Aula 26. Revisão I

26.1 Funções deriváveis

Vamos lembrar as noções básicas sobre funções de 2-variáveis deriváveis:

- Seja $f(x,y)$ função de 2 variáveis reais. Dizemos que $f(x,y)$ é **derivável** num ponto (x_0,y_0) se existem dois números reais a e b tais que
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-ah-bk}{|(h,k)|}=0,$$
onde $|(h,k)|=\sqrt{h^2+k^2}$.

- Se $f(x,y)$ é derivável num ponto (x_0,y_0) assim $f(x,y)$ é automaticamente contínua em (x_0,y_0).

- Se f é função da classe C^1 num conjunto aberto A, ou seja se as derivadas parciais
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$
são funções contínuas em A, assim f é derivável em todo ponto (x,y) de A.

Exercício 26.1: (Trabalho p/ casa da Aula 16)

Mostre que as seguinte funções são deriváveis no seu domínio.

(a) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$,

(b) $f(x,y)=\cos(e^{x+y})$.

Solução 26.1

Vamos provar que f é função da classe C^1 em cada item. Em item (a), temos que o domínio da função $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ é
$$\mathrm{Dom}_f=\{(x,y)\mid(x,y)\neq(0,0)\}.$$

As derivadas parciais da função $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=\frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Ambas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas para qualquer ponto (x, y) com $(x, y) \neq (0,0)$, assim f é diferenciável em todo o domínio.

Em item (b), temos que o domínio da função $f(x, y) = \cos(e^{x+y})$ é todo o plano $\mathbb{R}^2$. As derivadas parciais da função $f(x, y) = \cos(e^{x+y})$ são

$$\frac{\partial}{\partial\, x}\left(\cos\left(e^{x+y}\right)\right) = -\sin\left(e^{x+y}\right) e^{x+y} = \frac{\partial}{\partial\, y}\left(\cos\left(e^{x+y}\right)\right).$$

Ambas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas para qualquer ponto (x, y), assim f é diferenciável em todo o domínio.

Exercício 26.2

Dada a função $f(x, y) = x\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$, determine:

a) O domínio das funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$;

b) Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas;

c) Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável.

Solução 26.2

(a) Se $(x, y) \neq (0,0)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \text{sen}\left(\sqrt[3]{x^2 + y^2}\right) + \frac{2x^2 \cos\left(\sqrt[3]{x^2 + y^2}\right)}{3\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy \cos\left(\sqrt[3]{x^2 + y^2}\right)}{3\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Caso $(x, y) = (0,0)$ consideramos separadamente. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,\text{sen}(x^{2/3})}{x} = \lim_{x \to 0} \text{sen}(x^{2/3}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0,0)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Assim $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ estão definidas para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) + \dfrac{2x^2\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Claramente as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todos $(x,y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Caso $(x,y) = (0,0)$ consideramos separadamente.

Observe que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}} = 0,$$

pois a função $\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ é limitada. Na mesma maneira

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} = 0$$

Assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} = 0.$$

Assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) + \frac{2x^2\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\right] = 0+0=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{2xy\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\right] = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Portanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que f é diferenciável em todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 26.3: (Trabalho p/ casa da Aula 16)

Considere função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Descreva os pontos onde f é derivável.

Solução 26.3

Primeiramente observem que o domínio da função é todo $\mathbb{R}^2$. Vamos encontrar as derivadas parciais dessa função. Para qualquer ponto $(x,y) \neq (0,0)$ temos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4}{x^2+y^2}\right) = \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

No ponto $(0,0)$ podemos encontrar as derivadas parciais usando a definição (vejam Aula 15).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{x^2}-0}{x-0} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0} = 0,$$

Assim as derivadas são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Obviamente ambas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em qualquer ponto $(x,y) \neq (0,0)$ [como funções racionais]. Além disso elas são contínuas em $(0,0)$, por exemplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + 4\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= 2\cdot 0 + 4\cdot 0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Semelhante $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ é contínua em $(0,0)$ também. Como as derivadas parciais são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$ concluímos que f é derivável em todo $\mathbb{R}^2$.

26.2 Plano tangente e aproximação

A equação do plano tangente à superfície dada por $z = f(x, y)$ em (x_0, y_0) é

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Um bom uso dos planos tangentes é que eles nos fornecem uma maneira de aproximar uma superfície perto de um ponto. Enquanto estivermos próximos do ponto (x_0, y_0) então o plano tangente deve aproximar-se da função naquele ponto. Por causa disso, definimos a aproximação linear como sendo,

$$\boxed{L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

e enquanto estivermos "próximos" (x_0, y_0) então devemos ter isso,

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

Exercício 26.4: (Trabalho p/ casa da Aula 17)

Determine o plano que passa por $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^3 y$.

Solução 26.4

Equação do plano tangente ao $f(x, y) = x^3 y$ num ponto genérico (a, b) tem forma

$$z - a^3 b = 3a^2 b(x - a) + a^3(y - b).$$

Os pontos $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ estão no plano, assim

$$1 - a^3 b = 3a^2 b(1 - a) + a^3(-b)$$

e

$$-a^3 b = 3a^2 b(1 - a) + a^3(1 - b).$$

Subtraindo dois equações temos, $a^3 = -1$, ou seja $a = -1$. Colocando este valor para a primeira equação temos

$$1 + b = 6b + b$$

ou seja $b = 1/6$. Assim o plano é $z + 1/6 = 1/2(x + 1) - (y - 1/6)$.

Exercício 26.5: (Trabalho p/ casa da Aula 17)

Calcule aproximadamente

$$\sqrt[4]{16,01} + \sqrt{3,98}$$

Solução 26.5

Considere a função $f(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$. Temos que

$$f(16+0.01, 4-0.02) = \sqrt[4]{16,01} + \sqrt{3,98}$$

Por outro lado

$$f(16+0.01, 4-0.02) \approx f(16,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(16,4)\cdot 0.01 + \frac{\partial f}{\partial y}(16,4)\cdot(-0.02)$$

Fácil ver que $f(16,4) = 4$. Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(16,4) = \frac{1}{32}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(16,4) = \frac{1}{4}$$

Portanto

$$\mathrm{f}(16+0.01, 4-0.02) \approx 4 + \frac{1}{32}\frac{1}{100} - \frac{1}{4}\frac{2}{100}.$$

Exercício 26.6: (Trabalho p/ casa da Aula 17)

Calcule aproximadamente

$$\ln\left(1,01^3\right) + \sqrt{1,01+3,02}.$$

Solução 26.6

Considere a função $f(x,y) = \ln\left(x^3\right) + \sqrt{x+y}$. Temos que

$$f(1+0.01, 3+0.02) = \ln 1.01^3 + \sqrt{1.01+3.02}$$

Por outro lado

$$f(1+0.01, 3+0.02) \approx f(1,3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,3)\cdot 0.01 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)\cdot(0.02)$$

Fácil ver que $f(1,3) = 2$. Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = \frac{13}{4}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = \frac{1}{4}$$

Portanto

$$f(1+0.01, 3+0.02) \approx 2 + \frac{13}{4}\frac{1}{100} + \frac{1}{4}\frac{2}{100} = \frac{163}{80}.$$

26.3 *Regra de cadeia*

Suponha que $z = f(x,y)$, f seja diferenciável, $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Supondo que existam as derivados relevantes,

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

Agora suponha que dada a seguinte situação

$$z = f(x,y), x = g(s,t), y = h(s,t)$$

precisamos calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ Neste caso, substituindo x e y temos que z é uma função de s e t, assim faz sentido calcular essas derivadas parciais Temos a seguinte regra de cadeia para esses casos.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Exercício 26.7

Dadas as seguintes informações, use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$, se

$$z = x^{-2}y^6 - 4x \quad x = u^2 v, \quad y = v - 3u.$$

Solução 26.7

Podemos apenas usar as "fórmulas" das anotações (com uma pequena mudança nas letras) para determinar esta derivada. Aqui está o trabalho para esse problema.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= \left[-2x^{-3}y^6 - 4\right][2uv] + \left[6x^{-2}y^5\right][-3] \\
&= \left[2uv\left(-2u^{-6}v^{-3}(v-3u)^6 - 4\right) - 18u^{-4}v^{-2}(v-3u)^5\right. \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= \left[-2x^{-3}y^6 - 4\right]\left[u^2\right] + \left[6x^{-2}y^5\right][1] \\
&= u^2\left(-2u^{-6}v^{-3}(v-3u)^6 - 4\right) + 6u^{-4}v^{-2}(v-3u)^5
\end{aligned}$$

Na segunda etapa, adicionamos colchetes apenas para deixar claro qual termo veio de qual derivada na "fórmula". Além disso, inserimos x e y na terceira etapa apenas para obter uma equação em u e v.

Exercício 26.8

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$$

para todo $t \neq 0$, e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$(1,1) \cdot \nabla f(1,1) = 2f(1,1).$$

Solução 26.8

Seja $\gamma(t) = (t, t)$ curva em $\mathbb{R}^2$. Considere a função composta

$$F(t) = f(\gamma(t)) = f(t, t).$$

Em particular $F(1) = f(1,1)$. Como f é diferenciável, temos que

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Se $t = 1$, assim $\gamma'(1) = \gamma(1) = (1,1)$. Por outro lado $F(t) = f(t,t) = f(t \cdot 1, t \cdot 1) = t^2 f(1,1)$. Assim $F'(1) = 2f(1,1)$. Assim

$$(1,1) \cdot \nabla f(1,1) = 2f(1,1).$$

26.4 *Derivada direcional*

A taxa de variação de $f(x, y)$ na direção do vetor unitário

$$\vec{u} = \langle a, b \rangle$$

é chamada de **derivada direcional** e é denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$. A definição da derivada direcional é,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ah, y + bh) - f(x, y)}{h}.$$

Se f uma função derivável em ponto (x, y), e $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário, assim a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ existe, e além disso

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, b.$$

Vamos lembrar também o seguinte fato importante: seja $f(x, y)$ uma função derivável, então o valor máximo da $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y)$ ocorre quando $\vec{u}$ é um vetor paralelo ao $\nabla f(x,y)$ e o valor maximal da derivada direcional é

$$\max \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = |\nabla f(x,y)|.$$

Exercício 26.9

Encontre a taxa máxima de variação de f no ponto dado e a direção em que ocorre $f(x,y,z) = \mathbf{e}^{2x}\cos(y-2z)$ em $(4,-2,0)$.

Solução 26.9

Primeiramente encontramos o gradiente e seu valor em $(4,-2,0)$.

$$\nabla f = \left\langle 2\mathbf{e}^{2x}\cos(y-2z), -\mathbf{e}^{2x}\sin(y-2z), 2\mathbf{e}^{2x}\sin(y-2z)\right\rangle$$
$$\nabla f(4,-2,0) = \left\langle 2\mathbf{e}^{8}\cos(-2), -\mathbf{e}^{8}\sin(-2), 2\mathbf{e}^{8}\sin(-2)\right\rangle = \langle -2481.03, 2710.58, -5421.15\rangle$$

Agora pelo Teorema 20.2 da Aula 20 sabemos que a direção com a taxa máxima de variação é simplesmente o gradiente no ponto $(4,-2,0)$, que a gente encontrou no passo anterior. Assim a direção é

$$\nabla f(4,-2,0) = \langle -2481.03, 2710.58, -5421.15\rangle.$$

Agora a taxa máxima da variação é o módulo do gradiente:

$$|\nabla f(4,-2,0)| = \sqrt{(-2481.03)^2 + (2710.58)^2 + (-5421.15)^2} = 6549.17$$