
MAT1351 — Lista 4 — Gabarito

Prof. Kostiantyn Iusenko

Monitor: Guilherme C. Cruz

1. a) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{sen}(3x)}{3x} = 3$

b) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos kx} \frac{\text{sen}(kx)}{x} = k$

c) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx \cdot \text{sen}(nx) \cdot n}{\text{sen}(mx) \cdot nx \cdot m} = \frac{n}{m}$

d) $\frac{3}{5}$

e) 1 (dica: multiplique em cima e embaixo por x^n)

f) $\frac{3}{4}$ (dica: utilize que $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ e que $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen} x \cos x$)

g) Não existe (dica: multiplique em cima e embaixo por $\sqrt[3]{(1 + \cos x)^2}$)

h) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(x)}{x} + \frac{\text{sen}(x)}{x}}{\frac{1 - \cos(x)}{x} - \frac{\text{sen}(x)}{x}} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$

i) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right)}{x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

j) Não existe.

k) Seja $t = \pi - x$, assim $\lim \dots = \pi^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\pi - t)}{t(2\pi + t)} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$.

l) Seja $t = \frac{\pi}{2} - x$, assim $\lim \dots = \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - t)}{\cos(\frac{\pi}{2} - t)} = \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{\cos(t)}{\text{sen}(t)} = 1$.

m) $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \text{sen} x}{(\cos x - \text{sen} x)(\cos x + \text{sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

n) $-\frac{a}{\pi}$

o) Se $\beta = 0$, então $\lim = 1$. Seja $\beta \neq 0$ e $x = \alpha - \beta$, assim $\alpha = x + \beta$. Temos

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{sen}(x + \beta) - \text{sen} \beta)(\text{sen}(x + \beta) + \text{sen} \beta)}{x(x + 2\beta)} \\ &= \frac{\text{sen} \beta}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x) \cos \beta}{x} + \frac{\cos(x) \text{sen}(\beta) - \text{sen}(\beta)}{x} \right) = \frac{\text{sen}(\beta) \cos(\beta)}{2}. \end{aligned}$$

2. a) 0;

b) 0;

$$c) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x^2 + 1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2};$$

d) 0;

e) ∞ ;

f) 2;

g) $\frac{1}{3}$;

h) $\frac{5}{4}$;

i) 0;

j) 0;

k) $\sqrt[3]{5}$;

l) ∞ ;

m) $-\infty$;

n) $\frac{5}{6}$;

o) ∞ ;

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{3}{x}} = 0;$$

q) $\frac{1}{2}$;

$$r) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 3)}{2x + \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \frac{3}{x}}{2 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = \infty;$$

s) $\frac{1}{2}$;

t) ∞ ;

u) 0.

3. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

$$c) f(x)g(x) = \begin{cases} x^2(x^2 + 3), & \text{se } x \leq 1 \\ 2(x + 1), & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

b)

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 4 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x).$$

4. a) $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

b) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

c) Não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

d) $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

5. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2x - 1} = 2$

b) 0

c) $\frac{1}{3\sqrt[3]{3^2}}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6. a) $L = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 27;$

b) $L = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

7. Basta mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Isso pode ser provado lembrando que o produto de uma função limitada (neste caso $\sin(1/x)$) por uma função que tende a zero (neste caso, x^4) tem limite zero.

8. A função do lado esquerdo da equação é negativa, por exemplo, quando $x = 0$. Além disso, note que $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ é raiz de $x^3 + 2x^2 - 1$ que satisfaz $0 < x_0 < 1$. Quando x tende a x_0 pela direita, temos que a função tende a $+\infty$. Além disso, como 1 é raiz de $x^3 + x - 2$, pode-se ver, também, que a função tende a $-\infty$ quando x tende a 1 pela esquerda. Isso mostra, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe um zero da função no intervalo entre x_0 e 1.

9. Para que f seja contínua (i.e. para que o limite de f em 2 e 3 coincida com $f(2)$ e com $f(3)$), obtemos as seguintes equações:
$$\begin{cases} 4 = a \cdot 2^2 - b \cdot 2 + 3 \\ a \cdot 3^2 - b \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 3 - a + b \end{cases}$$

Com isso, deve-se obter o resultado $a = b = \frac{1}{2}$.