Lista 3 com respostas

MAT3210 — 2° SEMESTRE DE 2019

Exercício 1.
Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = 7xy^3 - 2x^3 + 8y^2 - \frac{1}{4}$,

(b) $f(x, y) = \tan(xy) - \frac{1}{xy}$,

(c) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^4) + 3x$,

(d) $f(x, y) = e^{3x^2+y^3} - 7x + \frac{1}{x + 2y}$,

(e) $f(x, y) = x\sqrt{3x^2y + 7y^3}$,

(f) $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2 + 2)$,

(g) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$,

(h) $f(x, y) = \frac{x^3 - 2y}{x^2 - 4y}$,

(i) $f(x, y) = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

(j) $f(x, y) = \ln(xy^3 + yx^2 + z)$, onde $z = \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}$.

Solução 1.

(a) $\nabla f(x, y) = (7y^3 - 6x^2, 21xy^2 + 16y)$

(b) $\nabla f(x, y) = (y \sec^2(xy) + \frac{1}{x^2y}, x \sec^2(xy) + \frac{1}{xy^2})$

(c) $\nabla f(x, y) = (-2x \sin(x^2 + y^4) + 3, -4y^3 \sin(x^2 + y^4))$

(d) $\nabla f(x, y) = (6xe^{3x^2+y^3} - 7 - \frac{1}{(x + 2y)^2}, 3y^2e^{3x^2+y^3} - \frac{2}{(x + 2y)^2})$

(e) $\nabla f(x, y) = (\sqrt{3x^2y + 7y^3} + \frac{3x^2y}{\sqrt{3x^2y + 7y^3}}, \frac{x(3x^2 + 21y^2)}{2\sqrt{3x^2y + 7y^3}})$

(f) $\nabla f(x, y) = (\frac{2x}{x^2 + 4y^2 + 2}, \frac{8y}{x^2 + 4y^2 + 2})$

(g) $\nabla f(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$

(h) $\nabla f(x, y) = (\frac{3x^2(x^2 - 4y) - 2x(x^3 - 2y)}{(x^2 - 4y)^2}, -\frac{2(x^2 - 4y) - 4(x^3 - 2y)}{(x^2 - 4y)^2})$

(i)

$$f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}_{g(x,y)}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-g(x,y)^2}}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(2y^2)}{(x^2+y^2)^2\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2-(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}\right)\left(2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)\,2\sqrt{2y^2(x^2-y^2)}} = \frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-g(x,y)^2}}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y(2x^2)}{(x^2+y^2)^2\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2-(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}\right)\left(2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)\,2\sqrt{2y^2(x^2-y^2)}} = \frac{-x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$$

(j) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3+2yx+\frac{(xy^2+yx^2)(y^2+2xy)}{z}}{xy^3+yx^2+z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x+x^2+\frac{(xy^2+yx^2)(x^2+2xy)}{z}}{xy^3+yx^2+z}$$

Exercício 2.

Determine o conjunto dos pontos onde as funções admitem derivadas parciais:

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x+1)^3}{(x+1)^2+y^2}+5x, & \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ -5, & \text{se } (x,y) = (-1,0), \end{cases}$$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

Solução 2.

(a) f admite derivadas parciais fora de (0,0) pois é uma função racional. Agora vejamos em (0,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Logo f admite derivadas parciais em (0,0)

(b) f admite derivadas parciais fora de (-1,0) pois é racional. Vejamos em (-1,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h-1,0)-f(-1,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{4h+5(h-1)+5}{h} = 9$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1,h)-f(-1,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Logo f admite derivadas parciais em (-1,0)

(c) f admite derivadas parciais fora de (0,0) pois é uma função racional. Agora vejamos em (0,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Logo f admite derivadas parciais em (0,0)
(Perceba que f não é contínua em (0,0) no entanto)

Exercício 3.
Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $h(4) = 3$ e $h'(4) = -1$.
Considere $f(x,y) = xh(3x^2+y^3)$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

Solução 3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2h'(3x^2+y^3) + h(3x^2+y^3),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 6h'(4) + h(4) = -6+3 = -3.$$

Exercício 4.

(a) Seja $z = x \sin \frac{x}{y}$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\,.$$

(b) Seja $f(x, y) = x^3 y - y^3 x$. Procure

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}},$$

no ponto $(1, 2)$.

Solução 4.

(a)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) - yx^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y^2} = z$$

(b)

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{3x^2y - y^3 + x^3 - 3y^2x}{(3x^2y - y^3)(x^3 - 3y^2x)} = \frac{6 - 8 + 1 - 12}{(6-8)(1-12)\,.}$$

Exercício 5.

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\[2ex] 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução 5.

Para $(x, y) \neq 0$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left(x^2 + y^2\right) + 2y\left(x + y^4\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Para $(x, y) = (0, 0)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{t}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} = \infty. \end{aligned}$$

Exercício 6.
Determine o conjunto dos pontos onde a função dada é diferenciável.

a)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

b)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

c)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

d)
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, & \text{se } x^2+y^2<1\\[2ex] 0, & \text{se } x^2+y^2\geqslant 1.\end{cases}$$

Solução 6.

(a) f é diferenciável fora de (0,0) pois é racional. Mas f não é contínua
De fato, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$ pela reta y=0, e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=-1$ pela reta x=0
Logo f não pode ser diferenciável em (0,0)

(b) f é diferenciável fora de (0,0) pois é racional. Mas f não é contínua em (0,0), logo não é diferenciável em (0,0)

(c) f é diferenciável fora de (0,0) pois é racional. Agora vejamos:
$\nabla f(0,0)=(0,0)$, então $E(h,k)=\dfrac{h^4}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}=\dfrac{h^2}{(h^2+k^2)}\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}h\to 0$ para $(h,k)\to(0,0)$
Logo f é diferenciável

(d) f é diferenciável em $x^2+y^2\neq 1$ pois é de classe C^1. Agora vejamos o que ocorre quando $x^2+y^2=1$:
Tomando a seguinte parametrização $(x,y)=(r\cos t, r\sin t)$, vejamos que queremos saber se $e^{\frac{1}{r^2-1}}$ é diferenciável em $r=1$. O que não ocorre pois o nem é contínua.

Exercício 7.
Ache a equação do plano tangente a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = 2x^2y$, no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

(b) $z = xe^{x^2-y^2}$, no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.

(c) $z = e^x \ln(y)$, no ponto $(3, 1, 0)$.

(d) $z = \arctan(x - 2y)$, no ponto $(2, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$.

Solução 7.
Aqui utilizarei $< u, v >$ para falar do produto interno/escalar de vetores

(a) $< (4, 2, -1), (x, y, z) - (1, 1, 2) >= 0$

(b) $< (9, -8, -1), (x, y, z) - (2, 2, 2) >= 0$

(c) $< (0, e^3, -1), (x, y, z) - (3, 1, 0) >= 0$

(d) $< (1, -2, 1), (x, y, z) - (1, \frac{1}{2}, 0) >= 0$

Exercício 8.
Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

Solução 8.
Lembremos que o vetor normal ao plano será

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) = (2x_0 + y_0, x_0, -1)$$

pois, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. Agora como queremos que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$, que temos como vetor normal $\vec{m} = (2, 3, -1)$, basta ter

$$\vec{n} = \lambda \vec{m},$$

logo temos

$$\begin{aligned} 2x_0 + y_0 &= 2\lambda \\ x_0 &= 3\lambda \\ \lambda &= 1, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} y_0 &= -4 \\ x_0 &= 3 \\ \lambda &= 1, \end{aligned}$$

e

$$z_0 = f(3, -4) = 9 - 12 = -3.$$

Além disso a equação do plano tangente à superfície é

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

então tal equação do plano é

$$2(x - 3) + 3(y + 4) - (z + 3) = 0.$$

Exercício 9.
Determine o plano que passa por $A = (1,1,2)$ e $B = (-1,1,1)$ e seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

Solução 9.
O plano tangente no ponto genérico $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem forma

$$z - x_0y_0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0).$$

Como A e B estão no plano temos

$$\begin{aligned} 2 - x_0y_0 &= y_0(1 - x_0) + x_0(1 - y_0), \\ 1 - x_0y_0 &= y_0(-1 - x_0) + x_0(1 - y_0). \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema obtemos x_0 e y_0.

Exercício 10.
Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

Solução 10.
O plano tangente no ponto genérico $P = (x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$ tem forma

$$z - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0).$$

Agora os pontos $(0,3,0)$ e $(3,0,0)$ pertencem a reta intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$, assim

$$\begin{cases} 0 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0(3 - x_0) + 2y_0(0 - y_0), \\ 0 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0(0 - x_0) + 2y_0(3 - y_0). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos x_0 e y_0.

Exercício 11.
Calcule os valores aproximados das:

(a) $\sqrt{1.01} + \sqrt[3]{7.9}$.

(b) $1.04^{2.02}$.

(c) $\sqrt{0.98^2 + 1.01^2 + 2.03^2}$.

(d) $e^{1.01^2 - 1.002^2}$.

Exercício 12.
Calcule as derivadas mencionadas pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida e aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$, $\dfrac{dz}{dt} = ?$

(b) $z = x^2 + y^2 + xy, x = \sin t, y = e^t$, $\dfrac{dz}{dt} = ?$

(c) $z = x^2y - y^2x$, $x = u\sin t$, $y = u\cos t$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} =?$, $\dfrac{\partial z}{\partial u} =?$

(d) $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} =?$, $\dfrac{\partial z}{\partial u} =?$

Solução 12.

(a) $e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)$

(b) $\sin(2t) + 2e^{2t} + e^t(\sin t + \cos t)$

(c) $u^2(\sin(2t)(\cos t + t) - (\sin^3 t + \cos^3 t), 2u(\sin^2 t\cos t - \sin t\cos^2 t)$

(d) $\dfrac{-2u^2\ln(3u-2v)}{v^3} - \dfrac{2u^2}{(3u-2v)v^2}, \dfrac{1}{v^2}\Big(2u\ln(3u-2v) + \dfrac{3u^2}{3u-2v}\Big)$

Exercício 13.
Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Solução 13.
Tomando $x = u - v$ e $y = v - u$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercício 14.
Suponha que para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Solução 14.
Reparemos que $x = t^2$ e $y = 2t$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ 3t^2 - 3 &= 2t\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

Terminamos fazendo $t = 1$.