) = e^{x^3 - x}$, temos $1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6}$.

   Para $f(x) = \operatorname{tg} x$, temos $x + \dfrac{x^3}{3}$.

3. $(x-1) + \dfrac{5}{2}(x-1)^2 + \dfrac{11}{6}(x-1)^3 + \cdots + \dfrac{6(-1)^n(x-1)^n}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

4. $x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$

5. $3 + 9(x-1) + 13(x-1)^2 + 11(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$

6. Para esse exercício, farei o primeiro item. Para os demais, comparem os resultados obtidos com os de uma calculadora. A ideia é que, quando sabemos o valores de f e de suas derivadas em um ponto a, podemos utilizar o polinômio de Taylor como uma aproximação de f em valores x próximos de a. O erro do polinômio de Taylor de ordem n é menor do que $M\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, onde M é um limite superior de $|f^{(n+1)}(x)|$.

   (a) Sabemos que $\ln(1) = 0$, então podemos escolher $f(x) = 1 + x$, $a = 0$ e $x = 0,3$. A derivada de $f^{(n+1)}$ é limitada por $n!$, então $M = n!$. Logo, para que o erro satisfaça

   $$M\frac{(1,3-1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

   devemos ter que $(0,3)^{n+1} < 10^{-5}(n+1)$. Reparando que $n = 8$ é uma possível solução dessa desigualdade, temos que uma possível aproximação é

   $$\ln(1,3) \approx (0,3) - \frac{(0,3)^2}{2} + \frac{(0,3)^3}{3} - \frac{(0,3)^4}{4} + \frac{(0,3)^5}{5} - \frac{(0,3)^6}{6} + \frac{(0,3)^7}{7} - \frac{(0,3)^8}{8}$$
   $$= 0.2623625416071428571428571\ldots$$