Lista 2 com respostas

MAT3210 — 2° SEMESTRE DE 2021

Exercício 1.
Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{y - 1}$,

(b) $f(x, y) = \ln y - x^3$,

(c) $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$,

(d) $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$,

(e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + y}} + \frac{1}{\sqrt{x - y}}$,

(f) $f(x, y) = \operatorname{arcsen} \frac{y - 1}{x}$,

(g) $f(x, y) = \ln xy$,

(h) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$,

(i) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$,

(j) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$,

(k) $f(x, y) = \ln x - \ln \operatorname{sen} y$.

(l) $f(x, y) = \sqrt{x \operatorname{sen} y}$.

Solução 1.

(a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant \max\{x, 1\}\}$, o semiplano acima das retas $y = x$ e $y = 1$.

(b) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, o semiplano acima do eixo x.

(c) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 \leqslant 1\}$, note que $\mathbb{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$ é a elipse centrada na origem e raios extremos a no eixo x e b no eixo y.

(d) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant |y|\}$, os pontos não negativos na primeira coordenada situados entre e contendo as retas $y = -x$ e $y = x$.

(e) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\}$, os pontos não negativos na primeira coordenada situados entre as retas $y = -x$ e $y = x$.

(f) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y - 1| \text{ e } x \neq 0\}$, os pontos onde a primeira coordenada é maior que -1, situados entre as retas $y = -(x + 1)$ e $y = x + 1$.

(g) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0 \quad \text{ou} \quad x < 0 \text{ e } y < 0\}$, os pontos do primeiro e do terceiro quadrante.

(h) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0 \text{ e } x \geqslant \sqrt{y}\}$, os pontos no e acima do eixo x, limitados por e contidos na parábola $x = y^2$.

(i) Veja (h)

(j) $D(f) = \mathbb{P} \cap \mathbb{D}$, onde $\mathbb{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant (y/2)^2\}$ e $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ é o disco aberto unitário, ou seja, são os pontos do disco aberto unitário limitados por e contidos na parábola $x = (y/2)^2$.

(k) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \quad e \quad \operatorname{sen} y > 0\}$. Observe que $D(f)$ é união infinita das semi-faixas.

(l) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \quad e \quad \operatorname{sen} y < 0 \quad ou \quad x > 0 \quad e \quad \operatorname{sen} y > 0\}$. Observe que $D(f)$ é união infinita das semi-faixas.

Exercício 2.
Esboce as curvas de nível de:

(a) $f(x, y) = 3x + 4y$,

(b) $f(x, y) = xy$,

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$,

(d) $f(x, y) = y(x^2 + 1)$,

(e) $f(x, y) = \dfrac{xy - 1}{x^2}$,

(f) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$,

(g) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$, para níveis $c = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$.

Solução 2.

(a) As curvas de nível de f correspondentes ao nível c são retas $y = \frac{-3}{4}x + \frac{c}{4}$ para $c \in \mathbb{R}$.

(b) A curva de nível para $c = 0$ é a união dos eixos cartesianos x e y. Caso $c \neq 0$, as curvas de nível são dadas pelas hipérboles $y = \dfrac{c}{x}$.

(c) Como a imagem de f é a semireta positiva $\mathbb{R}_+$, as curvas de nível de f são circunferências concêntricas de centro na origem e raio $c^{-1/2}$, para cada nível $c > 0$.

(d) As curvas de nível de f correspondentes ao nível c são dadas por $y = \dfrac{c}{x^2 + 1}$.

(e) As curvas de nível de f correspondentes ao nível c são dadas por $y = cx + \dfrac{1}{x}$.

(f) As curvas de nível de f correspondentes ao nível $c \neq -1$ são retas $y = \frac{c-1}{c+1}x$ e a curva de nível para $c = -1$ é o eixo y.

(g) Para encontrarmos as curvas de nível correspondentes a c, precisamos resolver a equação

$$y^4 + 2(x^2 + 1)y^2 + x^4 - 2x^2 - c = 0.$$

Escrevendo $z = y^2$, obtemos polinômio de segundo grau cujas raízes são

$$z^+ = -x^2 - 1 + \sqrt{3x^2 + c}, \qquad z^- = -x^2 - 1 - \sqrt{3x^2 + c}.$$

Logo a curva de nível correspondente a c será a união das curvas

- $y = \sqrt{-x^2 - 1 + \sqrt{3x^2 + c}}$,
- $y = -\sqrt{-x^2 - 1 + \sqrt{3x^2 + c}}$,
- $y = \sqrt{-x^2 - 1 - \sqrt{3x^2 + c}}$,
- $y = -\sqrt{-x^2 - 1 - \sqrt{3x^2 + c}}$.

Observe que as curvas não estão definidas pra todo x.

Exercício 3.
Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - 2x - 3y$,

(b) $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$,

(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

(d) $f(x,y) = y^2 + 1$,

(e) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$,

(f) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 4y$,

(g) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$,

(h) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Solução 3.

(a) O gráfico é um plano,intersectando o plano xy na reta $y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$.

(b) O gráfico é um paraboloide elíptico com parâmetros $a = 1/3$ e $b = 1/2$. Para $c \neq 0$ suas curvas de nível são elipses
$$\frac{x^2}{c/9} + \frac{y^2}{c/4} = 1.$$

(c) O gráfico é de um parabolóide hiperbólico , com parâmetros $a = b = 1$.

(d) Um esboço desse gráfico pode ser dado através das curvas de níveis. Em cada nível $c \geqslant 1$ a curva de nível é dada pelas retas $(x, \sqrt{c-1})$ e $(x, -\sqrt{c-1})$, as curvas de nível correspondentes aos níveis $c < 1$ são conjuntos vazios.

(e) Um esboço desse gráfico pode ser dado através das curvas de níveis. Em cada nível $c > 0$ a curva de nível é a elípse $(\frac{x}{(c/2)})^2 + (\frac{y}{c})^2 = 1$, a curva do nível $c = 0$ é a origem e as curvas de nível correspondentes aos níveis $c < 0$ são conjuntos vazios.

(f) Um esboço desse gráfico pode ser dado através das curvas de níveis. Em cada nível $c > -5$ a curva de nível é a circunferência $(x+1)^2 + (y+2)^2 = c + 5$ centrada em $(-1, -2)$ e de raio $\sqrt{c+5}$ e as curvas de nível correspondentes aos níveis $c < -5$ são conjuntos vazios.

(g) Um esboço desse gráfico pode ser dado através das curvas de níveis. Em cada nível $e^c > 0, c > 0$, temos circunferências
$$x^2 + y^2 = c^2.$$

(h) Para $\frac{-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, as curvas de níveis de $f(x,y)$ são as raízes da equação do segundo grau
$$cx^2 - x + c = 0.$$

Exercício 4.
Calcule as seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1}}{xy + y}$,

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1} - 1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$,

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$,

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3xy+y^2}{3x^2+4y^2}$,

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$,

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$.

Solução 4.

(a) O limite não existe.

(b) O limite é 2.

(c) O limite não existe.

(d) O limite é 1.

(e) O limite não existe.

(f) O limite é 0.

(g) O limite é 0.

(h) O limite não existe.

(i) O limite não existe.

(j) O limite não existe.

Exercício 5.

Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{a^2-x^2-y^2}$,

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{y-x^2}$,

(c) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$,

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução 5.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq a^2\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$.

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(e) $\mathbb{R}^2$.

(f) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.