Trabalho

Entregar até 31 de Outubro:

3 exercícios do Bloco A,

+ 3 exercícios do Bloco B,

+ 2 exercícios do Bloco C,

+ 2 exercícios do Bloco D.

Bloco A

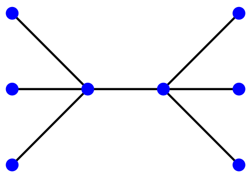
Exercício 1. Estende a prova do Teorema espectral (da Aula 1) para caso $A \in M_n(\mathbb{C})$ ou seja para números complexos.

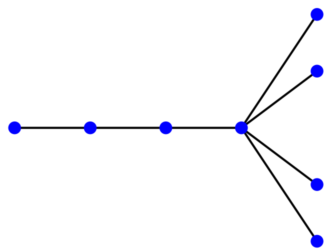
Exercício 2. Mostre que o espectro do grafo completo K_n tem forma $n-1$ com multiplicidade 1 e -1 com multiplicidade $n-1$.

Exercício 3. Mostre que nenhum grafo tem autovalor $1/2$.

Exercício 4. Mostre que nenhum grafo tem autovalor $2+\sqrt{5}$.

Exercício 5. Verifique se ambos os grafos de baixo tem o mesmo polinômio característico $t^4(t^4-7t^2+9)$, de modo que essas duas árvores são cospectrais.





Exercício 6. Define o *cone* sobre um grafo Γ como o grafo obtido pela adição um novo vértice x e juntando todos os vértices de Γ para x. Se Γ é regular de valência k em n vértices assim mostre que o cone sobre Γ tem polinômio característico

$$(x^2-kx-n)\chi_\Gamma(x)/(x-k).$$

Exercício 7. Seja Γ qualquer grafo. Mostre que o grau médio $\bar{k}$ (veja pagina 8 das Aula 1) pode ser calculado como

$$\bar{k} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}A_\Gamma.$$

Bloco B

Exercício 8. Mostre que o polinômio característico do grafo de Dynkin A_n satisfaz o seguinte relação de recurrência

$$\chi_{A_n}(\lambda) = \lambda \cdot \chi_{A_{n-1}}(\lambda) - \chi_{A_{n-2}}(\lambda), \quad n > 2,$$

com $\chi_{A_1}(\lambda) = \lambda$ e $\chi_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

Exercício 9. Mostre que o polinômio característico do grafo de Dynkin $\widetilde{A}_n$ satisfaz:

$$\chi_{\widetilde{A}_n}(\lambda) = \lambda \cdot \chi_{A_n}(\lambda) - 2\chi_{A_{n-1}}(\lambda) - 2.$$

Exercício 10. Usando Exercício 8 descreva o espectro do grafo de Dynkin A_n como na Proposição 4.2 (Aula 1).

Exercício 11. Usando Exercício 8 descreva o espectro do grafo de Dynkin $\widetilde{A}_n$ como na Proposição 4.2 (Aula 1).

Exercício 12. Mostre que o espectro para grafos D_4 e $\widetilde{D}_4$ satisfaz os formulas como na Proposição 4.3.

Exercício 13. Calcule o espectro para grafo E_6.

Bloco C

Exercício 14. Mostre que se dois matrizes Hermitianas satisfazem que $AB = BA$, então A e B são simultaneamente diagonalizáveis.

Exercício 15. Usando exercício anterior mostre "manualmente" as desigualdades de Weyl (Teorema 1.1 da Aula 2) e desigualdades de Lidski (1.4) para caso quando A e B comutam.

Exercício 16. Mostre a desigualdade de Weyl dual

$$\gamma_{i+j-n} \geq \alpha_i + \beta_j,$$

para $1 \leq i, j, i + j - n \leq n$.

Exercício 17. Mostre a desigualdade de Lidski dual

$$\gamma_{i_1} + \ldots + \gamma_{i_k} \geq \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k} + \beta_{n-k+1} + \ldots + \beta_n,$$

para $1 \leq i, j, i + j - n \leq n$.

Exercício 18. Use a desigualdade de Lidskii mais geral

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i \le \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} c_i^*\beta_i,$$

onde $c_1,\ldots,c_n \ge 0$, e $c_1^* \ge \ldots \ge c_n^* \ge 0$ é o rearranjo decrescente de $c_1,\ldots,c_n$ junto com a desigualdade de Hölder para concluir a desigualdade *p-Weilandt-Hoffman*

$$\|(\gamma_i - \alpha_i)_{i=1}^n\|_{\ell_n^p} \le \|B\|_{S^p}$$

para qualquer $1 \le p \le \infty$, onde

$$\|(a_i)_{i=1}^n\|_{\ell_n^p} := (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p}$$

é a norma ℓ^p usual e

$$\|B\|_{S^p} := \|(\beta_i)_{i=1}^n\|_{\ell_n^p},$$

é a norma *p-Schatten* de B.

Bloco D

Exercício 19. Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix},$$

com $\varphi \in (0,\pi/2)$. Mostre que $P = P^2 = P^*$ e $Q = Q^2 = Q^*$, ou sejam P,Q são orthoprojetores em $\mathbb{C}$. Alem disso mostre que se $\phi \neq \phi'$ em $[0,\pi]$ assim os pares correspondentes não são unitarialmente equivalentes (veja Aula 2 para definição).

Exercício 20. Mostre que para qualquer $\varphi \in (0,\pi/2)$ a par P,Q como no exercício anterior é irredutível (ou seja unicos matrizes de $M_2(\mathbb{C})$ que comutam com ambas P e Q) são matrizes escalares.

Exercício 21. and either $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$, or $a = 0, b > 0, c > 0$, or $a > 0, b = 0$ $c > 0$. These representations form the first family in the statement of the theorem. The formulas for P_k are

Considere

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & -b-ic \\ -b+ic & 1-a \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-a & b-ic \\ b+ic & 1+a \end{pmatrix}$$
$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-a & -b+ic \\ -b-ic & 1+a \end{pmatrix}, \quad P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & b+ic \\ -b-ic & 1-a \end{pmatrix},$$

com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Mostre que

(1) $P_i = P_i^2 = P_i^*$ para $i = 1,2,3,4$;

(2) $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2I$;

(3) Para diferentes $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$ os formulas acima apresentas as tuplas unitariamente não equivalentes.

Exercício 22. Mostre que se $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$ assim as tuplas no exercício acima são irredutíveis. Conclui que eles são $*$-representações da algebra $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_4,\chi}$ com $\chi = (2; 1, 1, 1, 1)$.