Cálculo II — Lista 4.
com respostas

Exercício 1.
Esboce a curva de nível de $f(x, y)$ que passa pelo ponto P e desenhe o vetor gradiente de f em P:

(a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$; $P = (-2, 2)$;

(b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P = (-2, 0)$;

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$; $P = (2, -1)$.

Solução 1.
(a) A curva de nível é a parábola $x = -\frac{1}{2}y^2$ e o vetor gradiente é $\nabla f(-2, 2) = (1/4, 1/2)$;

(b) A curva de nível é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ e o vetor gradiente é $\nabla f(-2, 0) = (-4, 0)$;

(c) A curva de nível é a hipérbole $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ e o vetor gradiente é $\nabla f(2, -1) = (4, 2)$.

Exercício 2.
Em cada caso, esboce a superfície de nível c da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

a) $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$;

b) $F(x, y, z) = x^2 - e^y + z^2$ e $c = 0$;

c) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$;

d) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$;

e) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$;

f) $F(x, y, z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$.

Solução 2.
a) A superfície de nível é o plano $x + 2y + 3z - 1 = 0$;

b) A superfície de nível é dada por circunferências paralelas ao plano x, z dadas por $x^2 + z^2 = e^y$;

c) A superfície de nível é o cone $x^2 + y^2 = z^2$;

d) A superfície de nível é o hiperbolóide de duas folhas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$;

e) A superfície de nível é o hiperbolóide de uma folha $x^2y^2 - z^2 = 1$;

f) A superfície de nível é dada por hipérboles $x^2 - y^2 = 1$ para cada altura de z.

Exercício 3.
Determine a derivada direcional de f no ponto P na direção do vetor $\vec{u}$:
(a) $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos y$; $P = (\pi/3; -2\pi/3)$; $u = (2, 3)$;
(b) $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$; $P = (2, -1; -2)$; $u = (1, 2, -2)$.

Solução 3.

1. A derivada direcional é $\dfrac{\partial f}{\partial u}(\pi/3, -2\pi/3) = 2\cos x \cos y - 3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 7/4$;

2. A derivada direcional é $\dfrac{\partial f}{\partial u}(2, -1, -2) = \frac{yz}{2\sqrt{xyz}} + 2\frac{xz}{2\sqrt{xyz}} - 2\frac{xy}{2\sqrt{xyz}} = -1/2$.

Exercício 4.
Determine a derivada direcional máxima de f no ponto P e a direção em que isto ocorre:
(a) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$; $P = (1, 5, -2)$.
(b) $f(x, y, z) = \sqrt{xy^2z^3}$; $P = (2, 2, 2)$.

Solução 4.
(a) A derivada direcional máxima ocorre na direção $\nabla f(1, 5, -2) = (6, 10, -16)$ com valor $|(6, 10, -16)| = 14\sqrt{2}$;

(b) A derivada direcional máxima ocorre na direção $\nabla f(2, 2, 2) = (\frac{y^2z^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}, \frac{2xyz^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}, \frac{3xy^2z^2}{2\sqrt{xy^2z^3}}) = (2, 4, 6)$ com valor $|(2, 4, 6)| = 2\sqrt{14}$.

Exercício 5.
Suponha que f é diferenciável em $(1, 2)$, com $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = -5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 10$, onde $\vec{u} = (\frac{3}{4}, -\frac{4}{5})$ e $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ Determine:

(a) $f_x(1, 2)$;

(b) $f_y(1, 2)$;

(c) a derivada direcional de f em $(1, 2)$ na direção e sentido da origem.

Solução 5.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = 3/4 f_x(1, 2) - 4/5 f_y(1, 2) = -5$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 4/5 f_x(1, 2) - 3/5 f_y(1, 2) = 10$$

(a) $f_x(1, 2) = 1100/19$;

(b) $f_y(1, 2) = 1150/19$;

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial(-1, -2)}(1, 2) = -\frac{1100}{19} - 2\frac{1150}{19} = -3400/19$.

Exercício 6.
Encontre a derivada direcional de $f(x, y) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ no ponto $(2, 1)$ em direção ao ponto $(1, 1)$.

Solução 6.
$\dfrac{\partial f}{\partial(1,1)}(2,1) = 2xy^2 - y^3 + 2x^2y - 3xy^2 - 3 = 4 - 1 + 8 - 6 - 3 = 2.$

Exercício 7.

Mostre que a derivada direcional da função $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ em qualquer ponto da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ na direção do vetor normal da elipse é 0.

Solução 7.
A curva que determina a elipse é $r(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \operatorname{sen} t)$, o vetor tangente unitário é
$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = (\frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos^2 t+1}}, \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\cos^2 t+1}})$ e $T'(t) = (\frac{-2\cos t}{(\cos^2 t+1)^{3/2}}, \frac{-\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{(\cos^2 t+1)^{3/2}})$ é um vetor ortogonal, logo aponta na direção do vetor normal à elipse. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial T'}(r(t)) = \frac{-2\cos t}{(\cos^2 t+1)^{3/2}}(-y^2/x^2) + \frac{-\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{(\cos^2 t+1)^{3/2}}(2y/x) = \frac{4\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t}{\cos t(\cos^2 t+1)^{3/2}} = 0$$

Exercício 8.

Dados $z = 3xy - 4y^2$; $x = 2se^r$; $y = re^{-s}$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial r}$ de duas maneiras expressando z em termos de r e s;

Solução 8.
$z = 3xy - 4y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 3y\frac{dx}{dr} + (3x-8y)\frac{dy}{dr}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 3y\frac{dx}{ds} + (3x-8y)\frac{dy}{ds}$;
$x = 2se^r$, $\frac{dx}{dr} = 2se^r = \frac{d^2x}{dr^2}$, $\frac{dx}{ds} = 2e^r = \frac{d^2x}{dsdx}$;
$y = re^{-s}$, $\frac{dy}{dr} = e^{-s}$, $\frac{d^2y}{dr^2} = 0$, $\frac{dy}{ds} = -re^{-s}$, $\frac{d^2y}{dsdx} = -e^{-s}$;
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 3y\frac{d^2x}{dr^2} + 3\frac{dy}{dr}\frac{dx}{dr} + 3\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr} - 8\frac{dy}{dr}\frac{dy}{dr} + (3x-8y)\frac{d^2y}{dr^2} = 6rse^{r-s} + 12se^{r-s} - 8e^{-2s} = (r+2)6se^{r-s} - 8e^{-2s}$;
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial r} = 3y\frac{d^2x}{dsdr} + 3\frac{dy}{ds}\frac{dx}{dr} + 3\frac{dx}{ds}\frac{dy}{dr} - 8\frac{dy}{ds}\frac{dy}{dr} + (3x-8y)\frac{d^2y}{dsdr} = 6re^{r-s} - 6rse^{r-s} + 6e^{r-s} + 8re^{-2s} - 6se^{r-s} + 8re^{-2s} = (1+r-s-rs)6e^{r-s} + 16re^{-2s}$;
$z = 6rse^{r-s} - 4r^2e^{-2s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 6se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8re^{-2s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 6re^{r-s} - 6rse^{r-s} + 8r^2e^{-2s}$;
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 6se^{r-s} + 6se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8e^{-2s} = (r+2)6se^{r-s} - 8e^{-2s}$;
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial r} = 6e^{r-s} + 6re^{r-s} - 6se^{r-s} - 6rse^{r-s} + 16re^{-2s} = (1+r-s-rs)6e^{r-s} + 16re^{-2s}$.

Exercício 9.
Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Se $f(x,y) \neq (0,0)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

(b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$

(d) O que aconteceu? Porque as derivadas mistas não são iguais?

Solução 9.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)/(x^2 + y^2)^2;$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)/(x^2 + y^2)^2;$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0$

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \dfrac{\frac{y(-y^4)}{y^4}}{y} = -1;$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \dfrac{\frac{x(x^4)}{x^4}}{x} = 1$

4. As derivadas parciais de segunda ordem precisam ser contínuas no ponto.

Exercício 10.

Uma função $w = f(x, y, z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

é chamada *harmônica*. Qual das funções abaixo são harmônicas?

(a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2;$

(b) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(y);$

(c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$

Solução 10.

1. Sim;
2. Não;
3. Sim.

Exercício 11.
Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$

(a) $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

(c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.

Solução 11.

1. $\mathbb{R}^2$;
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D}$ é o disco fechado de raio 1 centrado na origem;
3. $\mathbb{R}^2$.

Exercício 12.
Seja $y = \phi(x - at) + \psi(x + at)$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, para todo x, onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.

Solução 12.
Sejam $u = (x - at)$ e $v = (x + at)$. Assim,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}(x - at) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}(x + at) = -a\frac{\partial \phi}{\partial u}(x - at) + a\frac{\partial \psi}{\partial v}(x + at)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t}(x - at) + a\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t}(x + at) = a^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(x - at) + a^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(x + at)$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}(x - at) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}(x + at) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(x - at) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(x + at)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}(x - at) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}(x + at) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(x - at) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(x + at)$$

Exercício 13.
Seja $r = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0,$$

para todo (x, y), onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.

Solução 13.
seja $u = x + y$. Assim,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \phi(u) + x\frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + y\frac{\partial \psi}{\partial u}(u); \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = 2\frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + x\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u) + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2};$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = x\frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + \psi(u) + y\frac{\partial \psi}{\partial u}(u); \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = x\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u) + 2\frac{\partial \psi}{\partial u}(u) + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2};$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u) + x\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u) + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}.$$