Cálculo II — Lista 1 com respostas.
Aplicações da integral definida.

Volumes de revolução

1. Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que:

(a) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2}$;

S é obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região A limitada por $x = \frac{1}{2}, x = 2, y = 0$ e $y = \frac{1}{x^2}$
Assim temos que:

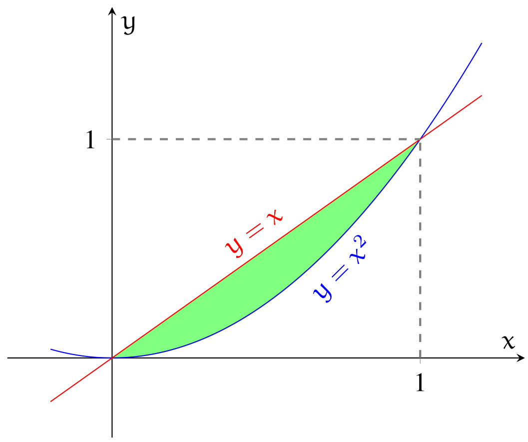
$$V(S) = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} x^{-4} dx = \pi \frac{-x^{-3}}{3} \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \pi\left(\frac{-1}{24} + \frac{8}{3}\right) = \frac{21\pi}{8}$$

(b) $1 \leqslant x \leqslant 4, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$;

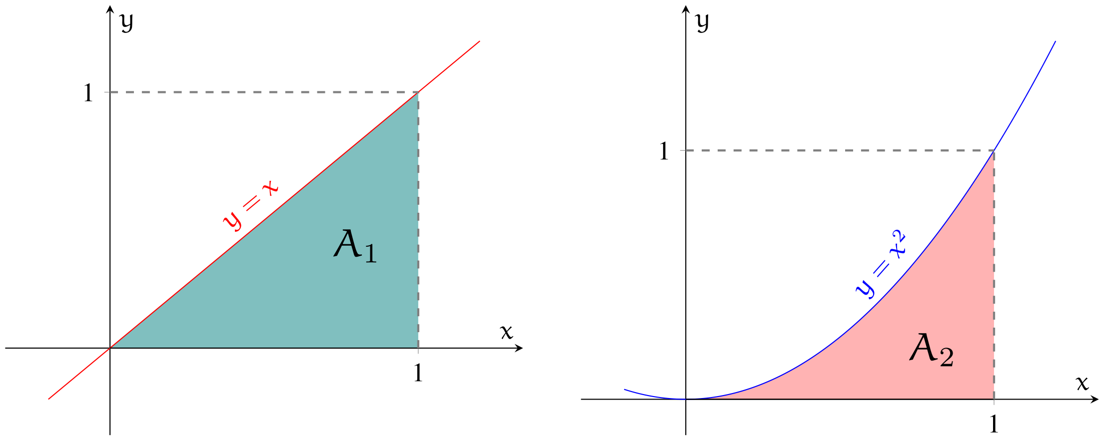
(c) $2x^2 + y^2 \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y$;

(d) $x^2 \leqslant y \leqslant x$;

Diferentemente do item (a), não temos uma delimitação explícita de A em relação ao eixo x. Vamos deduzir tal limitação de $x^2 \leqslant y \leqslant x$. Vejamos o gráfico de $y = x^2$ e $y = x$:



Pelo gráfico vemos que x está limitado com $0 \leqslant x \leqslant 1$, pois $x^2 = x \iff x = 0$ ou $x = 1$
Assim o volume de S será dado pela diferença $V(S_1) - V(S_2)$, onde S_1, S_2 são obtidos ao rotacionarmos em torno do eixo x as regiões A_1, A_2 (respectivamente) mostradas abaixo:



Temos então

$$V(S) = V(S_1) - V(S_2) = \pi \int_0^1 (x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\pi = \frac{2\pi}{15}$$

(e) $0 \leqslant y \leqslant x, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 2;$

(f) $y \geqslant x^2, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 2;$

(g) $\dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2.$

2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

(a) $1 \leqslant x \leqslant e, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \ln x;$

(b) $0 \leqslant x \leqslant 8, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{x};$

(c) $1 \leqslant x \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant y \leqslant x^2 - 1;$

(d) $0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \arctan x;$

(e) $1 \leqslant x \leqslant 4, \qquad 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{x};$

(f) $y \geqslant x^2, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 2;$

(g) $0 \leqslant x \leqslant 2, \qquad \sqrt{x-1} \leqslant y, \qquad 0 \leqslant y \leqslant x^2.$

3. Uma elipse com eixos $2a$ e $2b$ gira-se: 1) em torno do eixo x; 2) em torno do eixo y. Calcule os volumes dos sólidos correspondentes. Em caso particular $a = b$ calcule o volume da bola.

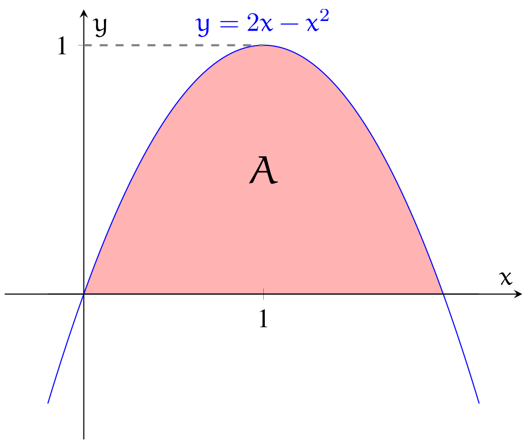
4. Um conjunto limitado pelas parábolas $y^2 = x$ e $x^2 = y$ gira-se em torno do eixo x. Calcule o volume do solido.

5. Calcule o volume do solido obtido pela rotação do conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2, \}$$

em torno do eixo y.

Primeiramente, notemos que não temos explicitamente uma limitação de A no eixo x. Vamos encontrá-la a partir de $0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2$. Vejamos o gráfico de $y = 2x - x^2$:



Sabemos que $2x - x^2 = 0 \iff x(2-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$. Assim temos $0 \leqslant x \leqslant 2$ Podemos assim calcular o volume do sólido S gerado a partir da rotação de A em torno do eixo y

$$V(S) = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3 dx = 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

Área da superfície de revolução

1. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da função dada:

   (a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1;$

   (b) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R \leqslant x \leqslant R, (R > 0);$

   (c) $f(x) = x^2, \qquad 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2};$

   Primeiro perceba temos uma das funções com as quais estamos relativamente mais bem acostumados, o que nos faz pensar que este exercício será bem fácil. Gostaria de pontuar que não é o caso, e que os outros itens desta mesma questão são mais simples de se calcular. Portanto, não se intimide e tente os exercícios restantes.

   Temos que $f'(x) = 2x$, assim conseguimos encontrar a área da superfície gerada pela rotação do gráfico de f com $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$) utilizando

   $$A(S) = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1 + 4x^2}dx$$

   Primeiro calculemos $I = \int x^2\sqrt{1 + 4x^2}$, substituindo $x = \dfrac{\tan u}{2}$, temos $dx = \dfrac{\sec^2 u}{2}du$. Assim temos

   $$I = \int \frac{\tan^2 u}{4}\sqrt{1 + \tan^2 u}\frac{\sec^2 u}{2}du = \frac{1}{8}\int \tan^2 u \sec^3 u\, du = \frac{1}{8}\int \sec^5 u - \sec^3 u\, du$$

   pois utilizamos que $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$. Agora utilizando a seguinte igualdade (para $n \neq 1$):

   $$\int \sec^n u\, du = \frac{\sec^{n-2}u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}u\, du$$

   Resolveremos $I_1 = \int \sec^5 u\, du$ e $I_2 = \int \sec^3 u\, du$:

   $I_1 = \int \sec^5 u\, du = \dfrac{\sec^3 u \tan u}{4} + \dfrac{3}{4}\int \sec^3 u\, du$, e como $\int \sec^3 u\, du = \dfrac{\sec u.\tan u + \ln(\tan u + \sec u)}{2} + C$ (Vimos isso na aula 3 exercício 3.1), temos que:

   $$8I = \int \sec^5 u - \sec^3 u\, du = I_1 - I_2 = \frac{\sec^3 u \tan u}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 u\, du - \int \sec^3 u\, du = \frac{\sec^3 u \tan u}{4} - \frac{1}{4}\int \sec^3 u\, du$$

   $$I = \frac{1}{8}\left(\frac{\sec^3 u \tan u}{4} - \frac{\sec u.\tan u + \ln(\tan u + \sec u)}{8}\right) + C$$

   Finalmente como $\tan u = 2x$, temos $\sec u = \sqrt{1 + \tan^2 u} = \sqrt{1 + 4x^2}$ e assim ficamos com

   $$A(S) = \frac{2\pi}{8}\left(\frac{(\sqrt{1+4x^2})^3(2x)}{4} - \frac{\sqrt{1+4x^2}(2x) + \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{8}\left(\frac{2\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{8}\right)$$

   $$A(S) = \frac{(3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))\pi}{32}$$

   (d) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4;$

   (e) $f(x) = \tan x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

2. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da parábola cúbica $3y - x^3 = 0$ (de $x = 0$ ao $x = a$).

Comprimento das curvas

1. Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

(a) $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

(b) $f(x) = \frac{4}{3}x + 3, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2;$

(c) $f(x) = \ln(x), \qquad 1 \leqslant x \leqslant e;$

(d) $f(x) = \ln(1 - x^2), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2};$

Primeiro, vejamos que $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$, assim precisamos calcular o comprimento (C) da curva

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \Big(\frac{-2x}{1-x^2}\Big)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1-x^2)^2}} dx$$

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\Big(\frac{1+x^2}{1-x^2}\Big)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + (1-1) + x^2}{1-x^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{2}{(1-x)(1+x)} - 1\Big) dx$$

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 1\Big) dx = \Bigg(\ln|1+x| - \ln|1-x| - x\Bigg)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \ln(\frac{3}{2}) - \ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2}$$

(e) $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \qquad a \leqslant x \leqslant b;$

(f) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4};$

(g) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

(h) $f(x) = e^x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

2. Calcule o comprimento das curvas dadas:

(a) $x(t) = 3t - 1, \quad y(t) = t + 1, \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2;$

(b) $x(t) = 3t, \quad y(t) = 2t^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

(c) $x(t) = 1 - \cos t, \quad y(t) = t - \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

(d) $x(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y(t) = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1;$

(e) $x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

O comprimento (C) da curva parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, com $0 \leqslant t \leqslant \pi$, é dado por

$$C = \int_0^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Temos que $x'(t) = e^t(cost - sent)$, e $y'(t) = e^t(sent + cost)$, então:
$(x'(t))^2 = e^{2t}(cos^2t - 2cost.sent + sen^2t) = e^{2t}(1 - 2cost.sent)$
$(y'(t))^2 = e^{2t}(cos^2t + 2cost.sent + sen^2t) = e^{2t}(1 + 2cost.sent)$
Assim basta vermos que

$$C = \int_0^{\pi} \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}e^t\Big|_0^{\pi} = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$$

(f) $x(t) = a\cos^5 t, \quad y(t) = a\operatorname{sen}^5 t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

(g) $x(t) = \cos t + t\operatorname{sen} t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t - t\cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

Coordenadas polares

1. Desenhe a curva dada (em coordenadas polares):

a) $\rho = e^{-\theta}, \qquad \theta \geqslant 0,$

b) $\rho = \cos(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$

c) $\rho = 2, \qquad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$

d) $\rho = \cos(4\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3,$

e) $\rho^2 = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$

f) $\rho = 1 - \operatorname{sen}(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$

g) $\rho = \cos^2(\theta) \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$

2. Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares:

   a) $\rho = 2 - \cos\theta,$

   b) $\rho = \cos(2\theta),$

   c) $\rho^2 = \cos\theta, \rho \geqslant 0,$

   d) $\rho = \cos(3\theta).$

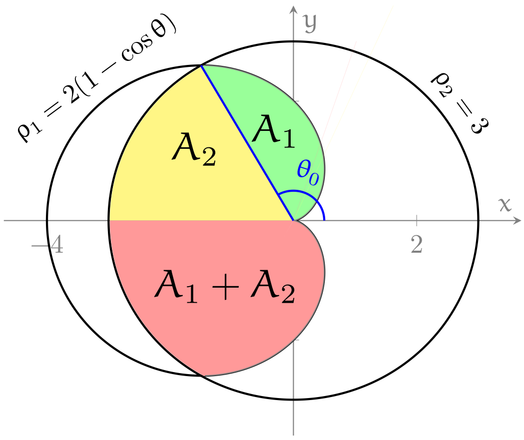
3. Calcule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares:

   a) $\rho = 2 - \cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$.

   b) $\rho = \operatorname{sen}(\theta)$ e $\rho = 1 - \cos\theta$.

   c) $\rho = 3$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.

Primeiramente, esboçando as curvas obtemos:



Notemos que a área A que queremos é na verdade o dobro da área amarela somada com a área verde, pois a área da região que queremos é simétrica em relação ao eixo x. Assim nos basta calcular a área com $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ e dobrarmos nossa resposta no final. Para isso, vamos separar $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ em duas partes A_1, A_2:

A_1, que é dada pela área de $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1(\theta) = 2(1 - \cos\theta)$ variando de $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$

A_2, que é dada pela área de $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\theta) = 3$ variando de $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

Assim $A = 2(A_1 + A_2)$. Agora vamos descobrir explicitamente θ_0, que ocorre na intersecção das curvas ($\rho_1 = \rho_2$):

$$2(1-\cos\theta_0) = 3 \iff \cos\theta_0 = -\frac{1}{2} \iff \theta_0 = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta_0 = \frac{4\pi}{3} \text{ (em } [0, 2\pi))$$

Como estamos com $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi$, temos que $\theta_0 = \dfrac{2\pi}{3}$. Assim basta vermos que:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \rho_1^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 4(1-\cos\theta)^2 d\theta = 2\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta$$

Do cosseno do arco duplo temos $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \iff \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, então:

$$A_1 = 2\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{3 - 4cos\theta + cos2\theta}{2}\right) d\theta = \left(3\theta - 4sen\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = 2\pi - 4\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = 2\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Agora veremos a área A_2:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \rho_2^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 9d\theta = \frac{9}{2}\theta\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Finalmente temos que $A = 2(A_1 + A_2) = 7\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

d) $\rho = \cos\theta$ e $\rho = \operatorname{sen}\theta$.

e) $\rho^2 = \cos\theta$ e $\rho^2 = \operatorname{sen}\theta$ com $\rho \geqslant 0$,

f) $\rho = 1$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.

4. Calcule o comprimento da curva dada em coordenadas polares:

a) $\rho = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

b) $\rho = 1 + \cos(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

c) $\rho = \dfrac{1}{\theta}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \sqrt{3}$.

d) $\rho = e^{-\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

e) $\rho = \sec\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

Temos que o comprimento C da curva parametrizada por $\rho = \sec\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$. é dado por:

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta$$

Assim vejamos que como $\rho'(\theta) = sec\theta.tan\theta$, e como $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$, temos

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{sec^2\theta + sec^2\theta.tan^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(1 + tan^2\theta)sec^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sec^2\theta\, d\theta = tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$C = \sqrt{3}$$

f) $\rho = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Centro de massa

1. Determine o centro de massa da região A:

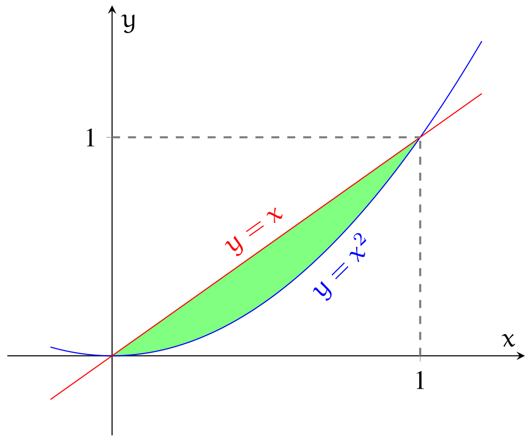
a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^3\}$,

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$,

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$,

Aqui não temos uma limitação explícita de A em relação à x. Vamos explicitá-la por meio de $x^2 \leqslant y \leqslant x$
Com o gráfico de $y = x^2$ e $y = x$ temos que:



Pelo gráfico vemos que x está limitado com $0 \leqslant x \leqslant 1$, pois $x^2 = x \iff x = 0$ ou $x = 1$
Assim vamos calcular primeiro a massa da região A:

$$m = \int_0^1 x - x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Agora vamos calcular os momentos M_x e M_y:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x)^2 - (x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Assim finalmente calcularemos as coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ serão dadas por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ e } \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Finalmente temos que o centro de massa é $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$

2. Determine o centro de massa da região sobre o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2,$
3. Determine o centro de massa da região sobre o gráfico da função $f(x) = 9 - x^2, \qquad -3 \leqslant x \leqslant 3,$
4. Determine o centro de massa da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$, e $g(x) = x^3$.

RESPOSTAS

Volume de revolução

1.

(a) $\frac{21\pi}{8}$

(b) $\frac{15\pi}{2}$

(c) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

(d) $\frac{2\pi}{15}$

(e) $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$

(f) $\frac{44\pi}{15}$

(g) $\frac{\pi}{2}$

2.

(a) $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$

(b) $\frac{768\pi}{7}$

(c) $\frac{9\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi(\pi-2)}{2}$

(e) $\frac{49\pi}{5}$

(f) $\frac{8\pi\sqrt{2}-7\pi}{6}$

(g) $\frac{88\pi}{15}$

3. $\frac{4\pi b^2 a}{3}, \frac{4\pi b a^2}{3}, \frac{4\pi a^3}{3}$

4. $\frac{3\pi}{10}$

5. $\frac{8\pi}{3}$

Área da superfície de revolução

1.

(a) $\frac{\pi}{2}(e^2 + 4 - e^{-2})$

(b) $4\pi R^2$

(c) $\frac{\pi}{32}(3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1))$

(d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$

(e) $\pi(\ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|) + 2\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2. $\frac{\pi}{9}\left((1 + a^4)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

Comprimento das curvas

1.

(a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

(b) $\frac{10}{3}$

(c) $1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + 1/2\left(\ln(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{1+\sqrt{1+e^2}}) - \ln(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}})\right)$

(d) $\ln 3 - \frac{1}{2}$

(e) $\ln(\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right|) - b + a$

(f) $\frac{1}{4}\left[2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \ln(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}})\right]$

(g) $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$

(h) $1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}\ln(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}})$

2.

(a) $\sqrt{10}$

(b) $4\sqrt{2}-2$

(c) 4

(d) $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$

(e) $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

Coordenadas polares

2.

(a) $\frac{9\pi}{2}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{\pi}{4}$

3.

(a) $\frac{5\pi}{2}-3\sqrt{3}$

(b) $\frac{\pi-2}{2}$

(c) $7\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

(e) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) $\frac{8\pi}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.

(a) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\pi+\sqrt{\pi^2+1})$

(b) 4

(c) $\sqrt{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}+\ln(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}})$

(d) $\sqrt{2(1-e^{-2\pi})}$

(e) $\sqrt{3}$

(f) $\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{8}{3}$

Centro de massa

1.

(a) $(\frac{4}{5},\frac{2}{7})$

(b) $(\frac{4}{3\pi},\frac{2}{3\pi})$

(c) $(0,\frac{2}{3\pi})$

(d) $(\frac{1}{2},\frac{6}{15})$

2. $(0,\frac{4}{\pi})$

3. (0, 3.6)

4. $(\frac{12}{25},\frac{3}{7})$