MAT1351 — Lista 6 — Gabarito

Prof. Kostiantyn Iusenko

Monitor: Guilherme C. Cruz

1.

2. A função $f(x) = 1 - \sqrt{3}x^2$ tem como raízes $x = -1$ e $x = 1$, mas $f'(x) \neq 0$ para todo x. Isso não contradiz o TVM, pois f não é diferenciável em $x = 0$.

3. A reta passando pelos pontos A e B tem coeficiente angular igual a 3. A reta paralela deve ser tangente ao gráfico em $x = 1$.

4. Nesse exercício, a ideia é utilizar o Teorema do Valor Médio (TVM) para obter as desigualdades. Farei apenas o primeiro item como um modelo para os outros itens.

   (a) Pelo TVM, temos que $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y} = \cos c$, para algum c entre x e y. Logo:

   $$\frac{|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|}{|x - y|} = |\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y}| \leqslant 1$$

   Note que a desigualdade acima implica na desigualdade do enunciado.

5. a) A função $f = |x-2|$ não tem os pontos críticos no $[1, 4]$. Mínimo da função é 0 em $x = 2$, máximo é 2 em $x = 4$.

   b) A função f não tem os pontos críticos no $[2, 3]$. Assim mínimo da função é $-\frac{1}{2}$ em $x = 2$, máximo é $-\frac{1}{6}$ em $x = 3$.

   c) A função f tem ponto crítico em $x = 2$, este ponto é mínimo local (pelo teste da segunda derivada). Temos $f(1) = 17$, $f(2) = 9$, $f(3) = 9 + 16/3$. Assim mínimo global é $(2, 9)$, máximo global é $(3, 43/3)$.

   d) A função f tem ponto crítico em $x = 2$, este ponto é mínimo local. Temos $f(-3) = 27, f(2) = 2, f(10) = 54$. Assim mínimo global é $(2, 2)$, máximo global é $(10, 54)$.

   e) A função f tem ponto crítico em $x = \frac{1}{3}$, este ponto é máximo local (pelo teste da segunda derivada). Temos $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $f(4) = -6$. Assim mínimo global é $(4, -6)$, máximo global é $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$.

   f) A função f não tem pontos críticos. Temos $f(-1) = 3$, $f(1) = 1$. Assim, mínimo global é $(1, 1)$, máximo global é $(-1, 3)$.

   g) A função f é não-negativa e atinge 0 em $x = 1$ e $x = 2$. Assim, $(1, 0)$ e $(2, 0)$ são seus mínimos globais. Ela possui como único ponto crítico $x = \frac{3}{2}$. Temos $f(-10) = 132, f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ e $f(10) = 68$. Assim, o ponto $(-10, 132)$ é máximo global.

6. a) A função cresce em $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e decresce em $(-\frac{1}{2}, \infty)$.

   b) Essa função é crescente em toda a reta real.

   c) A função cresce em $(-1, 1)$ e decresce em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$.

   d) A função cresce em $(-1, 1)$ e decresce em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$.

   e) A função cresce em $(0, \dfrac{2}{\log(2})$ e decresce em $(-\infty, 0)$ e $(\dfrac{2}{\log(2)}, \infty)$.

f) A funcão cresce em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$, decresce em $(0, 2)$.

g) A funcão cresce em $(-\infty, -1)$ e $(-1/3, \infty)$, decresce em $(-1, -1/3)$.

h) A funcão cresce em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, decresce em $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.

i) A funcão cresce em $(\sqrt[3]{1/2}, \infty)$, decresce em $(-\infty, 0)$ e $(0, \sqrt[3]{1/2})$.

j) A funcão cresce em $(-\infty, 0)$ e $(\sqrt[3]{2}, \infty)$, decresce em $(0, \sqrt[3]{2})$.

k) A funcão cresce em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, decresce em $(-1, 1)$.

l) A funcão decresce em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, cresce em $(-1, 1)$.

m) A funcão cresce em $(-\infty, \infty)$.

n) A funcão cresce em $(-\infty, 0)$, decresce $(0, \infty)$.

o) A funcão decresce em $(-\infty, \infty)$.

p) A funcão decresce em $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$, cresce em $(1, \infty)$.

q) A funcão decresce em $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$, cresce em $(1, \infty)$.

r) A funcão decresce em $(-\infty, -1/2)$ e $(2, \infty)$, cresce em $(-1/2, 2)$.

s) A funcão decresce em $(-\infty, -1)$, cresce em $(-1, \infty)$.

t) A funcão decresce em $(-\infty, -1)$, cresce em $(-1, \infty)$.

u) A funcão decresce em $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$, cresce em $(1, \infty)$.

v) A funcão cresce em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$, decresce $(0, 1)$ e $(1, 2)$.

w) A funcão cresce em $(-\infty, 0)$, decresce $(0, \infty)$.

7. a) inflexão $x = 1$, no $(-\infty, 1)$ concavidade para baixo, no $(1, \infty$ concavidade para cima.

b) inflexão $x = \frac{1}{6}$, no $(-\infty, \frac{1}{6})$ concavidade para baixo, no $(\frac{1}{6}, \infty)$ concavidade para cima.

c) inflexão em $x = 1$, no $(-\infty, 1)$ concavidade para cima, no $(1, \infty$ concavidade para baixo.

d)

e)

f) inflexão $x = 1$, no $(-\infty, 1)$ concavidade para baixo, no $(1, \infty)$ concavidade para cima.

g) inflexão $x = -1$. no $(-\infty, -1)$ concavidade para cima, no $(1, 0)$ concavidade para baixo, no $(1, \infty)$ concavidade para cima.

h) inflexão $x = 2\ln(2)$, no $(-\infty, 2\ln(2))$ concavidade para baixo, no $(2\ln(2), \infty)$ concavidade para cima.

i) sem inflexões.

j) inflexões: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. no $(-\infty, -\sqrt{3})$ concavidade para baixo, no $(-\sqrt{3}, 0)$ concavidade para cima, no $(0, \sqrt{3})$ concavidade para baixo, no $(\sqrt{3}, \infty)$ concavidade para cima.

k) inflexões: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. no $(-\infty, -\sqrt{3})$ concavidade para cima, no $(-\sqrt{3}, 0)$ concavidade para baixo, no $(0, \sqrt{3})$ concavidade para cima, no $(\sqrt{3}, \infty)$ concavidade para baixo.

l) sem inflexões.

m) sem inflexões.

n) Inflexão em $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sua concavidade é para baixo no $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e para cima nos $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$.

o) Não há ponto de inflexão. Sua concavidade é sempre para cima. Lembre que o domínio é $x > 0$.

8. Neste exercício, buscamos entender algebricamente o que significa um gráfico possuir concavidade para cima ou para baixo.

   a) A função $f(x) = x^n$ para $n > 1$ possui concavidade para cima (também chamada de função convexa) quando $x > 0$. Algebricamente, isso significa que, para todo $t \in [0, 1]$, temos que

$$tf(x) + (1-t)f(y) > f(tx + (1-t)y), \quad x, y > 0, x \neq y$$

   Tomando $t = \frac{1}{2}$, obtemos que

$$\frac{1}{2} \cdot x^n + \frac{1}{2} \cdot y^n > (\frac{x}{2} + \frac{y}{2})^n$$

   Agrupando as parcelas da soma, obtemos exatamente a desigualdade desejada no exercício.

   b) Repita os argumentos acima usando que a função $f(x) = e^x$ tem concavidade para cima.

   c) Repita os argumentos acima usando que a função $f(x) = x \ln x$ tem concavidade para cima.

9. a) Mínimo local: $\left(-1, \, -\frac{1}{2}\right)$. Máximo local: $\left(1, \, \frac{1}{2}\right)$.

   b) Máximo global: $\left(\frac{1}{2}, \, \frac{1}{2e}\right)$.

   c) Não possui pontos criticos.

   d) Máximo local $(1, \, 8)$. Mínimo local: $(2, \, 7)$.

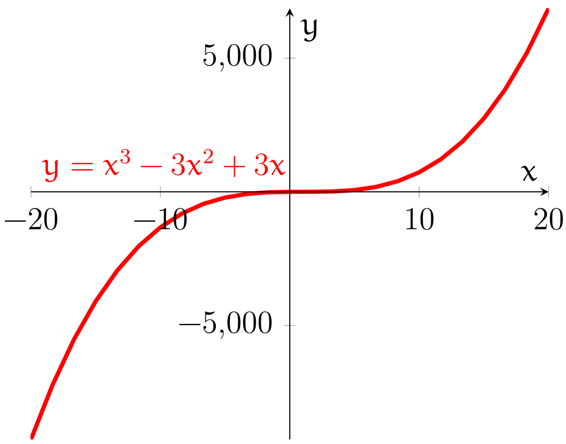
   e) Mínimo global: $\left(-\frac{3}{2}, \, -\frac{1}{4}\right)$.

   f) Máximo global$\left(1, \, \frac{1}{e}\right)$.

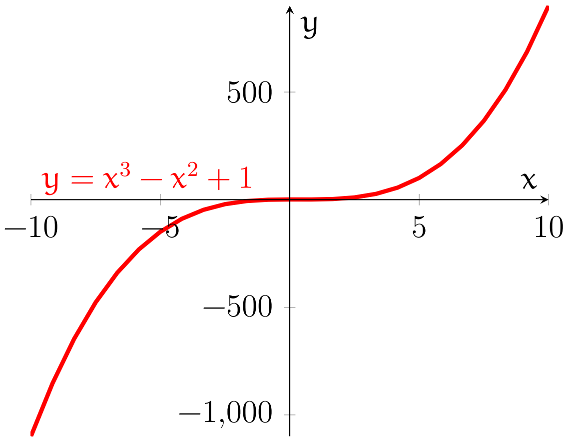
   g) Mínimos locais: $(0, \, 2)$ e $(2, \, 2)$. Máximo local: $(1, \, 3)$.

   h) Máximo local: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \, \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)$. Mínimos locais: $(0, \, 0)$ e $(1, \, 0)$. Ponto de sela: $(-1, \, 0)$

10. a)

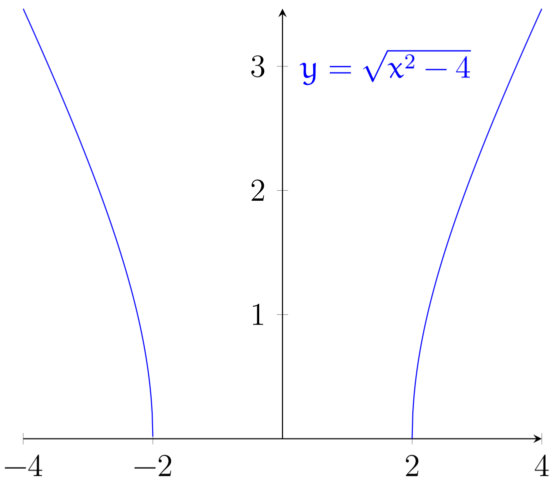


   b)



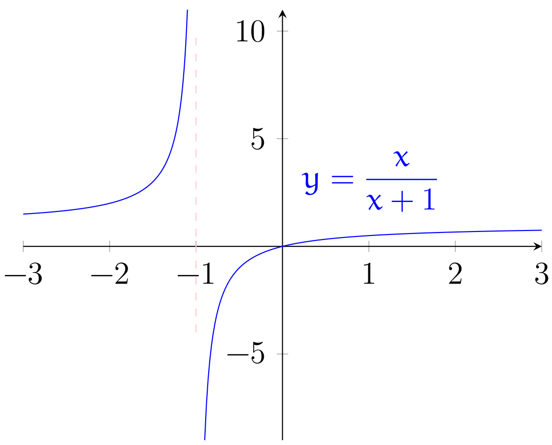
y
500
$y = x^3 - x^2 + 1$
x
−10
−5
5
10
−500
−1,000

c)



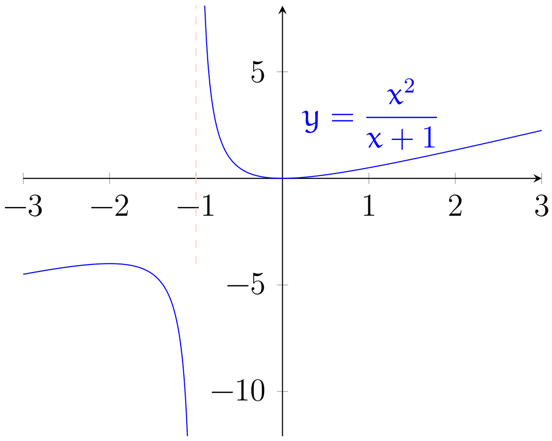
3
$y = \sqrt{x^2 - 4}$
2
1
−4
−2
2
4

d)



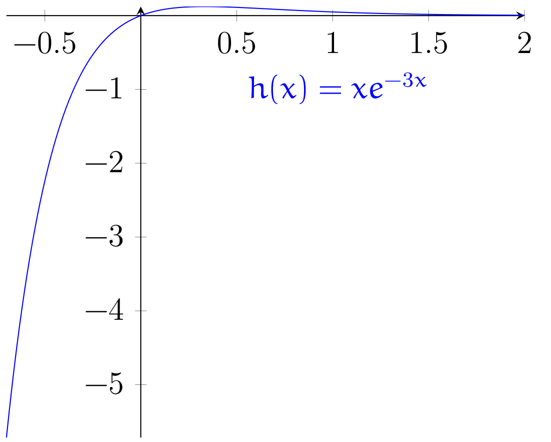
10
5
$y = \frac{x}{x+1}$
−3
−2
−1
1
2
3
−5

e)



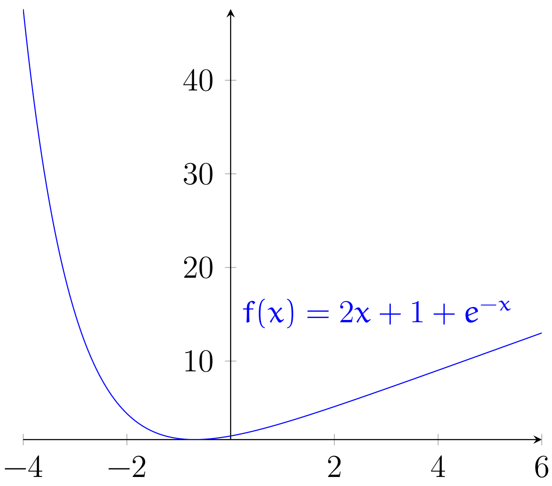
$y = \dfrac{x^2}{x+1}$
5
−5
−10
−3
−2
−1
1
2
3

f)



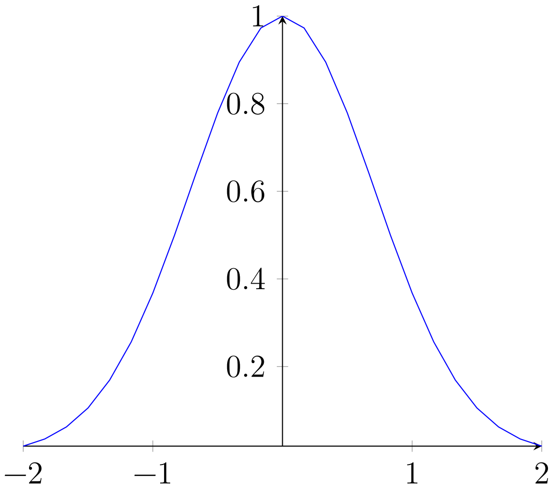
$h(x) = xe^{-3x}$
−0.5
0.5
1
1.5
2
−1
−2
−3
−4
−5

g)

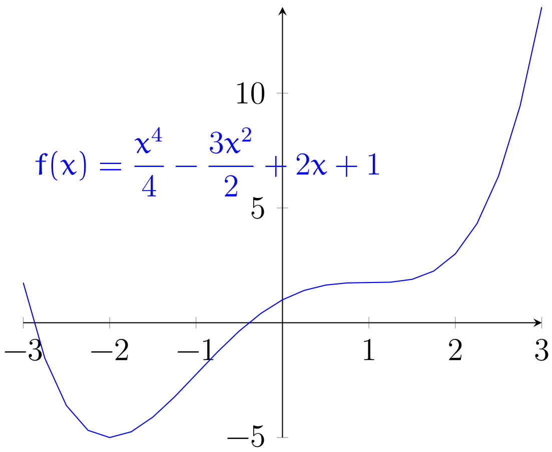


$f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$
40
30
20
10
−4
−2
2
4
6

h)

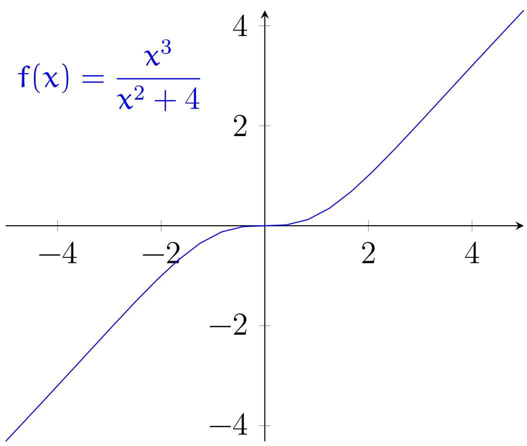

1
0.8
0.6
0.4
0.2
−2
−1
1
2

i)

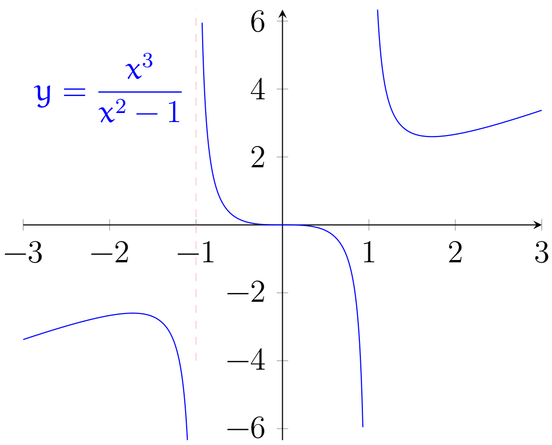

10
$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 1$
5
−3
−2
−1
1
2
3
−5

j)

k)

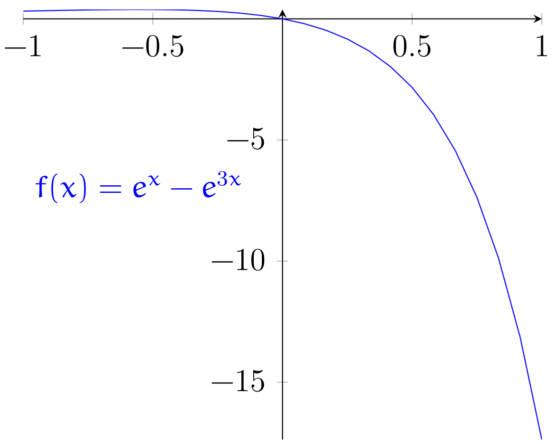

4
$f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$
2
−4
−2
2
4
−2
−4

l)

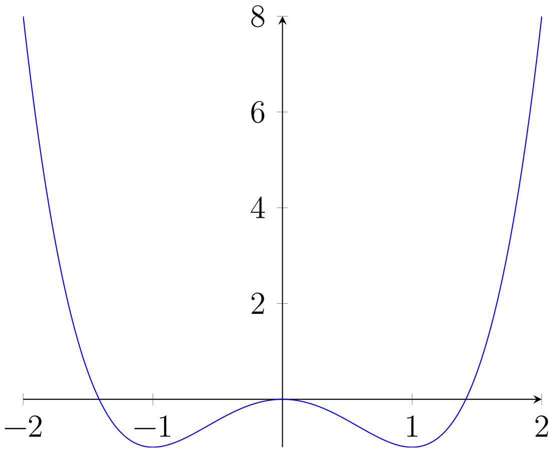


m)

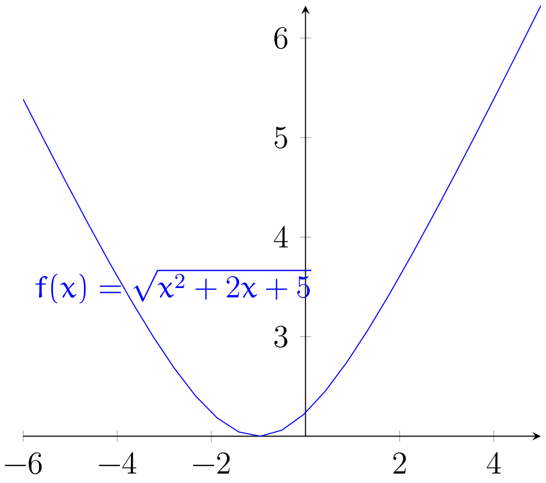
n)



o)



p)



q)