# Cálculo II — Lista 5.
## com respostas

**Exercício 1.**
Determine os pontos críticos das funções dadas e classifique-os (ponto de máximo local, de mínimo local ou de sela):

(a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$;

(b) $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$;

(c) $g(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$;

(d) $g(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy$, com $x > 0$ e $y > 0$.

**Solução 1.**
(a) $f_x(x,y) = 2x + 3y - 6$, $f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$,

$f_y(x,y) = 3x + 8y + 2$, $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$, É fácil ver que $(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7})$ é único ponto crítico.

$f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 8$, $f_{xy}(x,y) = 3$, $H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 7$.

Logo $H(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) > 0$, $f_{xx}(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) > 0$ e, portanto $f(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) = -\frac{184}{7}$ é mínimo local.

(b) $f_x(x,y) = 3x^2 + 2y - 5$, $f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$,

$f_y(x,y) = 2x + 2y$, $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

É fácil ver que $\{(-1,1), (\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})\}$ são pontos críticos.

$f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{yy}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 2$, $H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4(3x-1)$.

Logo $H(-1,1) = -16 < 0$, e, portanto $f(-1,1) = 3$ é sela;

$H(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = 16 > 0$, $f_{xx}(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = 10 > 0$ e, portanto $f(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = -\frac{175}{27}$ é mínimo local.

(c) Temos $g_x(x,y) = \frac{2x+2y-6}{3(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^2}$,

$g_y(x,y) = \frac{2x+8y-12}{3(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^2}$, portanto $(2,1)$ é ponto crítico.

$g_{xx}(x,y) = \frac{6(x^2+2xy+4y^2-6x-12y)-2(2x+2y-6)^2}{9(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^5}$,

$g_{yy}(x,y) = \frac{24(x^2+2xy+4y^2-6x-12y)-2(2x+8y-12)^2}{9(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^5}$,

$g_{xy}(x,y) = \frac{6(x^2+2xy+4y^2-6x-12y)-2(2x+2y-6)(2x+8y-12)}{9(\sqrt[3]{x^2+2xy+4y^2-6x-12y})^5}$,

$g_{xx}(2,1) = \frac{72}{9\sqrt[3]{12^5}}$, $g_{yy}(2,1) = \frac{24\cdot 12}{9\sqrt[3]{12^5}}$, $g_{xy}(2,1) = \frac{72}{9\sqrt[3]{12^5}}$, portanto $H(2,1) = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 > 0$.

Como $g_{xx}(2,1) > 0$, $g(2,1) = -\sqrt[3]{12}$ é mínimo local.

(d) $\nabla g(x, y) = (5x^4 - 5, 5y^4 - 5) = (0, 0) \iff x = \pm 1, y = \pm 1$
Portanto os pontos críticos são: $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$

$g_{xx}(x, y) = 20x^3, g_{xx}(1, 1) = g_{xx}(1, -1) = 20 > 0$
$g_{xy}(x, y) = 0 = g_{yx}(x, y)$
$g_{yy}(x, y) = 20y^3$

Assim temos que $H(1, 1) = H(-1, -1) = 20.20 = 400 > 0$
$g_{xx}(1, 1) = 20 > 0$. Logo $(1, 1) = -8$ é ponto de mínimo local
$g_{xx}(-1, -1) = -20 < 0$. Logo $g(-1, -1) = 8$ é ponto de máximo local

Além disso, $H(-1, 1) = H(1, -1) = -(20.20) = -400 < 0$
Logo $g(1, -1) = g(-1, 1) = 0$ é ponto de sela

(e) $\nabla f(x, y) = (y - \dfrac{2}{x^3}, x - \dfrac{1}{y^2}) = (0, 0) \iff x = \dfrac{1}{(\frac{2}{x^3})^2} \iff x = \dfrac{x^6}{4} \iff x = \sqrt[5]{4}$
(Pois $x > 0$) Assim $y = \dfrac{2}{\sqrt[5]{4}^3}$. Chamemos $(\sqrt[5]{4}, \frac{2}{\sqrt[5]{4}^3}) = (a, b)$
Agora vejamos:
$f_{xx}(x, y) = \dfrac{6}{x^4}$
$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1$
$f_{yy}(x, y) = \dfrac{2}{y^3}$

Agora vemos que $H(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - 1$

$$H(a, b) = \frac{6}{\sqrt[5]{4}^4} \frac{2}{(\frac{2}{\sqrt[5]{4}^3})^3} - 1 = \frac{12\sqrt[5]{4}^9}{8\sqrt[5]{4}^4} - 1 = 6 - 1 = 5 > 0$$

Como $f_x x(a, b) = \dfrac{6}{\sqrt[5]{4}^4} > 0, f(a, b)$ é de mínimo local

**Exercício 2.**
Ache os extremos globais das funções:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$

(b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$

(c) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$

**Solução 2.**
(a) $f_x(x, y) = 2x + 3y + 2$, $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$,
$f_y(x, y) = 3x + 4y + 2$, $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$,
$(2, -2)$ é único ponto crítico.
$f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{yy}(x, y) = 4$, $f_{xy}(x, y) = 3$, $H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$.
Logo $H(2, -2) < 0$ e, portanto $f(2, -2) = 0$ é sela e não existem máximos nem mínimos (locais ou globais).

(b) $\nabla f(x,y) = (2x+2y-1, 2x+4y+2) = (0,0) \iff (x,y) = (2, -\frac{3}{2})$
$f_{xx}(x,y) = 2 > 0, f_{xy}(x,y) = 2, f_{yy}(x,y) = 4, H(x,y) = 4 > 0$
Logo $f(2, -\frac{3}{2})$ é ponto de mínimo global

(c) $\nabla f(x,y) = (6x+y-2, 2y+x-2) = (0,0) = \iff (x,y) = (\dfrac{2}{11}, \dfrac{10}{11})$
$f_{xx}(x,y) = 6 > 0, f_{xy}(x,y) = 1, f_{yy}(x,y) = 2, H(x,y) = 11 > 0$
Logo $f(\dfrac{2}{11}, \dfrac{10}{11})$ é ponto de mínimo local

**Exercício 3.**
Seja $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ função que representa uma distribuição de temperatura no plano. Considere a região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 4\ \}$. Determine o ponto do conjunto $D$ onde a temperatura é a menor possível.

**Solução 3.**
É fácil ver que não existem os pontos críticos no interior de $D$. Com $4 = f(0,0)$ é claramente um máximo local (e global), precisamos estudar os valores da função no bordo, ou seja, os valores de $f$ para $(x, 0)$ com $0 \leqslant x \leqslant 2$, $(0, y)$ com $0 \leqslant y \leqslant 4$, e $(x, -2x+4)$ com $0 \leqslant x \leqslant 2$. Como para os dois primeiros conjuntos $f$ assume valor mínimo exatamente na interseção com a reta $y = -2x+4$, precisamos analizar apenas o último caso. Assim, $g(x) = f(x, -2x+4) = -5x^2 + 16x - 12$, $g'(x) = -2(5x-8)$, $g$ é máximo em $x = 8/5$, logo mínimo nos extremos e, portanto, $f$ é mínimo em $(0, 4)$.

**Exercício 4.**
Ache o mínimo e o maximo da função $f(x,y)$ na região $D$:

(a) $f(x,y) = xy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 5\}$;

(b) $f(x,y) = 2x + y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$;

(c) $f(x,y) = 3x + y$, com $x^2 + 2y^2 = 1$;

(d) $f(x,y) = xy$, com $x^2 + 4y^2 = 8$;

(e) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, com $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$;

(f) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$;

(g) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$; $|x| \leqslant 1$; $|y| \leqslant 1$.

**Solução 4.**

(a) O máximo e mínimo são atingidos desde que $D$ é limitada e fechada. Observe que $f$ não possui os pontos criticos no interior de $D$. Na parte inclinada da fronteira temos $g(x) = f(x, -2x+5) = -2x^2 + 5x$, $g'(x) = -4x + 5 = 0$ e $x = 5/4$. É fácil ver que $x = 5/4$ é ponto de máximo de $g(x)$ e portanto $(\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$ é ponto de máximo de $f(x,y)$. Por outro lado os pontos tais que $x = 0$ ou $y = 0$ (ou $\{(x,0), (0,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 5/2, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$) são pontos de mínimo.

(b) Perceba que $D$ é compacto, e $f$ não possui pontos críticos pois $\nabla f(x,y) = (2,1)$.
Vamos então calcular o que ocorre na fronteira, parametrizemos a fronteira: $\gamma(t) = (\cos t, \frac{\sin t}{2})$
Agora queremos achar o máximo e mínimo da função $g(t) = f(\gamma(t)) = 2\cos t + \dfrac{\sin t}{2}$

$g'(t) = -2\sin t + \dfrac{\cos t}{2} = 0 \iff \cos t = 4\sin t$

Como $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, temos $17\sin^2 t = 1$. Chamemos $\theta = \arcsin\sqrt{\dfrac{1}{17}}$ Assim os pontos críticos são $\{\theta, \pi+\theta\}$.

Agora basta ver que, como g é contínua, $\theta < \frac{\pi}{2} < \pi < \pi+\theta$ e $g(\frac{\pi}{2}) = -2 < g(\pi) = -\dfrac{1}{2}$, então $g(\theta)$ é ponto de mínimo global e $g(\pi+\theta)$ é ponto de máximo global (pois a função é estritamente crescente de $\theta$ até $\theta+\pi$).

(c) Essa região pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$
Basta calcular os pontos de máximo e mínimo de $g(t) = f(\gamma(t)) = 3\cos t + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$, assim como feito no item anterior

(d) Parametrizamos $\gamma(t) = (\frac{\cos t}{2\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$
Basta achar pontos de máximo e mínimo de $g(t) = f(\gamma(t)) = \dfrac{\cos t \sin t}{4} = \dfrac{\sin(2t)}{8}$

(e) Como $x > 0, y > 0$, podemos escrever então $y = \dfrac{1}{x}$ e basta calcular os pontos de máximo e mínimo da função $g(x) = f(x, \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{4}{x^2}$. Observe que essa função não deve ter máximo global, mas deve ter mínimo global pois $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$

(f) $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0,0) \iff (x,y) = (1,1)$, mas $(1,1)$ não pertence ao triângulo. Assim basta calcularmos no bordo do triângulo.

i Ligando (0,0) com (0,1):
Temos que $x = 0$. Assim vejamos que basta calcular pontos de máximo e mínimo de $g(y) = f(0,y) = y^3$ em [0,1]
Máximo em $g(1) = 1$ e mínimo em $g(0) = 0$

ii Ligando (0,0) com (1,0):
Temos que $y = 0$. Assim vejamos que basta calcular pontos de máximo e mínimo de $h(x) = f(x,0) = x^3$ em [0,1]
Máximo em $h(1) = 1$ e mínimo em $h(0) = 0$

iii Ligando (1,0) com (0,1):
Temos que a reta que liga esses pontos se dá por $y = 1 - x$. Assim vejamos que basta calcular pontos de máximo e mínimo de $k(x) = f(x, 1-x) = x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3x(1-x) = 1 - 6x + 6x^2$ em [0,1]
Máximo em $h(1) = h(0) = 1$ e mínimo (por simetria da parábola) em $h(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

Assim temos que os pontos de máximo são (0,1) e (1,0), e o de mínimo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(g) $\nabla f(x,y) = (2xe^{x^2+y^2+y}, (2y+1)e^{x^2+y^2+y}) = (0,0) \iff (x,y) = (0, -\frac{1}{2})$, que está no interior do quadrado.

$f_{xx}(x,y) = e^{x^2+y^2+y}(2x+2)$
$f_{xy}(x,y) = e^{x^2+y^2+y}(2x+2y+1)$
$f_{yy}(x,y) = e^{x^2+y^2+y}(2y+3)$

Agora vejamos que $H((0,-\frac{1}{2})) = e^{-\frac{1}{2}}(2)(2) > 0$
Como $f_{xx}(0,-\frac{1}{2}) > 0$, temos que $f(0,-\frac{1}{2}))$ é ponto de mínimo local. Agora vejamos o bordo:

i Para $x = \pm 1, y \in [-1, 1]$ :
Queremos minimizar a função $g(y) = f(\pm 1, y) = e^{y^2+y+1}$
$g'(y) = (2y+1)e^{y^2+y+1} = 0$ somente para $y = -\frac{1}{2}$. Percebamos então que como g' é negativa à esquerda de $-\frac{1}{2}$, e positiva à direita, temos que $y = -\frac{1}{2}$ é mínimo local. Ainda vejamos os pontos extremantes, que serão de máximo local. Então ficamos com:

$(\pm 1, -\frac{1}{2})$ mínimos locais, $(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ máximos locais

ii Para $y = 1, x \in [-1, 1]$ :
Queremos minimizar a função $h(x) = f(x, 1) = e^{x^2+2}$
$h'(x) = xe^{x^2+2} = 0$ somente para $x = 0$. Percebamos então que como h' é negativa à esquerda de 0, e positiva à direita, temos que $x = 0$ é mínimo local. Ainda vejamos os pontos extremantes, que serão de máximo local. Então ficamos com:

$(0, 1)$ mínimo local, $(\pm 1, 1)$ máximos locais

iii Para $y = -1, x \in [-1, 1]$ :
Queremos minimizar a função $k(x) = f(x, -1) = e^{x^2}$
$k'(x) = xe^{x^2} = 0$ somente para $x = 0$. Percebamos então que como k' é negativa à esquerda de 0, e positiva à direita, temos que $x = 0$ é mínimo local. Ainda vejamos os pontos extremantes, que serão de máximo local. Então ficamos com:

$(0, -1)$ mínimo local, $(\pm 1, -1)$ máximos locais

Agora basta calcular o valor de f em $(0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1), (\pm 1, -\frac{1}{2}), (0, -\frac{1}{2})$ e decidir qual o maior e qual o menor.

**Exercício 5.**

(a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.

(b) Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

(c) Considere a curva C dada pela intersecção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ com o plano $2x + y + z = 12$. Determine a distância máxima e mínima entre os pontos de C e o plano $z = 0$.

(d) Considere a reta dada por interseção dos planos
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$
Determine o ponto dessa reta que se encontra mais próximo da origem.

**Solução 5.**

(a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.

A distância entre $(0, 0)$ e um ponto $(x, y)$ qualquer é $d = d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como $d > 0$, temos d mínimo se $d^2$ for mínimo. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, $\nabla d^2(x, y) = \lambda \nabla f(x, y)$ com $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3$ obtemos:

$$2x = \lambda(2x + y) \tag{1}$$
$$2y = \lambda(x + 2y) \tag{2}$$
$$x^2 + xy + y^2 = 3 \tag{3}$$

Multiplicando (1) por $y$ e (2) por $x$ e comparando ambas igualdades, temos $x^2 = y^2$. Logo $x = y$ ou $x = -y$. Substituindo $x$ em (3) temos: no primeiro caso $y = \pm 1$ e no segundo caso $y = \pm\sqrt{3}$. Assim, a distância mínima, $\sqrt{2}$, ocorre nos pontos $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ da elipse. Observe que a distância máxima é $d(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = d(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \sqrt{6}$.

(b) A distância entre $(0, 0, 0)$ e um ponto $(x, y, z)$ qualquer é $d = d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Como $d > 0$, temos $d$ mínimo se $d^2$ for mínimo.

Agora percebamos que os nossos pontos estão no plano, logo podemos colocar x em evidência e teremos que minimizar a função $f(y, z) = d^2(4 - 2y + 3z, y, z) = (4 - 2y + 3z)^2 + y^2 + z^2$

$\nabla f(y, z) = (2(4-2y+3z)(-2)+2y, 2(4-2y+3z)(3)+2z) = (10y-6z-16, -12y+20z+24)$

$$\nabla f(y, z) = (0, 0) \iff (y, z) = (\tfrac{11}{8}, -\tfrac{3}{8}) \implies x = \tfrac{1}{8}$$

Assim o ponto que minimiza a distância é $(\frac{1}{8}, \frac{11}{8}, -\frac{3}{8})$. Podemos dizer isso diretamente pois esse ponto é o único crítico de uma função que tende ao infinito quando nossos vetores crescem muito, assim esse ponto deve ser mínimo.

(c) A distância entre um ponto $(x, y, z)$ de C e o plano z=0 é $d(x, y, z) = |z|$. Analisar d é equivalente a analisar $d^2$. Vamos assim usar multiplicadores de Lagrange sobre $g(x, y, z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} - 1, h(x, y, z) = 2x + y + z - 12$

$\nabla d^2(x, y, z) = (0, 0, 2z), \nabla g(x, y, z) = (\frac{x}{6}, \frac{y}{8}, 0), \nabla h(x, y, z) = (2, 1, 1)$

$$\begin{cases} (0, 0, 2z) = \lambda(\frac{x}{6}, \frac{y}{8}, 0) + \mu(2, 1, 1) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Daqui tiramos que $(x, y, z) = (\dfrac{-12\mu}{\lambda}, \dfrac{-8\mu}{\lambda}, \dfrac{\mu}{2})$

Aplicando em g temos duas soluções: $(x, y) = \pm(3, 2)$
Aplicando em h então teremos: $z = 20$ ou $z = 4$

Assim temos mínimo em $-3, -2, 4)$ e máximo em (3,2,20)

(d) Obtemos os seguintes coeficientes de Lagrange: $\lambda = -\dfrac{28}{11}, \mu = \dfrac{38}{11}$

Assim temos $(x, y, z) = (6 + \dfrac{3\lambda}{2}, 3 + \dfrac{3\lambda}{2}, 3 + \lambda)$ o ponto que queríamos

**Exercício 6.**

Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, das funções relacionadas sujeitas ao respectivo vínculo indicado:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2 = 4;$

(b) $f(x, y) = xy, \qquad 4x^2 + 9y^2 = 36;$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad 3x + 2y + z = 6;$

(d) $f(x, y, z) = x + y + z, \qquad x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36;$

(e) $f(x, y, z) = xyz, \qquad 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6.$

**Solução 6.**

(a)

$$2x = \lambda(2x) \tag{4}$$
$$-2y = \lambda(2y) \tag{5}$$
$$x^2 + y^2 = 4 \tag{6}$$

Resolvendo a equação obtemos $xy = -xy$, logo $x = 0$ ou $y = 0$. Se $x = 0$, $y = \pm 2$, se $y = 0$, $x = \pm 2$. Assim, 4 é um máximo e ocorre nos pontos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$, e -4 é um mínimo e ocorre nos pontos $(0, -2)$, $(0, 2)$.

(b) Podemos parametrizar a elipse com $(x, y) = (3\cos(t), 2\sin(t))$ e então analisar $f(\gamma(t)) = 3\sin 2t$ Valor máximo: 3, valor mínimo: -3

(c) Coeficientes de Lagrange:$\lambda = \dfrac{6}{7}$, mínimo: $(x, y, z) = \lambda(3, 2, 1)$

(d) Coeficientes de Lagrange:$\lambda = \pm\frac{7}{72}$, os pontos cujos valores são máximos ou mínimos são dados, respectivamente, por $(x, y, z) = \pm\lambda^{-1}(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{18})$

(e) Temos dois jeitos diferentes para resolver esse exercício. Em ambos nós não calculamos explicitamente $\lambda$:

Temos inicialmente a equação

$$(yz, xz, xy) = \lambda(4x, 6y, 2z)$$

Daqui podemos seguir caminhos diferentes:

[i] Multiplicando cada coordenada "pelo que falta", obtemos $(xyz, xyz, xyz) = \lambda(4x^2, 6y^2, 2z^2)$

Assim podemos isolar $x^2, y^2, z^2$ e aplicar na equação do elipsóide para obter $xyz = 4\lambda$
Então substituindo na equação acima, temos que $x^2 = 1, y^2 = \frac{3}{2}, z^2 = 2$ e terminamos todos os pontos críticos que não são de sela (os de sela são quando $\lambda = 0$)

[ii] Vamos dividir cada coordenada pela outra. Assim cancelamos $\lambda \neq 0$

$$\frac{y}{x} = \frac{yz}{xz} = \frac{4x\lambda}{6y\lambda} = \frac{2x}{3y} \iff 2x^2 = 3y^2$$

Analogamente teremos que $2x^2 = z^2$

Assim basta vermos da equação inicial do elipsóide que teremos $x^2 = 1$ e segue então $y^2 = \frac{3}{2}, z^2 = 2$

(Obs: Perceba que xyz tem máx/min quando $2x^2 = 3y^2 = z^2$. Perceba que não há nada de especial nos coeficientes. De forma geral, pode-se dizer que máx/min de xyz em um elipsóide $ax^2 + by^2 + cz^2 = r$ se dá para $ax^2 = by^2 = cz^2$)

**Exercício 7.**
Ache máximo e mínimo relativo da função dada:

(a) $f(x,y,z) = x + y + z$, com $x^2 + y^2 = 1$ e $4x + 4y - z^2 = 0$.

(b) $f(x,y,z) = x - y$, com $x^2 + z^2 - y = 0$ e $y = 2z$.

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, com $x + y + z = 1$ e $x + 2y + 3z = 6$.

**Solução 7.**
(a)

$$1 = \lambda(2x) + 4\mu \tag{7}$$
$$1 = \lambda(2y) + 4\mu \tag{8}$$
$$1 = -2\mu z \tag{9}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{10}$$
$$4x + 4y - z^2 = 0 \tag{11}$$

$x = \frac{1-4\mu}{2\lambda}$, $y = x$, $z = -\frac{1}{2\mu}$, de (11) temos $\frac{1-4\mu}{2\lambda} = \frac{1}{32\mu^2}$ e (10) nos dá $\mu = \pm\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}$, logo $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt[4]{32}) = \sqrt{2} - \sqrt[4]{32}$ é um mínimo e $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt[4]{32}) = \sqrt{2} + \sqrt[4]{32}$ é um máximo.

(b) Coeficientes de Lagrange: $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{4}, \mu = 1 + \lambda$. Temos dois pontos a serem calculados: $(x,y,z) = (\dfrac{1}{2(1+\mu)}, 2(1 - \dfrac{1}{1+\mu}), 1 - \dfrac{1}{1+\mu})$

(c) Coeficientes de Lagrange: $\lambda = -\dfrac{22}{3}, \mu = 4$. O ponto é de mínimo (veja ex5b) e ocorre para $(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(\lambda + \mu, \lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu)$

(Observe que poderíamos ter calculado esse exercício usando apenas cálculo 1 ao tomarmos y e z dependentes de x usando as equações dos planos)

**Exercício 8.**
Suponha que a temperatura num ponto $(x,y)$ de uma placa de metal é $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperatura encontrada pela formiga?

**Solução 8.**
Coeficientes de Lagrange: $\lambda_+ = 4, \lambda_- = -1$. Pontos críticos: $(x,y) = \pm(1,2), (x,y) = \pm(2,-1)$