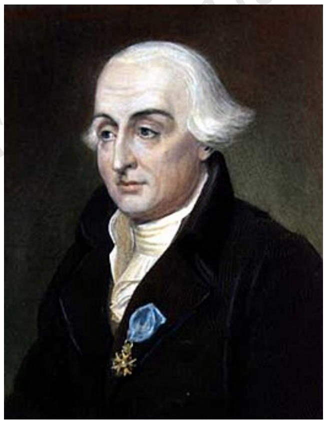
# Aula 25. *Multiplicadores de Lagrange II*

Aula passada a gente viu que quando precisamos de otimizar (ou seja, encontrar o valor mínimo e máximo de) uma função, $f(x,y)$, sujeito à restrição $g(x,y) = k$ é bem útil na prática aplicar o método chamado **Método de Multiplicadores de Lagrange**. O processo era bastante simples, embora às vezes o trabalho ainda possa ser um pouco complicado.


Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

### Método de multiplicadores de Lagrange:

(a) Resolva o seguinte sistema de equações.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y), \\ g(x,y) &= k. \end{aligned}$$

(b) Calcule os valores de $f(x,y)$ para todas as soluções $(x,y)$ de (a), e identifique os valores mínimo e máximo, desde que existam.

A constante, $\lambda$, é chamado de **Multiplicador de Lagrange**.

O método funciona igualmente quando temos uma função de 3 variáveis reais $f(x,y,z)$ e uma restrição $g(x,y,z) = k$. Neste caso precisamos montar o sistema

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z), \\ g(x,y,z) &= k. \end{aligned}$$

e encontrar as soluções dele.

Nós vamos fazer um exemplo para lembrar como funciona o método.

**Exemplo 25.1**

Vamos determinar todos os pontos do elipsóide:

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1,$$

cuja soma das coordenadas seja maximal ou minimal respectivamente.
Para fazer isso considere a função

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

A gente vai optimizar a função do elipsóide

$$g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 1.$$

Aplicando o método, temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (1, 1, 1), \\ \nabla g(x, y, z) &= (2x, 6y, 4z). \end{aligned}$$

Agora, montando o sistema,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z), \\ g(x, y, z) &= k. \end{aligned}$$

temos

$$\begin{cases} 1 = 2x\lambda \\ 1 = 6y\lambda \\ 1 = 4z\lambda \\ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$$

Ou seja

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{6\lambda}, \quad z = \frac{1}{4\lambda}.$$

Colocando isso na equação do elipsóide, temos

$$(1/2\lambda)^2 + 3(1/6\lambda)^2 + 2 \cdot (1/4\lambda)^2 = 1$$

Resolvendo essa equação temos que

$$\frac{6 + 2 + 3}{24\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{11}{24}}.$$

Assim temos 2 pontos candidatos.

$$P_1 = \left( -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{11}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{11}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{24}{11}} \right), \quad P_2 = \left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{11}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{11}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{27}{11}} \right).$$

Como $f(x, y, z)$ é soma de coordenadas num ponto $P = (x, y, z)$, assim é fácil ver que $P_1$ é mínimo e $P_2$ é máximo.

Misturando o método de Multiplicadores de Lagrange com o método de pontos críticos, podemos otimizar funções em conjuntos ainda mais complicados, como no exemplo abaixo.

**Exemplo 25.2**

Vamos achar o máximo e mínimo da função

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z,$$

no conjunto

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\right\}$$

O conjunto $R$ é uma bola com raio $\sqrt{56}$ centrada na origem que tem 2 partes

$$R_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x^2 + y^2 + z^2 < 56\right\}$$

ou seja todos os pontos no interior da bola $R$, onde podemos encontrar máximo e mínimo através o método de pontos críticos, e o conjunto

$$R_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x^2 + y^2 + z^2 = 56\right\}$$

a fronteira da bola $R$ (que é a esfera de raio $\sqrt{56}$ de centro na origem) onde vamos aplicar o método de multiplicadores de Lagrange.

**Conjunto $R_0$:** Temos que

$$\nabla f\,(x,y,z) = (2x-2, 2y-4, 2z-6)$$

Único ponto onde $\nabla f\,(x,y,z) = (0,0,0)$ é ponto $P = (1,2,3)$. Agora observem que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 < 56,$$

assim o ponto pertence $R_0$. Temos

$$f(P) = f(1,2,3) = 1 - 2 + 4 - 8 + 9 - 18 = -14.$$

Além disso é fácil ver o seguinte

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 14 \geq -14 = f(1,2,3).$$

Ou seja $P = (1,2,3)$ é o mínimo absoluto da função $f(x,y,z)$.

**Conjunto $R_1$:**

$$g\,(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 56, \quad \nabla g\,(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)\,.$$

Montando o sistema, temos

$$\begin{cases} 2x - 2 = \lambda \cdot 2x \\ 2y - 4 = \lambda \cdot 2y \\ 2z - 6 = \lambda \cdot 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{1-\lambda}, \quad y = \dfrac{2}{1-\lambda}, \quad z = \dfrac{3}{1-\lambda} \\ \dfrac{1}{(1-\lambda)^2} + \dfrac{4}{(1-\lambda)^2} + \dfrac{9}{(1-\lambda)^2} = 56 \end{cases}$$

Resolvendo ultima equação, temos

$$(1-\lambda)^2 = \frac{1}{4}, \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda) = \pm\frac{1}{2}.$$

Assim, temos 2 possibilidade, se $(1-\lambda) = \dfrac{1}{2}$ neste caso:

$$P_1 = (x,y,z) = (2,4,6) \Rightarrow f(2,4,6) = 1^2 + 2^2 + 3^2 - 14 = 0.$$

Se $(1-\lambda) = -\dfrac{1}{2}$

$$P_2 = (x,y,z) = (-2,-4,-6) \Rightarrow f(-2,-4,-6) = 3^2 + 6^2 + 9^2 - 14 = 112.$$

Resumindo: $P = (1,2,3)$ é mínimo e $P_2 = (-2,-4,-6)$ é máximo.

**Observação 25.1**

A gente viu vários exemplos de como otimizar (ou seja, encontrar o valor mínimo e máximo de) uma função, $f(x, y)$, sujeito à restrição $g(x, y) = k$, aplicando o método **Método de Multiplicadores de Lagrange II**. De fato tem um método um pouco modificado que permite otimizar a função $f(x, y, z)$ sujeito duas restrições $g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$. O procedimento é bem parecido do que foi para uma restrição:

(a) Resolva o seguinte sistema de equações.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z), \\ g(x, y, z) = 0, &\quad h(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

(b) Calcule os valores de $f(x, y, z)$ para todas as soluções $(x, y, z)$ de (a), e identifique os valores mínimo e máximo, desde que existam.

**Exemplo 25.3**

Vamos encontrar os pontos mais distantes da origem que pertencem a superfície $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ e o plano $x + y + z = 1$. De fato precisamos encontrar o valor máximo da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (que mede a distância) sujeito às restrições:

$$\begin{cases} g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0 \\ h\,(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Temos $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 8z)$, $\nabla h(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x = \lambda + 2x\mu \\ 2y = \lambda + 2y\mu \\ 2z = \lambda + 8z\mu \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-\mu) = \lambda \\ 2y(1-\mu) = \lambda \\ 2z(1-4\mu) = \lambda \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x(1-\mu) = 2y(1-\mu)$$

Assim $\mu = 1$, ou $x = y$. Se $\mu = 1$, assim $\lambda = 0$ e $z = 0$. Portanto temos $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$. Que reduz-se à equação $x^2 + (1-x)^2 = 4$ portanto $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$. Assim obtemos os pontos

$$P_1 = \left( \frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0 \right), \quad P_2 = \left( \frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0 \right)$$

Outra opção é $x = y$, neste caso temos o sistema $\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2x^2 + 4z^2 = 4, \end{cases}$. Resolvendo isso temos mais dois pontos candidatos

$$P_3 = (0, 0, 1), \quad P_4 = \left( \frac{8}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{7}{9} \right).$$

Analizando os valores da função em pontos $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ temos que $P_3$ é mínimo e $P_2$ é máximo.

**Exemplo 25.4**

Vamos encontrar o ponto mais próximo da origem que pertence os planos:

$$x - y + z = 4, \qquad x + y - z = 8.$$

A gente deve minimizar a função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeito às restrições

$$\begin{cases} g(x,y,z) = x - y + z - 4 = 0, \\ h(x,y,z) = x + y - z - 8 = 0. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (2x, 2y, 2z), \\ \nabla h(x,y,z) &= (1,-1,1), \\ \nabla g(x,y,z) &= (1,1,-1). \end{aligned}$$

Montando o sistema, recebemos

$$\begin{cases} 2x = \lambda + \mu, \\ 2y = -\lambda + \mu, \\ 2z = \lambda - \mu, \\ x - y + z = 4, \\ x + y - z = 8. \end{cases}$$

Somando a segunda e terceira equação, obtemos

$$2y + 2z = 0 \Rightarrow z = -y.$$

Logo, as equações (4) e (5) escrevem-se como

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$$

Somando as equações do último sistema, temos $2x = 12$, assim $x = 6$ e $y = 1$. Portanto $z = -y = -1$. Assim o ponto

$$P = (6,1,-1),$$

é candidato. Pegando qualquer outro ponto que pertence dois planos, por exemplo $Q = (6,2,0)$ temos que

$$f(6,2,0) = 6^2 + 2^2 + 0^2 = 40 > 38 = f(6,1,-1).$$

Assim $P = (6,1,-1)$ é mínimo.

**Exemplo 25.5**

Vamos estudar em relação de máximo e mínimo a função $f(x,y,z) = 3x - y - 3z$ com as restrições

$$x + y - z = 0, \qquad x^2 + 2z^2 - 1 = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (3,-1,-3), \\ \nabla g(x,y,z) &= (1,1,-1), \\ \nabla h(x,y,z) &= (2x,0,4z). \end{aligned}$$

Assim o sistema para resolver é

$$\begin{cases} 3 = \lambda + 2x \cdot \mu, \\ -1 = \lambda + 0 \cdot \mu, \\ -3 = -\lambda + 4z \cdot \mu, \\ x + y - z = 0, \\ x^2 + 2z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação, segue imediatamente que $\lambda = -1$. Assim a primeiro equação implica que

$$4 = 2x\mu, \quad \Rightarrow x = \frac{2}{\mu},$$

Por outro lado a terceira equação implica que

$$-4 = 4z\mu, \quad \Rightarrow z = -\frac{1}{\mu}.$$

Assim, pela última equação temos

$$\frac{4}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^2} = 1 \Rightarrow \mu = \pm\sqrt{6}.$$

Assim temos 2 pontos candidatos

$$P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Analizando os valores da $f(x,y,z)$ em $P_1$ e $P_2$, temos

$$f(P_1) = f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 2\sqrt{6}, \quad f(P_2) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -2\sqrt{6}$$

Assim $P_1$ é máximo e $P_2$ é mínimo.

**Exercício 25.1: (Trabalho p/ casa)**

Encontre o ponto $P$ que pertence ambos os planos $x+y+z=1$ e $x-y+3z=3$ e está mais próximo do ponto $(1,1,1)$.

**Resposta:**

$$P=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right).$$

**Exercício 25.2: (Trabalho p/ casa)**

Encontre o máximo e mínimo da $f(x,y,z)=3x^2+y$ sujeito às restrições $4x-3y=9$ e $x^2+z^2=9$.

**Resposta:** O maximo é 28 e ocorre em $(3,1,0)$. O mínimo absoluto é $-\frac{85}{27}$ e ocorre em
$\left(-\frac{2}{9},-\frac{89}{27},-\frac{5\sqrt{29}}{9}\right)$ e $\left(-\frac{2}{9},-\frac{89}{27},\frac{5\sqrt{29}}{9}\right)$.

**Exercício 25.3: (Trabalho p/ casa)**

O plano $x+y-z=1$ intercepta o cilindro $x^2+y^2=1$ numa elipse. Encontre os pontos na elipse mais próximos e mais distantes da origem.

**Resposta:** Os pontos $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ estão mais próximos da origem e
$(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1-\sqrt{2})$ está mais longe da origem.