Aula 27. Revisão II

27.1 Máximos e mínimos num conjunto compacto

Vamos lembrar o seguinte fato importante da Aula 22.

Theorem 27.1: Teorema de Weierstrass

Seja $f(x, y)$ uma função contínua num compacto D (conjunto limitado e fechado). Assim f admite máximo e mínimo absoluto em D, ou seja existem dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em D tais que

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2),$$

para todos (x, y) em D.

Algoritmo para encontrar os MAX e MIN absolutos:

(1) Encontrar os pontos críticos da função $f(x, y)$ dentro da região D e calcular os valores da função $f(x, y)$ nestes pontos;

(2) Encontrar o máximo e mínimo da função $f(x, y)$ na fronteira da região D, reduzindo o problema para funções de uma variável real;

(3) Comparar os valores obtidos em (1) e (2) decidindo onde é MAX e MIN.

Exercício 27.1: (Trabalho p/ casa da Aula 22)

Encontre o mínimo absoluto e o máximo absoluto de

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$$

no retângulo dado por

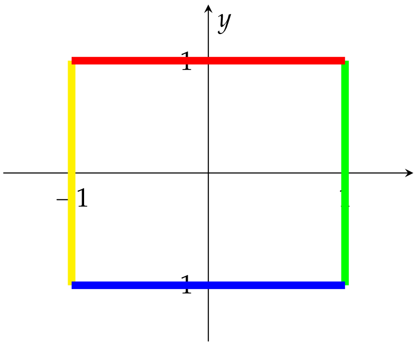
$$-1 \leq x \leq 1$$

e

$$-1 \leq y \leq 1.$$

Solução 27.1

O conjunto é compacto, pois é limitado e contém a sua fronteira formada pelos segmentos: amarelo, verde, vermelho e azul. Assim pelo Teorema de Weierstass deve existir máximo e mínimo absolutos.



Começaremos encontrando todos os pontos críticos que estão dentro de um determinado retângulo. Para fazer isso, precisaremos das duas derivadas de primeira ordem.

$$f_x = 2x - 4xy \quad f_y = 8y - 2x^2$$

Para encontrar os pontos críticos, precisaremos resolver o sistema,

$$\begin{aligned} 2x - 4xy &= 0 \\ 8y - 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos resolver a segunda equação de y para obter,

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Conectar isso à primeira equação nos dá,

$$2x - 4x\left(\frac{x^2}{4}\right) = 2x - x^3 = x\left(2 - x^2\right) = 0$$

Isso nos diz que devemos ter $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2} = \pm 1.414\ldots$ Agora, lembre-se de que só queremos pontos críticos na região que nos foi dada. Isso significa que queremos apenas pontos críticos para os quais $-1 \leq x \leq 1$. O único valor de x que satisfará isso é o primeiro, então podemos ignorar os dois últimos para este problema. Observe, no entanto, que uma simples mudança no limite incluiria esses dois, então não se esqueça de sempre verificar se os pontos críticos estão na região (ou no limite, pois isso também pode acontecer). Colocando $x = 0$ na equação de y nos dá,

$$y = \frac{0^2}{4} = 0$$

O único ponto crítico, na região (e novamente, isso é importante), é $(0,0)$. Agora precisamos obter o valor da função no ponto crítico.

$$f(0,0) = 4$$

Vamos primeiro dar uma olhada no lado direito (segmento verde). O lado direito é definido por

$$x = 1, -1 \leq y \leq 1$$

Observe que no lado direito sabemos que $x = 1$. Vamos tirar vantagem disso definindo uma nova função como segue,

$$g(y) = f(1,y) = 1^2 + 4y^2 - 2\left(1^2\right)y + 4 = 5 + 4y^2 - 2y$$

Agora, encontrar os extremos absolutos de $f(x,y)$ ao longo do lado direito será equivalente a encontrar os extremos absolutos de $g(y)$ no intervalo $-1 \leq y \leq 1$. Esperançosamente, você se lembra de como fazer isso no Cálculo I. Encontramos os pontos críticos de $g(y)$ no intervalo $-1 \leq y \leq 1$ e, em seguida, avaliamos $g(y)$ nos pontos críticos e os pontos finais do intervalo de y 's. Vamos fazer isso para este problema.

$$g'(y) = 8y - 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}$$

Isso está dentro do intervalo e, portanto, precisaremos das seguintes avaliações de função.

$$g(-1) = 11 \quad g(1) = 7 \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Observe que, usando a definição de $g(y)$, esses também são valores de função para $f(x,y)$.

$$\begin{aligned} g(-1) &= f(1,-1) = 11 \\ g(1) &= f(1,1) = 7 \\ g\left(\frac{1}{4}\right) &= f\left(1, \frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4} = 4{,}75 \end{aligned}$$

Agora podemos fazer o lado esquerdo do retângulo que é definido por,

$$x = -1, -1 \leq y \leq 1$$

Novamente, vamos definir uma nova função da seguinte maneira,

$$g(y) = f(-1,y) = (-1)^2 + 4y^2 - 2(-1)^2 y + 4 = 5 + 4y^2 - 2a$$

Observe, entretanto, que, para este limite, esta é a mesma função que observamos para o lado direito. Isso nem sempre acontecerá, mas como aconteceu, vamos aproveitar o fato de já termos feito o trabalho para esta função. Sabemos que o ponto crítico é $y = \frac{1}{4}$ e sabemos que o valor da função no ponto crítico e os pontos finais são,

$$g(-1) = 11 \quad g(1) = 7 \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4} = 4,75$$

A única diferença real aqui é que eles corresponderão aos valores de $f(x,y)$ em pontos diferentes do lado direito. Nesse caso, eles corresponderão aos seguintes valores de função para $f(x,y)$.

$$\begin{aligned} g(-1) &= f(-1,-1) = 11 \\ g(1) &= f(-1,1) = 7 \\ g\left(\frac{1}{4}\right) &= f\left(-1,\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4} = 4,75 \end{aligned}$$

Agora podemos olhar para o lado superior definido por,

$$y = 1, -1 \leq x \leq 1$$

Voltaremos a definir uma nova função, mas desta vez será uma função de x.

$$h(x) = f(x,1) = x^2 + 4\left(1^2\right) - 2x^2(1) + 4 = 8 - x^2$$

Precisamos encontrar os extremos absolutos de $h(x)$ no intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Primeiro encontre o (s) ponto (s) crítico (s).

$$h'(x) = -2x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

O valor desta função no ponto crítico e nos pontos finais é,

$$h(-1) = 7, \quad h(1) = 7, \quad h(0) = 8$$

e estes, por sua vez, correspondem aos seguintes valores de função para $f(x,y)$

$$\begin{aligned} h(-1) &= f(-1,1) = 7 \\ h(1) &= f(1,1) = 7 \\ h(0) &= f(0,1) = 8 \end{aligned}$$

Observe que existem várias "repetições" aqui. Os primeiros dois valores de função já foram calculados quando olhamos para o lado direito e esquerdo. Isso vai acontecer com frequência.

Finalmente, precisamos cuidar do lado inferior. Este lado é definido por,

$$y = -1, -1 \leq x \leq 1$$

A nova função que definiremos neste caso é,

$$h(x) = f(x,-1) = x^2 + 4(-1)^2 - 2x^2(-1) + 4 = 8 + 3x^2$$

O ponto crítico para esta função é,

$$h'(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Os valores da função no ponto crítico e no ponto final são,

$$h(-1) = 11 \quad h(1) = 11 \quad h(0) = 8$$

e os valores correspondentes para $f(x,y)$ são,

$$\begin{aligned} h(-1) &= f(-1,-1) = 11 \\ h(1) &= f(1,-1) = 11 \\ h(0) &= f(0,-1) = 8 \end{aligned}$$

A etapa final desse processo (longo ...) é coletar todos os valores da função para $f(x,y)$ que calculamos neste problema. Aqui estão eles,

$$\begin{array}{lll} f(0,0) = 4 & f(1,-1) = 11 & f(1,1) = 7 \\ f\left(1,\frac{1}{4}\right) = 4,75 & f(-1,1) = 7 & f(-1,-1) = 11 \\ f\left(-1,\frac{1}{4}\right) = 4,75 & f(0,1) = 8 & f(0,-1) = 8 \end{array}$$

O mínimo absoluto está em $(0,0)$, pois fornece o menor valor da função e o máximo absoluto ocorre em $(1,-1)$ e $(-1,-1)$, pois esses dois pontos fornecem o maior valor da função.

Exercício 27.2: (Trabalho p/ casa da Aula 22)

Encontre o mínimo absoluto e o máximo absoluto de

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6y$$

no disco de raio 4, $x^2 + y^2 \leq 16$.

Resposta: O mínimo absoluto está em $(0,-4)$, e o máximo absoluto ocorre em $(-\sqrt{15},1)$ e $(\sqrt{15},1)$.

Solução 27.2

Primeiro observe que um disco de raio 4 é dado pela desigualdade na definição do problema. A desigualdade "menor que" é incluída para obter o interior do disco e o sinal de igual para obter o limite. Claro, isso também significa que o limite do disco é um círculo de raio 4. Vamos primeiro encontrar os pontos críticos da função que está dentro do disco. Isso exigirá as seguintes duas derivadas parciais de primeira ordem.

$$f_x = 4x, \quad f_y = -2y + 6$$

Para encontrar os pontos críticos, precisaremos resolver o seguinte sistema.

$$\begin{aligned} 4x &= 0 \\ -2y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

No entanto, este é um sistema bastante simples de resolver. A primeira equação nos diz que $x = 0$ e a segunda nos diz que $y = 3$. Então, o único ponto crítico para esta função é (0,3) e este fica dentro do disco de raio 4. O valor da função neste ponto crítico é,

$$f(0,3) = 9$$

Agora precisamos olhar para o limite. Este será um pouco diferente do exemplo anterior. Neste caso, não temos valores fixos de x e y no limite. Em vez disso, temos

$$x^2 + y^2 = 16$$

Podemos resolver isso para x^2 e conectar x^2 em $f(x,y)$ para obter uma função de y como segue.

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 - y^2 \\ g(y) &= 2\left(16 - y^2\right) - y^2 + 6y = 32 - 3y^2 + 6y \end{aligned}$$

Precisaremos encontrar os extremos absolutos desta função no intervalo $-4 \leq y \leq 4$ (este é o intervalo de y 's para o disco ....). Precisamos primeiro dos pontos críticos desta função.

$$g'(y) = -6y + 6 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

O valor desta função no ponto crítico e os terminais são,

$$g(-4) = -40 \quad g(4) = 8 \quad g(1) = 35$$

Ao contrário do primeiro exemplo, ainda precisaremos encontrar os valores de x que correspondem a eles. Podemos fazer isso inserindo o valor de y em nossa equação para o círculo e resolvendo para x.

$$\begin{aligned} y = -4: &\quad x^2 = 16 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ y = 4: &\quad x^2 = 16 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ y = 1: &\quad x^2 = 16 - 1 = 15 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{15} \end{aligned}$$

Os valores da função para $g(y)$ então correspondem aos seguintes valores da função para $f(x,y)$.

$$g(-4) = -40 \Rightarrow f(0,-4) = -40$$
$$g(4) = 8 \Rightarrow f(0,4) = 8$$
$$g(1) = 35 \Rightarrow f(-\sqrt{15},1) = 35 \text{ e } f(\sqrt{15},1) = 35$$

Observe que o terceiro realmente correspondeu a dois valores diferentes para $f(x,y)$, uma vez que y também produziu dois valores diferentes de x. Então, comparando esses valores com o valor da função no ponto crítico de $f(x,y)$ que encontramos anteriormente, podemos ver que o mínimo absoluto ocorre em $(0,-4)$ enquanto o máximo absoluto ocorre duas vezes em $(-\sqrt{15},1)$ e $(\sqrt{15},1)$

27.2 *Classificação dos pontos críticos*

Pergunta: Dado um ponto crítico (x_0, y_0) da função $f(x,y)$, como decidir se ele é máximo, mínimo ou nenhum de dois?

Para responder essa pergunta, acontece que é bastante útil a noção do **Hessiano**, definido como

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Temos o seguinte critério para decidir o tipo do ponto crítico (vejam Aula 23 para mais detalhes).

Teorema 27.2

Suponha que (a,b) seja um ponto crítico de $f(x,y)$ e que as derivadas parciais de segunda ordem sejam contínuas em alguma região que contém (a,b). Em seguida, defina,

$$H(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

Assim:

(1) Se $H(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$, então há um **mínimo relativo** em (a,b).

(2) Se $H(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$, então há um **máximo relativo** em (a,b).

(3) Se $H(a,b) < 0$ então o ponto (a,b) é um ponto de **sela**.

(4) Se $H(a,b) = 0$ então o ponto (a,b) pode ser um mínimo relativo, máximo relativo ou um ponto de sela. Outras técnicas precisariam ser usadas para classificar o ponto crítico.

Exercício 27.3: (Trabalho p/ casa da Aula 23)

Encontre e classifique todos os pontos críticos de

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Resposta: Há um mínimo relativo em $(1,1)$ e sela em $(0,0)$.

Solução 27.3

Precisamos primeiro de todas as derivadas parciais de primeira ordem (para encontrar os pontos críticos) e de segunda ordem (para classificar os pontos críticos), então vamos pegá-las.

$$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x$$
$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3.$$

Vamos primeiro encontrar os pontos críticos. Os pontos críticos serão soluções para o sistema de equações,

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0,$$
$$f_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Este é um sistema não linear de equações e pode, às vezes, ser difícil de resolver. No entanto, neste caso, não é tão ruim. Podemos resolver a primeira equação para y da seguinte forma,

$$3x^2 - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x^2$$

Conectar isso à segunda equação dá,

$$3\left(x^2\right)^2 - 3x = 3x\left(x^3 - 1\right) = 0$$

Disto podemos ver que devemos ter $x = 0$ ou $x = 1$. Agora use o fato de que $y = x^2$ para obter os pontos críticos.

$$x = 0 : y = 0^2 = 0 \quad \Rightarrow (0,0)$$
$$x = 1 : y = 1^2 = 1 \quad \Rightarrow (1,1)$$

Portanto, temos dois pontos críticos. Tudo o que precisamos fazer agora é classificá-los. Para fazer isso, precisaremos do Hessiano. Aqui está a fórmula geral para o Hessiano:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2 \\ &= (6x)(6y) - (-3)^2 \\ &= 36xy - 9 \end{aligned}$$

Para classificar os pontos críticos, tudo o que precisamos fazer é inserir os pontos críticos e usar o critério acima para classificá-los.

$(0,0)$:

$$H = H(0,0) = -9 < 0$$

Portanto, para $(0,0)$ H é negativo e então este deve ser um ponto de sela.

$(1,1)$:

$$H = H(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0 \quad f_{xx}(1,1) = 6 > 0$$

Para $(1,1)$ H é positivo e f_{xx} é positivo e, portanto, devemos ter um mínimo relativo.

Exercício 27.4: (Trabalho p/ casa da Aula 23)

Encontre e classifique todos os pontos críticos de

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2.$$

Solução 27.4

Como no primeiro exemplo, primeiro precisamos obter todas as derivadas de primeira e segunda ordem.

$$f_x = 6xy - 6x, \quad f_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y,$$
$$f_{xx} = 6y - 6, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xy} = 6x.$$

Precisamos primeiro dos pontos críticos. As equações que precisaremos resolver desta vez são,

$$6xy - 6x = 0$$
$$3x^2 + 3y^2 - 6y = 0$$

Essas equações são um pouco mais difíceis de resolver do que o primeiro conjunto, mas uma vez que você vê o que fazer, elas realmente não são terrivelmente ruins. Primeiro, vamos notar que podemos fatorar $6x$ da primeira equação para obter,

$$6x(y-1) = 0$$

Assim, podemos ver que a primeira equação será zero se $x = 0$ ou $y = 1$. Tenha cuidado para não cancelar apenas x de ambos os lados. Se tivéssemos feito isso, teríamos perdido $x = 0$. Para encontrar os pontos críticos, podemos inseri-los (individualmente) na segunda equação e resolver para a variável restante.

$x = 0$:

$$3y^2 - 6y = 3y(y-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, y = 2$$

$y = 1:$

$$3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, x = 1$$

Assim temos 4 pontos críticos

$$(0,0), \quad (0,2), \quad (1,1) \quad (-1,1).$$

Agora, tudo o que precisamos fazer é classificar os pontos críticos. Para fazer isso, precisaremos da fórmula geral para H.

$$H(x,y) = (6y-6)(6y-6) - (6x)^2 = (6y-6)^2 - 36x^2$$

$(0,0)$:

$$H = H(0,0) = 36 > 0 \quad f_{xx}(0,0) = -6 < 0$$

$(0,2)$:

$$H = H(0,2) = 36 > 0 \quad f_{xx}(0,2) = 6 > 0$$

$(1,1)$:

$$H = H(1,1) = -36 < 0$$

$(-1,1)$:

$$H = H(-1,1) = -36 < 0$$

Assim:

$(0,0)$	:	Máxima
$(0,2)$	:	Miníma
$(1,1)$	:	Sela
$(-1,1)$	:	Sela

Exercício 27.5: (Trabalho p/ casa da Aula 23)

Determine o ponto no plano $4x - 2y + z = 1$ que está mais próximo do ponto $(-2,-1,5)$.

Solução 27.5

Considere função

$$f(x,y) = (x+2)^2 + (y+1)^2 + (-4-4x+2y)^2$$

Precisaremos das derivadas parciais primeiro.

$$f_x = 2(x+2) + 2(-4)(-4-4x+2y) = 36 + 34x - 16y$$
$$f_y = 2(y+1) + 2(2)(-4-4x+2y) = -14 - 16x + 10y$$
$$f_{xx} = 34, \quad f_{yy} = 10, \quad f_{xy} = -16.$$

Agora, antes de encontrarmos o ponto crítico, vamos calcular $H(x,y)$ rapidamente.

$$H(x,y) = 34(10) - (-16)^2 = 84 > 0$$

Portanto, neste caso $H(x,y)$ sempre será positivo e também observe que $f_{xx} = 34 > 0$ é sempre positivo e, portanto, quaisquer pontos críticos que obtivermos serão garantidos como mínimos relativos. Agora vamos encontrar o(s) ponto(s) crítico(s). Isso significará resolver o sistema.

$$\begin{aligned} 36 + 34x - 16y &= 0, \\ -14 - 16x + 10y &= 0. \end{aligned}$$

Agora, conecte isso à segunda equação e resolva para y.

$$-14 - \frac{16}{17}(8y - 18) + 10y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{25}{21}$$

Substituir novamente isso na equação por x resulta em $x = -\frac{34}{21}$. Então, parece que obtivemos um único ponto crítico $\left(-\frac{34}{21}, -\frac{25}{21}\right)$. Além disso, como sabemos que será um mínimo relativo e é o único ponto crítico, sabemos que também são as coordenadas x e y do ponto no plano que queremos encontrar. Podemos determinar a coordenada z inserindo o que temos na equação do plano da seguinte maneira,

$$z = 1 - 4\left(-\frac{34}{21}\right) + 2\left(-\frac{25}{21}\right) = \frac{107}{21}$$

Então, o ponto no plano que está mais próximo de (-2, -1,5) é $\left(-\frac{34}{21}, -\frac{25}{21}, \frac{107}{21}\right)$.

27.3 Multiplicadores de Lagrange

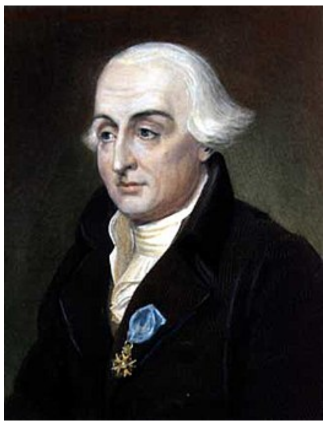
Na Aula 24 a gente viu que quando precisamos de otimizar (ou seja, encontrar o valor mínimo e máximo de) uma função, $f(x,y)$, sujeito à restrição $g(x,y) = k$ é bem útil na prática aplicar o método chamado **Método de Multiplicadores de Lagrange**. O processo era bastante simples, embora às vezes o trabalho ainda possa ser um pouco complicado.

Método de multiplicadores de Lagrange:

(a) Resolva o seguinte sistema de equações.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y), \\ g(x,y) &= k. \end{aligned}$$

(b) Calcule os valores de $f(x,y)$ para todas as soluções (x,y) de (a), e identificar os valores mínimo e máximo, desde que existam.



Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

O método funciona igualmente quando temos uma função de 3 variáveis reais $f(x,y,z)$ e uma restrição $g(x,y,z)=k$.

Exercício 27.6: (Trabalho p/ casa da Aula 24)

Encontre as dimensões da caixa com maior volume se a área total da superfície for 64 cm^2.

Solução 27.6

Queremos encontrar o maior volume e, portanto, a função que queremos otimizar é dada por,

$$f(x,y,z) = xyz$$

Em seguida, sabemos que a área da superfície da caixa deve ser uma constante 64. Portanto, esta é a restrição. A área da superfície de uma caixa é simplesmente a soma das áreas de cada um dos lados, então a restrição é dada por,

$$2xy + 2xz + 2yz = 64 \quad \Rightarrow \quad xy + xz + yz = 32$$

Observe que dividimos a restrição por 2 para simplificar um pouco a equação. Além disso, obtemos a função $g(x,y,z)$ disso.

$$g(x,y,z) = xy + xz + yz$$

A função em si, $f(x,y,z) = xyz$, claramente não terá mínimos ou máximos, a menos que coloquemos algumas restrições nas variáveis. A única restrição real que temos é que todas as variáveis devem ser positivas. Isso, é claro, significa instantaneamente que a função tem um mínimo, zero, embora seja um valor bobo, pois também significa que praticamente não temos uma caixa. No entanto, significa que sabemos que o mínimo de $f(x,y,z)$ existe. Então, vamos ver agora se $f(x,y,z)$ terá um máximo. Claramente, esperançosamente, $f(x,y,z)$ não terá um máximo se todas as variáveis puderem aumentar sem limite. Isso, entretanto, não pode acontecer por causa da restrição,

$$xy + xz + yz = 32$$

Aqui temos a soma de três números positivos (lembre-se de que x, y, e z são positivos porque estamos trabalhando com uma caixa) e a soma deve ser igual a 32. Portanto se uma das variáveis for muito grande, digamos x, então, como cada um dos produtos deve ser menor que 32, tanto y quanto z devem ser muito pequenos para garantir que os dois primeiros termos sejam menores que 32. Assim não tem como todas as variáveis aumentarem sem limite e, portanto, faz algum sentido que a função $f(x,y,z) = xyz$ tenha um máximo. Esta não é uma prova exata de que $f(x,y,z)$ terá um máximo, mas deve ajudar a visualizar que $f(x, y, z)$ deve ter um valor máximo, desde que esteja sujeita à restrição. Aqui estão as quatro equações que precisamos resolver.

$$
\begin{aligned}
yz &= \lambda(y+z) && (f_x = \lambda g_x) && (27.1)\\
xz &= \lambda(x+z) && (f_y = \lambda g_y) && (27.2)\\
xy &= \lambda(x+y) && (f_z = \lambda g_z) && (27.3)\\
xy + xz + yz &= 32 && (g(x,y,z) = 32) && (27.4)
\end{aligned}
$$

Existem muitas maneiras de resolver este sistema. Vamos resolver isso da seguinte maneira. Vamos multiplicar a equação (27.1) por x, a equação (27.2) por y e a equação (27.3) por z. Isto dá,

$$
\begin{aligned}
xyz &= \lambda x(y+z) && (27.5)\\
xyz &= \lambda y(x+z) && (27.6)\\
xyz &= \lambda z(x+y) && (27.7)
\end{aligned}
$$

Agora observe que podemos definir as equações (27.5) e (27.6) iguais. Fazer isso dá,

$$
\begin{aligned}
\lambda x(y+z) &= \lambda y(x+z)\\
\lambda(xy+xz) - \lambda(yx+yz) &= 0\\
\lambda(xz-yz) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad xz = yz
\end{aligned}
$$

Isso deu duas possibilidades. O primeiro, $\lambda = 0$ não é possível, pois se fosse esse o caso, a equação (27.1) seria reduzida para

$$yz = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, \quad \text{ou} \quad z = 0$$

já que estamos falando sobre as dimensões de uma caixa, nenhuma dessas opções é possível, então podemos descontar $\lambda = 0$. Isso deixa a segunda possibilidade.

$$xz = yz$$

como sabemos que $z \neq 0$ (novamente, já que estamos falando sobre as dimensões de uma caixa), podemos cancelar z de ambos os lados. Isto dá,

$$x = y$$

A seguir, vamos definir as equações (27.6) e (27.7) iguais. Fazer isso dá,

$$
\begin{aligned}
\lambda y(x+z) &= \lambda z(x+y)\\
\lambda(yx+yz-zx-zy) &= 0\\
\lambda(yx-zx) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, \quad \text{ou,} \quad yx = zx
\end{aligned}
$$

Como já discutido, sabemos que $\lambda = 0$ não funcionará e assim deixa,

$$yx = zx$$

Também podemos dizer que $x \neq 0$, uma vez que estamos lidando com as dimensões de uma caixa, devemos ter,

$$z = y$$

Substituindo as equações $x = y$ e $z = y$ na equação (27.4), obtemos,

$$y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2 = 32 \quad y = \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$$

No entanto, sabemos que y deve ser positivo, pois estamos falando sobre as dimensões de uma caixa. Portanto, a única solução que faz sentido físico aqui é

$$x = y = z = \sqrt{\frac{32}{3}}.$$

Exercício 27.7: (Trabalho p/ casa da Aula 24)

No plano $x + y + z = 1$ encontre o ponto cujo produto das coordenadas seja máximo (resp. mínimo). Suponha que $x, y, z \geq 0$.

Solução 27.7

Considere função $f(x, y, z) = xyz$. Aqui está o sistema de equações que precisamos resolver.

$$yz = \lambda \qquad (27.8)$$
$$xz = \lambda \qquad (27.9)$$
$$xy = \lambda \qquad (27.10)$$
$$x + y + z = 1 \qquad (27.11)$$

Vamos começar este processo de solução observando que, como as três primeiras equações têm λ, são todas iguais. Então, vamos começar definindo as equações (27.8) e (27.9) iguais.

$$\begin{aligned} yz = xz \Rightarrow z(y - x) = 0 \Rightarrow \\ z = 0 \quad \text{ou,} \quad y = x \end{aligned}$$

Portanto, temos duas possibilidades aqui. Vamos começar assumindo que $z = 0$. Nesse caso, podemos ver pela equação (27.8) ou (27.9) que devemos ter $\lambda = 0$. Da equação (27.10), vemos que isso significa que $xy = 0$. Isso, por sua vez, significa que $x =$

0 ou $y = 0$. Portanto, temos dois casos possíveis para tratar lá. Em cada caso, duas das variáveis devem ser zero. Assim que soubermos disso, podemos inserir a restrição, equação (27.11), para encontrar o valor restante.

$$\begin{aligned} z = 0, x = 0: &\quad \Rightarrow \quad y = 1 \\ z = 0, y = 0: &\quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{aligned}$$

Portanto, temos duas soluções possíveis $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Agora vamos voltar e dar uma olhada na outra possibilidade, $y = x$. Também temos dois casos possíveis para examinar aqui. Este primeiro caso é $x = y = 0$. Neste caso, podemos ver pela restrição que devemos ter $z = 1$ e então agora temos uma terceira solução $(0, 0, 1)$. O segundo caso é $x = y \neq 0$. Vamos definir as equações (27.9) e (27.10) iguais.

$$xz = xy \quad \Rightarrow \quad x(z - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad z = y$$

Agora, já assumimos que $x \neq 0$ e, portanto, a única possibilidade é $z = y$. No entanto, isso também significa que,

$$x = y = z$$

Usar isso na restrição dá,

$$3x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Portanto, a próxima solução é $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ Obtivemos quatro soluções definindo as duas primeiras equações iguais. Para terminar completamente este problema, deveríamos definir as equações (27.8) e (27.10) iguais, bem como definir as equações (27.9) e (27.10) iguais para ver o que obtemos. Fazer isso dá,

$$\begin{aligned} yz = xy &\quad \Rightarrow \quad y(z - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad z = x \\ xz = xy &\quad \Rightarrow \quad x(z - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad z = y \end{aligned}$$

Ambos são muito semelhantes à primeira situação que examinamos e deixaremos para você mostrar que em cada um desses casos chegamos de volta às quatro soluções que já encontramos. Portanto, temos quatro soluções que precisamos verificar na função para ver se temos mínimos ou máximos.

$$\begin{aligned} &f(0, 0, 1) = 0 \quad f(0, 1, 0) = 0 \quad f(1, 0, 0) = 0 \quad \text{Todos Mínimos} \\ &f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} \qquad \text{Máxima} \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, o máximo ocorre apenas uma vez, enquanto o mínimo ocorre três vezes.

A gente viu vários exemplos como otimizar (ou seja, encontrar o valor mínimo e máximo de) uma função, $f(x,y)$, sujeito à restrição $g(x,y) = k$, aplicando o método **Método de Multiplicadores de Lagrange II**. De fato tem um método um pouco modificado que permite otimizar a função $f(x,y,z)$ sujeito duas restrições $g(x,y,z) = 0, \quad h(x,y,z) = 0$. O procedimento é bem parecido do que foi para uma restrição:

(a) Resolva o seguinte sistema de equações.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z), \\ g(x,y,z) = 0, &\quad h(x,y,z) = 0. \end{aligned}$$

(b) Calcule os valores de $f(x,y,z)$ para todas as soluções (x,y,z) de (a), e identificar os valores mínimo e máximo, desde que existam.

Exercício 27.8: (Trabalho p/ casa)

Encontre o ponto P que pertence ambos os planos $x+y+z = 1$ e $x - y + 3z = 3$ e é mais perto para o ponto $(1,1,1)$.

Solução 27.8

A gente deve minimizar a função $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ sujeito às restrições

$$\begin{cases} g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0, \\ h(x,y,z) = x-y+3z-3 = 0. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (2(x-1), 2(y-1), 2(z-1)), \\ \nabla h(x,y,z) &= (1,1,1), \\ \nabla g(x,y,z) &= (1,-1,3). \end{aligned}$$

Montando o sistema obtemos

$$\begin{cases} 2(x-1) = \lambda + \mu, \\ 2(y-1) = \lambda - \mu, \\ 2(z-1) = \lambda + 3\mu, \\ x+y+z = 1, \\ x-y+3z = 3. \end{cases}$$

Somando as três primeiras equações temos

$$2(x+y+z-3) = 3\lambda + 3\mu.$$

Usando que $x+y+z = 1$, temos

$$\lambda + \mu = -\frac{4}{3}.$$

Assim $2(x-1) = -\frac{4}{3}$, ou seja $x = \frac{1}{3}$. Somando as últimas duas equações temos

$$2x + 4z = 4, \Rightarrow z = \frac{2-x}{2} = \frac{5}{6}$$

Assim $y = -\frac{1}{6}$, e ponto é

$$P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

Exercício 27.9: (Trabalho p/ casa)

Encontre o máximo e mínimo da $f(x, y, z) = 3x^2 + y$ sujeito às restrições $4x - 3y = 9$ e $x^2 + z^2 = 9$.

Solução 27.9

Antes de prosseguir com o problema, vamos notar que a segunda restrição é a soma de dois termos que são elevados ao quadrado (e, portanto, positivos). Assim o maior intervalo possível de x é $-3 \leq x \leq 3$ (os maiores valores ocorreriam se $z = 0$). Obteremos uma faixa semelhante por z.

Agora, a primeira restrição não é a soma de dois (ou mais) números positivos. No entanto, já estabelecemos que x está restrito a $-3 \leq x \leq 3$ e isso dará $-7 \leq y \leq 1$ como o maior intervalo possível de y 's. Observe que podemos obter facilmente esse intervalo reconhecendo que a primeira restrição é apenas uma linha e, portanto, os valores extremos de y corresponderão aos valores extremos de x. Portanto, como agora sabemos que nossas respostas devem ocorrer nesses intervalos limitados, pelo Teorema de Valor Extremo, sabemos que extremos absolutos ocorrerão para esse problema. Esta etapa é uma etapa importante (e muitas vezes esquecida) nesses problemas. Sempre ajuda saber que extremos absolutos existem antes de realmente tentar encontrá-los!

O primeiro passo aqui é escrever o sistema de equações que precisaremos resolver para este problema.

$$\begin{aligned} 6x &= 4\lambda + 2x\mu \\ 1 &= -3\lambda \\ 0 &= 2z\mu \\ 4x - 3y &= 9 \\ x^2 + z^2 &= 9 \end{aligned}$$

Observe que a partir da segunda equação, podemos ver rapidamente que $\lambda = -\frac{1}{3}$ independentemente de qualquer um dos valores das outras variáveis no sistema. A seguir, a partir da terceira equação, podemos ver que temos $z = 0$ ou $\mu = 0$, Portanto, temos 2 possibilidades para observar. Vamos dar uma olhada em $z = 0$ primeiro. Neste caso, podemos ir direto para a segunda restrição para obter,

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

Podemos, por sua vez, inserir cada uma dessas possibilidades na primeira restrição para obter valores para y.

$$\begin{array}{lll} x = -3 & : -12 - 3y = 9 & \Rightarrow \quad y = -7 \\ x = 3 & : 12 - 3y = 9 & \Rightarrow \quad y = 1 \end{array}$$

A partir desta etapa temos dois extremos absolutos possíveis.

$$(-3, -7, 0) \quad (3, 1, 0)$$

Agora vamos voltar e dar uma olhada no que acontece se $\mu = 0$. Se substituirmos isso na primeira equação do nosso sistema (e lembrar que $\lambda = -\frac{1}{3}$) obtemos,

$$6x = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{9}$$

Podemos inserir isso em cada uma de nossas restrições para obter valores de y (da primeira restrição) e z (da segunda restrição). Aqui está esse trabalho,

$$\begin{array}{lll} 4\left(-\frac{2}{9}\right) - 3y = 9 & \rightarrow & y = -\frac{89}{27} \\ \left(-\frac{2}{9}\right)^2 + z^2 = 9 & \rightarrow & z = \pm\frac{5\sqrt{29}}{9} \end{array}$$

Isso leva a mais dois extremos absolutos potenciais. No total, parece que temos quatro pontos que podem ser extremos absolutos. Portanto, para determinar os extremos absolutos, tudo o que precisamos fazer é avaliar a função em cada um desses pontos. Aqui estão essas avaliações de função.

$$f(-3, -7, 0) = 20, \quad f(3, 1, 0) = 28,$$
$$f\left(-\frac{2}{9}, -\frac{89}{27}, -\frac{5\sqrt{29}}{9}\right) = -\frac{85}{27} \quad f\left(-\frac{2}{9}, -\frac{89}{27}, \frac{5\sqrt{29}}{9}\right) = -\frac{85}{27}.$$

O máximo absoluto é então 28, que ocorre em $(3, 1, 0)$. O mínimo absoluto é $-\frac{85}{27}$ que ocorre em $\left(-\frac{2}{9}, -\frac{89}{27}, -\frac{5\sqrt{29}}{9}\right)$ and $\left(-\frac{2}{9}, -\frac{89}{27}, \frac{5\sqrt{29}}{9}\right)$.

Exercício 27.10: (Trabalho p/ casa)

O plano $x + y - z = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ numa elipse. Encontre os pontos na elipse mais próximos e mais distantes da origem.

Solução 27.10

De fato precisamos encontrar o valor máximo da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (que mede a distância) sujeito às restrições:

$$\begin{cases} g(x,y,z) = x + y - z - 1 = 0 \\ h(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Temos $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g(x,y,z) = (1, 1, -1)$, $\nabla h(x,y,z) = (1, 1, 1)$. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x = \lambda + \mu 2x \\ 2y = \lambda + \mu 2y \\ 2z = -\lambda \\ x + y - z = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Subtraindo as duas primeiras equações obtemos $2x - 2y = \mu[2x - 2y]$, assim $\mu = 1$ ou $x = y$.

Se $\mu = 1$, então, da primeira equação, temos que $\lambda = 0$ e, da terceira, $z = 0$. Colocando $z = 0$ nas últimas equações temos o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ que tem duas soluções $x = 0, y = 1$ e $x = 1, y = 0$. Assim temos dois pontos neste caso

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0).$$

Se $x = y$, então colocando isso nas últimas duas equações temos o sistema $\begin{cases} 2x - z = 1 \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$, que tem duas soluções $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, z = \pm\sqrt{2} - 1$. Assim temos mais dois pontos candidatos:

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2} - 1\right)$

Agora

$$f(1, 0, 0) = 1 = f(0, 1, 0)$$

e

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2} - 1\right) = 1/2 + 1/2 + 3 - 2\sqrt{2} > 1$$

Assim os pontos $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ são os mais próximos e os pontos $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2} - 1\right)$ são os mais distantes da origem.