Aula 23. Máximos e minimos II

Vamos lembrar que na aula passada nos estendemos uma das ideias mais importantes do Cálculo I para funções de duas variáveis estudando mínimos e máximos das funções de várias variáveis.

A definição de extremos relativos para funções de duas variáveis foi idêntica àquela para funções de uma variável:

Definição: Máximos e mínimos relativos

(1) Uma função $f(x,y)$ tem um **mínimo relativo** no ponto (a,b) se
$$f(x,y) \geq f(a,b)$$
para todos os pontos (x,y) em alguma região em torno de (a,b).

(2) Uma função $f(x,y)$ tem um **máximo relativo** no ponto (a,b) se
$$f(x,y) \leq f(a,b)$$
para todos os pontos (x,y) em alguma região em torno de (a,b).

Aconteceu que para encontrar os candidatos para pontos extremantes a gente aplicou uma técnica bem parecida com o que fizemos em Calculo I, ou seja, a gente pode encontrar os pontos **críticos** da função. Vamos lembrar que, o ponto (a,b) é um **ponto crítico** de $f(x,y)$, desde que uma das seguintes opções seja verdadeira,

(1) $\nabla f(a,b) = (0,0)$ (isso é equivalente a dizer que $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$),

(2) $f_x(a,b)$ e/ou $f_y(a,b)$ não existe.

Nos temos o seguinte fato útil que justifica a investigação dos pontos críticos.

Teorema 23.1

Se o ponto (a,b) é um extremo relativo da função $f(x,y)$ e as derivadas de primeira ordem de $f(x,y)$ existem em (a,b), então (a,b) é também um ponto crítico de $f(x,y)$ ou seja teremos
$$\nabla f(a,b) = (0,0).$$

Pergunta: Dado um ponto crítico (x_0, y_0) da função $f(x,y)$, como decidir se ele é máximo, mínimo ou nenhum de dois?

Para responder essa pergunta, acontece que bastante útil é noção chamado **Hessiano**. Seja $f(x,y)$ é uma função da classe $\mathcal{C}^2$, ou seja todas suas derivadas parciais da segunda ordem são funções contínuas. Defina **Hessiano** da $f(x,y)$ como o seguinte determinante

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2.$$

Observem que aqui a gente aplicou o teorema de Teorema de Clairaut-Schwarz (da Aula 21) que diz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$. Na maneira curta, podemos escrever o Hessiano, como

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Temos o seguinte critério para decidir o tipo do ponto crítico.

Teorema 23.2

Suponha que (a,b) seja um ponto crítico de $f(x,y)$ e que as derivadas parciais de segunda ordem sejam contínuas em alguma região que contém (a,b). Em seguida, defina,

$$H(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

Assim:

(1) Se $H(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$, então há um **mínimo relativo** em (a,b).

(2) Se $H(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$, então há um **máximo relativo** em (a,b).

(3) Se $H(a,b) < 0$ então o ponto (a,b) é um ponto de **sela**.

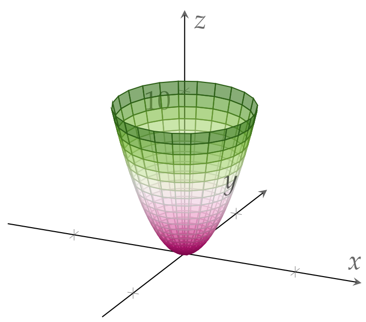
(4) Se $H(a,b) = 0$ então o ponto (a,b) pode ser um mínimo relativo, máximo relativo ou um ponto de sela. Outras técnicas precisariam ser usadas para classificar o ponto crítico.

Exemplo 23.1

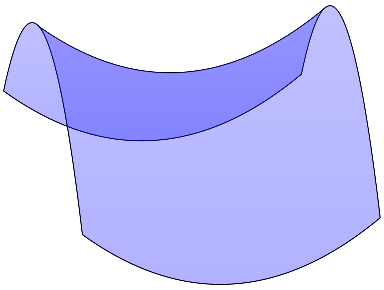
Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Assim $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ e ponto $(0,0)$ é um único ponto crítico da $f(x,y)$. É óbvio que $(0,0)$ é minimo da função $f(x,y)$, pois $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ para todos os pontos (x,y). Podemos ver isso também a partir da classificação acima. Temos que o Hessiano é dado por

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Além disso $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$. Ou seja estamos no item (1) do Teorema acima, portanto $(0,0)$ é **mínimo** da função.



Exemplo 23.2



Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Assim $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$ e ponto $(0,0)$ é um único ponto crítico da $f(x,y)$. É óbvio que $(0,0)$ não é mínimo e nem máximo da função $f(x,y)$ sendo que é o ponto no sela do gráfico acima. Podemos ver isso também a partir da classificação acima. Temos que o Hessiano é dado por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Ou seja estamos no item (3) do Teorema acima, portanto $(0,0)$ é ponto de sela da função.

Exemplo 23.3

Seja:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y + 12.$$

Assim

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 12, 3y^2 - 3\right).$$

E $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e somente se $(x,y) = (\pm 2, \pm 1)$. Ou seja, temos 4 pontos críticos:

$$(-2,-1), \quad (-2,1), \quad (2,-1), \quad (2,1).$$

Temos que o Hessiano, num ponto genérico (x,y) é

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy.$$

Agora

(1) $H(-2,-1) = 72 < 0$, além disso $f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$. Portanto $(-2,-1)$ é **máximo** da função;

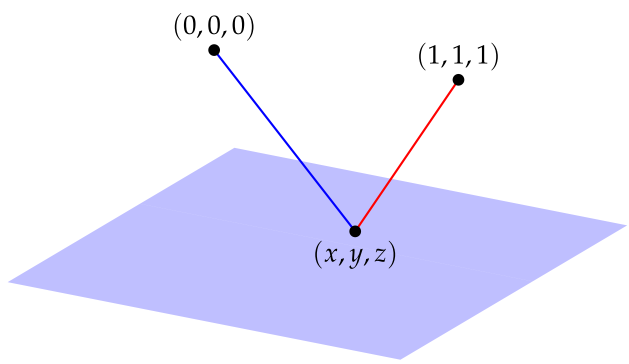
(2) $H(-2,1) = -72 < 0$. Portanto $(-2,1)$ é **sela** da função.

(3) $H(2,-1) = -72 < 0$. Portanto $(2,-1)$ é **sela** da função.

(4) $H(2,1) = 72 < 0$, além disso $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$. Portanto $(2,1)$ é **mínimo** da função.

Exemplo 23.4

Encontre um ponto no plano $3x+2y+z=12$ cujo a soma dos quadrados das distâncias aos pontos



$(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja miníma.

Montando a função

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \text{distância azul}^2 + \text{distância vermelha}^2 \\ &= (x^2+y^2+z^2) + ((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2). \end{aligned}$$

Como z está no plano assim $z = 12-3x-2y$, assim $f(x,y)$ escreve-se como:

$$f(x,y) = 20x^2+10y^2-140x-94y+24xy+12^2+11+2.$$

O gradiente da $f(x,y)$ dado como $\nabla f(x,y) = (40x-140+24y, 20y-94+24x)$. Assim $\nabla f(x,y) = 0$ se

$$\begin{cases} 40x+24y = 140 \\ 24x+20y = 94. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $x = \dfrac{17}{7}, y = \dfrac{25}{14}$. Agora, o Hessiano é

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 20 \end{vmatrix} = 40\cdot 20 - 24^2 = 224 > 0.$$

além disso $f_{xx} = 40 > 0$, ou seja $(x,y) = (17/7, 25/14)$ é mínimo da função $f(x,y)$. Agora

$$z = 12 - 3\cdot\frac{17}{7} - 2\cdot\frac{25}{14} = \frac{8}{7}.$$

Assim o ponto

$$(x,y,z) = (17/7, 25/14, 8/7)$$

é ponto no plano $3x+2y+z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja miníma.

Exemplo 23.5

Determine os valores de a de modo que a função $f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$ tem exatamente: 1 ponto de sela e 2 mínimos. Temos que o gradiente da $f(x,y)$ é dado por

$$\nabla f(x,y) = \left(8a^3 - 2ax, 2y - 2\right).$$

Assim

$$\nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2ax\left(4x^2 - 1\right) = 0, \\ 2(y-1) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0, \quad x = \pm\frac{1}{2}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Assim,

$$(0,1), \quad (-1/2,1), \quad (1/2,1)$$

são todos os pontos críticos da $f(x,y)$. Agora o Hessiano num ponto genérico (x,y) é

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 24ax^2 - 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4a\left(12x^2 - 1\right).$$

Temos

$$H(0,1) = -4a, \quad H\left(-\frac{1}{2},1\right) = 8a = H\left(\frac{1}{2},1\right)$$

Ou seja $(0,1)$ deve ser **sela** e $\left(\pm\frac{1}{2},1\right)$ são **mínimos**. Para $(0,1)$ ser sela é necessario que

$$H(0,1) = -4a < 0, \Rightarrow a > 0.$$

Observem que neste caso $H\left(\pm\frac{1}{2},1\right) = 8a > 0$, e além disso

$$f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2},1\right) = 24a^2 - 2a = 2a\left(12x^2 - 1\right) > 0.$$

Ou seja os pontos $\left(\pm\frac{1}{2},1\right)$ são **mínimos** para todo $a > 0$. Resumindo, qualquer $a > 0$ satisfaz a condição.

Exemplo 23.6

Vamos classificar os pontos críticos da função:

$$f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2.$$

Temos que o gradiente é

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy^2 - 2x, 2x^2y - 2y\right).$$

Assim o gradiente $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se

$$\begin{cases} xy^2 - x = 0 \\ xy - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ an } y = \pm 1 \\ y = 0 \text{ an } x = \pm 1 \end{cases}$$

ou seja temos 5 pontos críticos $(0,0)$ e $(\pm 1, \pm 1)$. O Hessiano num ponto genérico (x,y) é dado por:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y^2 - 2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 2 \end{vmatrix} = 4\left[\left(y^2 - 1\right)\left(x^2 - 1\right) - 4x^2y^2\right].$$

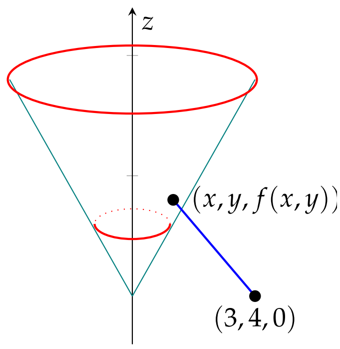
Em particular para $(0,0)$ temos $H(0,0) = 4 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$, ou seja $(0,0)$ é **máximo**. Além disso

$$H(\pm 1, \pm 1) = 4(0-4) = -16 < 0,$$

assim todos os pontos $(\pm 1, \pm 1)$ são **selas**.

Exemplo 23.7

Encontre os pontos na superfície $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ que estão mais próximos de $P = (3,4,0)$.
Seja l a distância entre o ponto $(3,4,0)$ e um ponto fixo (x,y,z) na superfície $z = f(x,y)$ (é o comprimento do segmento azul na imagem). Assim:



$$\begin{aligned} l^2 &= (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 \\ &= (x-3)^2 + (y-4)^2 + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

pois $z^2 = x^2 + y^2$. O gradiente da função $f(x,y)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (2x + 2(x-3), 2y + 2(y-4)) \\ &= (4x - 6, 4y - 8) \end{aligned}$$

Ou seja $x = \frac{3}{2}, y = 2$ é ponto crítico da função. Agora:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

e $f_{xx} = 4 > 0$, assim $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ é mínimo da função. O ponto no gráfico é

$$(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, 2, \sqrt{\frac{9}{4} + 4}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right).$$

Assim o ponto $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$ é o mais próximo ao ponto $P = (3,4,0)$.

Exercício 23.1: (Trabalho p/ casa)

Encontre e classifique todos os pontos críticos de

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Resposta: Há um mínimo relativo em $(1,1)$ e sela em $(0,0)$.

Exercício 23.2: (Trabalho p/ casa)

Encontre e classifique todos os pontos críticos de

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2.$$

Resposta:

$$\begin{array}{lcl} (0,0) & : & \text{Máxima} \\ (0,2) & : & \text{Miníma} \\ (1,1) & : & \text{Sela} \\ (-1,1) & : & \text{Sela} \end{array}$$

Exercício 23.3: (Trabalho p/ casa)

Determine o ponto no plano $4x - 2y + z = 1$ que está mais próximo do ponto $(-2,-1,5)$. **Resposta:** $\left(-\frac{34}{21}, -\frac{25}{21}, \frac{107}{21}\right)$.